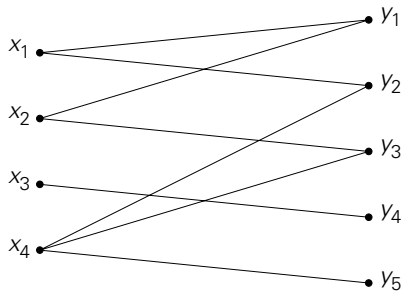


# 8 Matchingtheorie

## 8.1. Probleemstelling

In het kader van een bouwproject zijn er vijf karweien  $y_1, y_2, y_3, y_4$  en  $y_5$  te verrichten, waarvoor in principe vier werkkrachten  $x_1, x_2, x_3$  en  $x_4$  beschikbaar zijn. Echter is niet elke werkkracht gekwalificeerd voor elk karwei. Om precies te zijn,  $x_1$  is gekwalificeerd voor karwei  $y_1$  en  $y_2$ ,  $x_2$  voor  $y_1$  en  $y_3$ ,  $x_3$  alleen voor  $y_4$  en  $x_4$  voor  $y_2, y_3$  en  $y_5$ . De vraag doet zich nu voor of het mogelijk is om elke werkkraft een karwei toe te wijzen waarvoor hij gekwalificeerd is, en zo ja, hoe deze toewijzing dan moet gebeuren. Algemener zou men kunnen vragen naar het maximale aantal werkkrachten dat men (tegelijk) aan een karwei kan zetten waarvoor ze gekwalificeerd zijn.

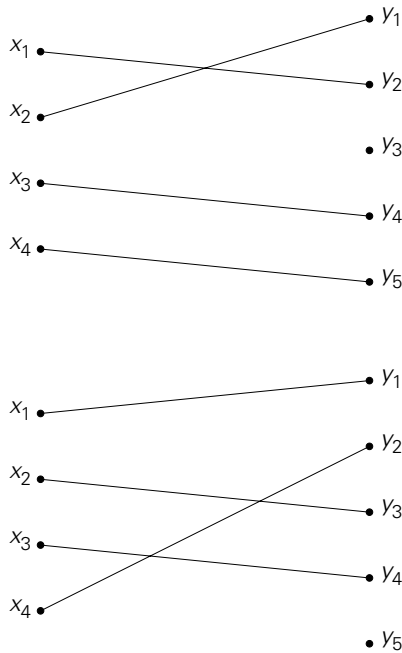
Om het probleem beter te kunnen overzien construeren we een bijbehorende graaf. De knopen van de graaf zijn  $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$  en  $y_5$ . Een knoop  $x_i$  is verbonden door een tak met een knoop  $y_j$  als werkkraft  $x_i$  gekwalificeerd is om karwei  $y_j$  te doen en anders niet. Tussen twee knopen van type  $x$  loopt géén tak en ook niet tussen twee knopen van type  $y$ . Er ontstaat zo de graaf van figuur 8.1.



Figuur 8.1.

Het probleem komt er nu op neer dat men een deelverzameling van de takken kiest, zodanig dat elke  $x$  met precies één  $y$  verbonden is en dat elke  $y$  met hoogstens één  $x$  verbonden is. Bij dit zeer eenvoudige voorbeeld presenteren zich ogenblikkelijk oplossingen, zoals die uit figuur 8.2.

Vanzelfsprekend zijn de gestelde vragen moeilijker te beantwoorden als het aantal werkkrachten en het aantal karweien groter is. Teneinde ook dan tot resultaten te komen zullen we een paar stellingen ontwikkelen die nauw samenhangen met de theorie uit Hoofdstukken 6 en 7.



Figuur 8.2.

Allereerst classificeren we het type graaf uit figuur 8.1.

#### Definitie 8.1

Een bipartiete graaf  $G$  is een graaf waarvan de knopenverzameling  $VG$  de vereniging is van twee disjuncte deelverzamelingen  $V_1$  en  $V_2$  ( $VG = V_1 \cup V_2$  en  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ) en waarvan elke tak een knoop van  $V_1$  verbindt met een knoop van  $V_2$ .

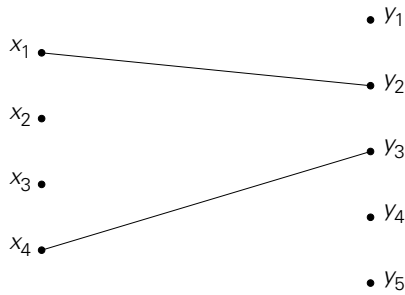
In figuur 8.1 is  $V_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  en  $V_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ . De grafen uit figuur 8.2 zijn ook bipartiet met dezelfde  $V_1$  en  $V_2$ . (Zie voor bipartiete grafen ook vraagstukken 5.11 en 5.12.)

