

Voorwoord

Differentiaalvergelijkingen vormen bij uitstek de verbinding tussen de wiskundige analyse en de fysische modellen. De verscheidenheid in de optredende modellen wordt weerspiegeld in de diversiteit aan differentiaalvergelijkingen. In deze cursus, die is ontstaan uit de aantekeningen bij het college Differentiaalvergelijkingen voor Technische Natuurkunde, wordt getracht de verschillende soorten gewone en partiële differentiaalvergelijkingen met hun specifieke methoden aan de orde te laten komen.

De keuze van de onderwerpen hangt nauw samen met de gegeven randvoorwaarden. De belangrijkste daarvan is de voorkennis van de student, namelijk het eerstejaars vak Analyse en een begin van Lineaire Algebra. Daarnaast staat de lijst van onderwerpen die men behandeld wil zien. Een derde randvoorwaarde die ik mezelf opleg is dat de gebruiker van dit boek leert inzien waarom de gebruikte methode al of niet werkt en niet slechts hoe deze werkt. Bijvoorbeeld het scheiden van variabelen bij partiële differentiaalvergelijkingen werkt formeel bekeken zowel bij diffusie als bij anti-diffusie. Als de argumenten de lezer bij anti-diffusie al niet van enige moeilijkheden bewust maken dan hoop ik dat tenminste de bijgevoegde illustratie enige onrust veroorzaakt.

De stof valt in vier delen uiteen. Het eerste deel vormt een inleiding tot Complexe Functietheorie eindigend met harmonische functies en enkele toepassingen. Deel II begint met een korte herhaling van enkele expliciete methoden. De kern van dit deel is de fundamentele existentie en eenduidigheidstelling voor gewone differentiaalvergelijkingen. Daarnaast wordt aandacht besteed aan fasevlakanalyse voor lineaire en niet-lineaire gewone differentiaalvergelijkingen. Deel III, randwaardeproblemen voor lineaire gewone differentiaalvergelijkingen met Greense functies en Fourier-reeksen, vormt een opstapje naar deel IV, partiële differentiaalvergelijkingen. Na een classificatie van de verschillende typen en voorbeelden met de passende randvoorwaarden wordt wat nader ingegaan op vier klassen, tweede orde lineaire elliptische, parabolische, hyperbolische en Schrödinger-differentiaalvergelijkingen met de passende begin- en randvoorwaarden.

Enkele mededelingen over Computer-Algebra programma's. De afstand van een differentiaalvergelijking tot het fysische model is vaak omgekeerd evenredig met de berekenbaarheid. Gelukkig bestaan er programma's zoals Maple en Mathematica die veel rekenwerk uit handen kunnen nemen en de gebruiker zonder veel kennis van de numerieke wiskunde een benadering van een oplossing leveren. Als gereedschap worden ze de lezer van harte aanbevolen. Beide programma's zijn overigens gebruikt om de illustraties te genereren.

Tenslotte wil ik enkele collega's, dr. E. Coplakova in het bijzonder, en diverse studenten bedanken voor hun commentaar op delen van het manuscript.

Delft, juni 1998

G. Sweers

Inhoud

I	Complexe functies	1
1	Inleiding	3
1.1	Enkele begrippen	3
1.1.1	Complexe getallen	3
1.1.2	Open en gesloten	4
1.1.3	Krommen	4
1.1.4	Samenhang	6
1.1.5	Limiet en continuïteit in \mathbb{C}	7
1.1.6	Reeksen	8
1.2	Machtreeksen	9
2	Differentiëren in \mathbb{C}	15
2.1	De definitie	15
2.2	Machtreeksen en differentieerbaarheid	18
2.3	Cauchy-Riemann	19
3	Integreren in \mathbb{C}	23
3.1	De integraal over een kromme	23
3.2	Hoofdstelling van de complexe integratie	29
3.3	Het Residu	31
3.3.1	Definitie en gebruik	31
3.3.2	Het berekenen	34
3.4	Gevolgen van de formule van Cauchy	39
3.4.1	Eigenschappen analytische functies	39
3.4.2	Harmonische functies	41
4	Toepassingen	45
4.1	Stationair temperatuurprofiel in 2 dimensies	45
4.1.1	Inleiding met een model	45
4.1.2	Een oplossing voor een cirkelvormig gebied	48
4.1.3	Een oplossing op andere gebieden	52
4.1.4	Eenduidigheid van de oplossing	57
4.2	Stromingsproblemen in 2 dimensies	58
4.2.1	Puntbron	60
4.2.2	Stroming in een strip	61

II	Beginwaardeproblemen voor gewone differentiaalvergelijkingen	63
5	Eerste orde gewone d.v. en eerste orde stelsels	65
5.1	Enkele expliciete methoden voor 1 ^e orde	65
5.1.1	Separabele d.v.	65
5.1.2	Homogene d.v.	66
5.1.3	Eerste orde lineaire d.v.	66
5.1.4	Bernoulli en Riccati d.v.	67
5.1.5	Exacte d.v.	67
5.1.6	Voorbeelden en opgaven	69
5.2	Motivatie voor kwalitatieve aanpak	72
5.3	Van hogere orde naar 1 ^e orde stelsel	77
5.4	Existentie en eenduidigheid van het beginwaardeprobleem . . .	79
5.5	Bewijs locale existentie- en eenduidigheidsstelling	85
5.5.1	Picard-iteratie	86
5.5.2	Uniforme convergentie voor functie-rijen	88
5.5.3	Begrensdheid van Picard-benaderingen	89
5.5.4	Convergentie van Picard-benaderingen	90
5.5.5	Eenduidigheid van de oplossing	91
5.6	Gevolgen voor autonome d.v.	92
5.7	A priori schattingen	94
5.8	Vergelijkingsprincipe voor 1 ^e orde d.v.	96
6	Tweede orde gewone d.v.	101
6.1	Analyse van het fasevlak	101
6.2	De slinger met en zonder wrijving	103
6.3	Lineaire d.v.	106
6.3.1	Existentie en eenduidigheid	106
6.3.2	Het gereduceerde probleem	107
6.3.3	Het oorspronkelijke probleem.	109
7	Lineaire d.v. met constante coëfficiënten	111
7.1	Inleiding	111
7.2	Het berekenen van de oplossingen	112
7.2.1	De definitie van de exponent van een matrix	112
7.3	Intermezzo Lineaire Algebra	114
7.3.1	Enkele simpele exponenten	114
7.3.2	Eigenwaarden en eigenvectoren	115
7.3.3	Transformaties voor 2 bij 2 matrices	117
7.3.4	Transformaties voor n bij n matrices	119
7.3.5	De $n \times n$ transformatie voor symmetrische matrices . .	121
7.3.6	Matrix-norm	122
7.4	Classificatie van lineaire stelsels in \mathbb{R}^2	123
7.4.1	Voorbeelden	125
7.5	Hoe te berekenen in \mathbb{R}^3 en hoger?	131
7.6	(In)stabiliteit voor lineaire stelsels	132
7.7	Het inhomogene stelsel	134

8	Kwalitatieve analyse niet-lineaire stelsels	137
8.1	Niet-lineaire stelsels en linearisaties	137
8.1.1	Lineariseren	137
8.1.2	Stabiliteit	138
8.1.3	Van gelineariseerde terug naar niet-lineaire stelsels . . .	139
8.2	Lyapunov-functies	149
8.2.1	De Lorenz-vergelijking	152
9	Machtreeksmethoden	155
9.1	Motivatie	155
9.2	Classificatie	157
9.3	Oplossingen rond normale punten	158
9.4	Oplossingen rond regulier-singuliere punten	159
III Randwaardeproblemen voor gewone differentiaalvergelijkingen		165
	Schema 1: enkele oplossingen van randwaardeproblemen bij gewone differentiaalvergelijkingen	167
10	Greense Functies voor gewone d.v.	169
10.1	Tweede-orde randwaardeproblemen voor gewone d.v.	169
10.1.1	Een touwtje	169
10.1.2	Greense functies voor tweede-orde r.w.p.	172
10.2	Een vierde-orde probleem; de ingeklemde staaf	178
11	Fourier-reeksen	181
11.1	Motivatie 1: randwaardeproblemen voor gewone d.v.	181
11.2	Motivatie 2: scheiding van variabelen bij beginwaardeproblemen voor partiële d.v.	184
11.3	Enige achtergrond	187
11.3.1	Voorwaarden en definities	187
11.3.2	Eigenfuncties	190
11.3.3	Convergentie	192
11.3.4	Het berekenen	193
11.4	Verdere theorie	195
11.5	Fourier-reeksen en randwaardeproblemen	198
11.5.1	Periodieke randvoorwaarde	198
11.5.2	De standaard Fourier-reeks	201
11.5.3	De Fourier-sinus-reeks	202
11.5.4	De Fourier-cosinus-reeks	203
11.5.5	Enkele verbanden	204
11.5.6	Voorbeeld en opgaven	204
IV Randwaardeproblemen voor partiële differentiaalvergelijkingen		209
	Schema 2: enkele oplossingen van randwaardeproblemen voor partiële differentiaalvergelijkingen	211

12	Classificatie tweede orde partiële differentiaalvergelijkingen	213
12.1	Motivatie	213
12.2	Afspraken	213
12.3	Classificatie in \mathbb{R}^2	215
12.4	Classificatie in \mathbb{R}^n	220
12.5	Typische voorbeelden	222
12.5.1	De harmonische differentiaalvergelijking	222
12.5.2	De warmtevergelijking	223
12.5.3	De golfvergelijking	224
12.5.4	De Schrödingervergelijking	226
12.6	Niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen	226
13	Laplace en Poisson (elliptisch)	229
13.1	Inleiding	229
13.2	Een vergelijkingsprincipe	231
13.3	De fundamentele oplossing	235
13.3.1	De Newton-potentiaal	236
13.3.2	De fundamentele oplossing op een begrensd gebied	242
13.4	Greense functie	243
13.4.1	De Greense functie voor de halfruimte	246
13.4.2	De Greense functie voor de cirkel/bol	248
13.4.3	Existentie op een algemeen gebied	251
13.5	Eigenfuncties	252
14	Het diffusie-probleem (parabolisch)	255
14.1	Diffusie op het interval $[0, \ell]$	255
14.1.1	Het model	255
14.1.2	Formele oplossing	256
14.1.3	Convergentie van de reeks	257
14.1.4	Anti-diffusie	260
14.1.5	Eenduidige oplossing	262
14.2	Diffusie op begrensde gebieden in hogere dimensies	263
14.2.1	Een herschaling met twee aardappels	265
14.3	Diffusieproblemen op onbegrensde gebieden.	267
14.4	Diffusie met bronterm	272
15	De golfvergelijking (hyperbolisch)	277
15.1	Inleiding	277
15.2	Eenduidigheid op $[0, \ell]$	278
15.3	Existentie op $(-\infty, \infty)$	279
15.3.1	Enkele plaatjes bij oplossingen van de golfvergelijking.	280
15.4	Existentie op $[0, \ell]$	282
15.5	De drummer	285
16	Vergelijkingen uit de quantummechanica	291
16.1	De Schrödinger-vergelijking	291
16.2	De Hamilton-operator	292
16.3	Het eigenwaardeprobleem voor de Schrödinger-vergelijking	298
	Literatuur	307
	Index	309