#### Definitie 8.2

Een matching in een bipartiete graaf is een deelverzameling van de takken van die graaf zodanig dat er geen twee takken incident zijn met dezelfde knoop.

In figuur 8.2 waren twee matchings weergegeven van de bipartiete graaf uit figuur 8.1. In figuur 8.3 treft men ook een matching aan van dezelfde graaf. Let erop dat hier niet *alle* knopen  $x$  incident zijn met takken van de matching

Men kan ook zeggen dat een matching een één-éénduidige afbeelding is tussen een deelverzameling van  $V_1$  en een deelverzameling van  $V_2$ .



Figuur 8.3.

## 8.2. Volledige matching

We beginnen met de definitie van volledigheid van een matching.

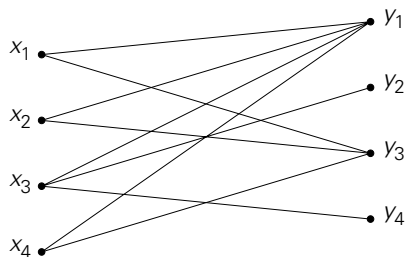
### Definitie 8.3

Een volledige matching in een bipartiete graaf is een matching, zodanig dat elke knoop van  $V_1$  incident is met een tak van de matching.

De matchings uit figuur 8.2 zijn volledig, die uit figuur 8.3 niet. Een volledige matching is een één-éénduidige afbeelding tussen  $V_1$  en een deelverzameling van  $V_2$ . Voor het bestaan van een volledige matching in een bipartiete graaf, waarvan  $VG$  gepartitioneerd is als  $VG = V_1 \cup V_2$ , is het in elk geval noodzakelijk dat  $|V_1| \leq |V_2|$ . Voldoende is dit echter niet, zoals Voorbeeld 8.1 aantoont.

### Voorbeeld 8.1

In figuur 8.4 is de bipartiete graaf gegeven met  $|V_1| = |V_2| = 4$ .



Figuur 8.4.

In een volledige matching is  $x_1$  of incident met de tak  $\{x_1, y_1\}$  of met  $\{x_1, y_3\}$ . Stel dat  $x_1$  incident is met  $\{x_1, y_1\}$ , dan moet  $x_2$  wel incident zijn met  $\{x_2, y_3\}$ . Echter is er dan geen tak meer mogelijk waarmee  $x_4$  incident is. Een soortgelijke redenering toont aan dat  $x_1$  ook niet met  $\{x_1, y_3\}$  incident kan zijn.

Er bestaat voor deze graaf dus geen volledige matching. We kunnen het niet-bestaan

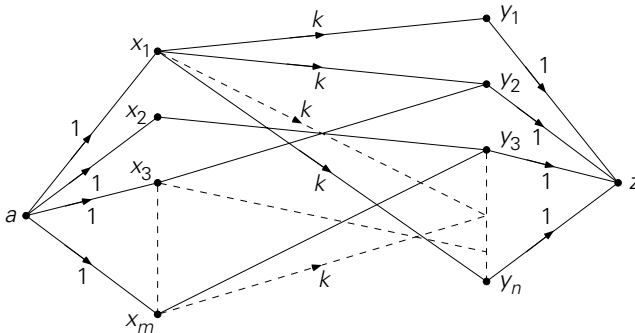
van een volledige matching in Voorbeeld 8.1 ook wel op een andere (zij het equivalente) manier begrijpen. Beschouw de knopen  $x_1, x_2$  en  $x_4$  en de daarmee incidenten takken. Deze takken zijn of met  $y_1$  of met  $y_3$  incident. We vatten deze knopen en takken samen op als een bipartiete graaf  $H$  met  $W_1 = \{x_1, x_2, x_4\}$  en  $W_2 = \{y_1, y_3\}$  als de knopendeelverzamelingen. Omdat  $|W_1| > |W_2|$  is bestaat er voor deze graaf  $H$  zeker geen volledige matching en dus ook niet voor de gehele graaf  $G$ . De volgende stelling generaliseert dit idee en geeft een nodige en voldoende voorwaarde voor het bestaan van een volledige matching.

**Stelling 8.4.** (P. Hall)

Laat  $G = (V, E)$  een bipartiete graaf zijn, met  $V$  gepartitioneerd als  $V = V_1 \cup V_2$ . Er bestaat een volledige matching van  $V_1$  in  $V_2$  dan en slechts dan als voor elke deelverzameling  $A \subseteq V_1$  geldt  $|A| \leq |R(A)|$ , waarbij  $R(A)$  de deelverzameling van  $V_2$  is bestaande uit die knopen die naburig zijn met de knopen van  $A$ .

*Bewijs*

Stel  $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  en  $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ . We construeren nu een transportnetwerk  $N$  dat bestaat uit de gegeven graaf  $G$  en twee extra knopen, de bron  $a$  en de put  $z$ , en met extra takken  $(a, x_i)$ ,  $1 \leq i \leq m$ , en  $(y_j, z)$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Bovendien zijn alle takken van  $G$  voorzien van een richting; in plaats van  $\{x_i, y_j\}$  hebben we nu  $(x_i, y_j)$ . Elke tak van de oorspronkelijke graaf  $G$  krijgt capaciteit  $k > |V_1|$  en elke nieuwe tak krijgt capaciteit 1. Aldus krijgen we een netwerk van het type als in figuur 8.5.



Figuur 8.5.

Wanneer er een volledige matching in  $G$  bestaat is er een mogelijke stroom van  $a$  naar  $z$  in  $N$ , met in elke tak  $(a, x_i)$  een stroomsterkte 1. Duidelijk is dat deze stroom maximaal is met waarde  $|V_1|$ . Is er omgekeerd in  $N$  een maximale stroom met waarde  $|V_1|$ , dan bestaat er in  $G$  een volledige matching.

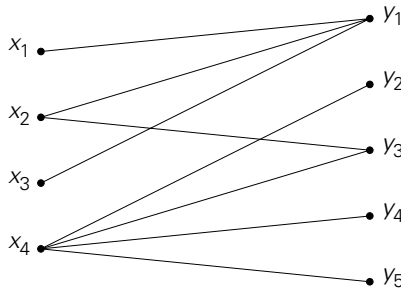
We zullen nu aantonen dat, als  $|A| \leq |R(A)|$  voor alle  $A \subseteq V_1$ , voor elke snede  $(P, \bar{P})$  van  $N$  geldt dat de capaciteit  $c(P, \bar{P}) \geq |V_1|$ . Aangezien er zeker een snede is met capaciteit gelijk aan  $|V_1|$  (alle takken die incident zijn met  $a$ ) volgt uit Stelling

6.9 dat de maximale stroom een waarde  $|V_1|$  heeft.

Neem  $A := \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ ,  $0 \leq i \leq m$ , eventueel na hernoemering van de knopen  $x$ . Neem eveneens  $B := \{y_1, y_2, \dots, y_j\}$ ,  $0 \leq j \leq n$ , ook eventueel na hernoemering van de knopen  $y$ . Definieer nu  $P := \{a\} \cup A \cup B$ , dan is dus  $\bar{P} = (V_1 - A) \cup (V_2 - B) \cup \{z\}$ . Als er een tak  $(x,y)$  is met  $x \in A$  en  $y \in V_2 - B$ , dan behoort deze tak tot de snede  $(P, \bar{P})$  en dus is dan  $c(P, \bar{P}) \geq k > |V_1|$ , wegens de keuze van het getal  $k$ . Is er niet zo'n tak dan is kennelijk  $R(A) \subseteq B$ , terwijl de snede  $(P, \bar{P})$  bestaat uit de takken van  $a$  naar  $V_1 - A$  en uit de takken van  $B$  naar  $z$ . Omdat elk van deze takken een capaciteit van 1 heeft, is  $c(P, \bar{P}) = |V_1 - A| + |B| = |V_1 - A| + |B| \geq |V_1| - |A| + |R(A)| \geq |V_1|$ . We mogen dus concluderen dat er in  $N$  een maximale stroom bestaat met waarde  $V_1$  ofwel dat er in  $G$  een volledige matching bestaat.

Stel omgekeerd dat  $A \subseteq X$  met  $|A| > |R(A)|$ . Laat  $(P, \bar{P})$  de snede in  $N$  zijn met  $P = \{a\} \cup A \cup R(A)$  en  $\bar{P} = (V_1 - A) \cup (V_2 - R(A)) \cup \{z\}$ . Net als boven volgt dan  $c(P, \bar{P}) = |V_1 - A| + |R(A)| = |V_1 - A| + R(A) < |V_1|$ . Dus volgt uit Stelling 6.9 dat de maximale stroom in  $N$  een waarde  $< |V_1|$  heeft, ofwel in  $G$  bestaat geen volledige matching. □

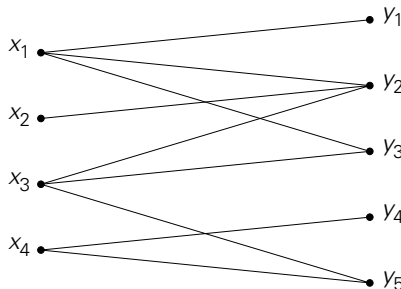
**Voorbeeld 8.2**



Figuur 8.6.

Neemt men in bipartiete graaf van figuur 8.6  $A = \{x_1, x_2, x_3\}$  dan is  $R(A) = \{y_1, y_3\}$  en dus is  $|A| > |R(A)|$ . Er zal dus géén volledige matching bestaan.

**Voorbeeld 8.3**



Figuur 8.7.

Voor  $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  is  $|A| = 4$  en  $|R(A)| = 5 \geq 4$ .

Voor  $A = \{x_1, x_2, x_3\}$  is  $|A| = 3$  en  $|R(A)| = 4 \geq 3$ .

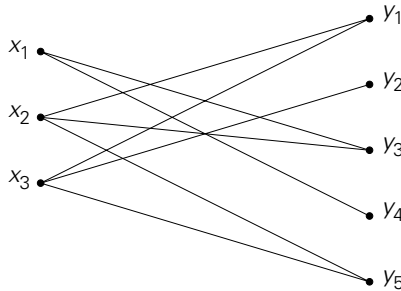
Voor  $A = \{x_1, x_2, x\}$  is  $|A| = 3$  en  $|R(A)| = 5 \geq 3$ .

Gaan we zo alle  $2^4$  deelverzamelingen  $A$  van  $V_1$  na, dan blijkt steeds  $|R(A)| \geq |A|$ .

Dus bestaat er een volledige matching.

#### Voorbeeld 8.4

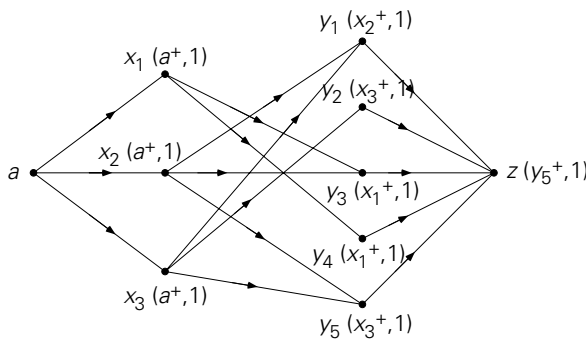
Vijf politici  $y_1, y_2, y_3, y_4$  en  $y_5$  zijn lid van een drietal commissies  $x_1, x_2$  en  $x_3$ . In de graaf van figuur 8.8 is te zien wie er precies van welke commissie lid is.



Figuur 8.8.

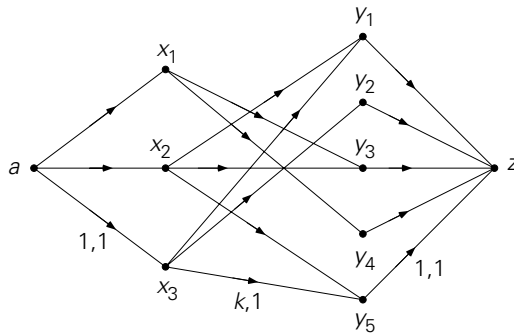
Voor een hoorzitting is het nodig dat elke commissie door een verschillend persoon wordt vertegenwoordigd. Is dit mogelijk en zo ja, hoe moeten de vertegenwoordigers dan gekozen worden?

Dat een vertegenwoordiging zoals gevraagd mogelijk is valt met Stelling 8.4 uit te maken. Om te bepalen wie er gekozen moeten worden passen we de labelingsprocedure toe.



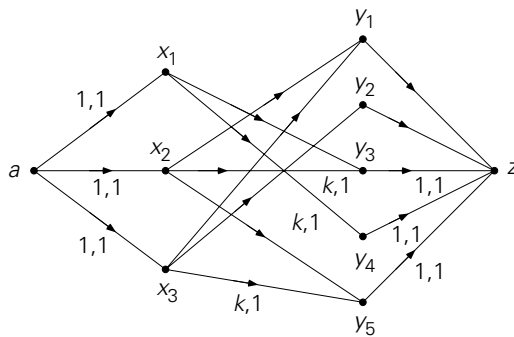
Figuur 8.9.

De takken uit  $a$  en naar  $z$  hebben capaciteit 1, alle andere hebben capaciteit  $k > |V_1|$ . Als beginstroom nemen we de stroom zoals aangegeven in figuur 8.10.



Figuur 8.10.

Alle takken waar geen labels bij staan hebben label 1,0 of  $k,0$ . Na nog twee keer de procedure toegepast te hebben vindt men een maximale stroom.



Figuur 8.11.

De volledige matching in de oorspronkelijke graaf bestaat dus uit de takken  $\{x_1, y_4\}$ ,  $\{x_2, y_3\}$  en  $\{x_3, y_5\}$ . Vanzelfsprekend had men deze matching in dit eenvoudige voorbeeld ook wel door ‘proberen’ kunnen vinden.

In Voorbeeld 8.3 bleek dat het toepassen van Stelling 8.4 zeer bewerkelijk kan zijn, omdat men in principe  $2^m$  deelverzamelingen  $A \subseteq V_1$  moet controleren als  $|A| = m$ . Soms kan men sneller te werk gaan. Zo geeft Stelling 8.5 een voldoende voorwaarde voor het bestaan van een volledige matching.

**Stelling 8.5**

Laat  $G = (V,E)$  een bipartiete graaf zijn, met  $V$  gepartitioneerd als  $V = V_1 \cup V_2$ . Er bestaat een volledige matching van  $V_1$  in  $V_2$  als voor één of ander positief geheel getal  $M$  geldt  $\rho(x) \geq M \geq \rho(y), \forall x \in V_1$  en  $\forall y \in V_2$ .

*Bewijs*

Uit een deelverzameling  $A \subseteq V_1$  gaan minstens  $M |A|$  takken naar  $V_2$ . Deze takken kunnen niet incident zijn met minder dan  $|A|$  knopen in  $V_2$ , want  $|A|$  knopen in  $V_2$  zijn hoogstens incident met  $M |A|$  takken en dus een kleiner aantal dan  $|A|$  knopen

met een nog kleiner aantal takken. Dus geldt  $|R(A)| \geq |A|$  en we kunnen Stelling 8.4 toepassen.  $\square$

#### Opmerking

De voorwaarde uit Stelling 8.5 is voldoende maar niet noodzakelijk voor het bestaan van een volledige matching. Met andere woorden, als er niet voldaan is aan de voorwaarde zou er toch nog wel een volledige matching kunnen bestaan.

#### Voorbeeld 8.5

Op een school zijn 500 leerlingen en wel 250 jongens en 250 meisjes. Elke jongen kent minstens 4 meisjes en elk meisje kent hoogstens 4 jongens. Is het mogelijk dat elke jongen naar het schoolbal gaat met een meisje dat hij kent en dat ook tegelijk elk meisje daar naar toe gaat met een jongen die zij kent?

We maken een bipartiete graaf met  $|V_1| = |V_2| = 250$ . Twee knopen worden verbonden door een tak als de betreffende jongen en het betreffende meisje elkaar kennen. Hierbij wordt er stilzwijgend (en niet onrealistisch) vanuit gegaan dat ‘kennen’ wederzijds kennen betekent. Stelling 8.5 geeft nu, met  $M = 4$ , onmiddellijk een bevestigend antwoord op de gestelde vraag.

#### Opmerking

Om deze reden wordt de voorwaarde uit Stelling 8.5 Hall’s Marriage Condition genoemd. Hall’s oorspronkelijke formulering was algemener (hoewel maatschappelijk gezien éézijdiger): als in een willekeurige groep van jongens en meisjes elke jongen minstens  $M$  meisjes kent en elk meisje hoogstens  $M$  jongens is het dan mogelijk dat elke *jongen* trouwt met een meisje dat hij kent? Uit Stelling 8.5 volgt dat ook hier het antwoord bevestigend is. Alleen als het aantal meisjes even groot is als het aantal jongens, zoals in het laatste voorbeeld krijgt de uitspraak een evenwichtiger aanzien. In dit geval kunnen de woorden minstens en hoogstens allebei vervangen worden door precies.

## 8.3. Maximale matching

Wanneer in een bipartiete graaf  $G$  geen volledige matching van  $V_1$  in  $V_2$  mogelijk is, kunnen we proberen een matching te vinden waarbij er *zoveel mogelijk* knopen uit  $V_1$  verbonden zijn met knopen uit  $V_2$ .

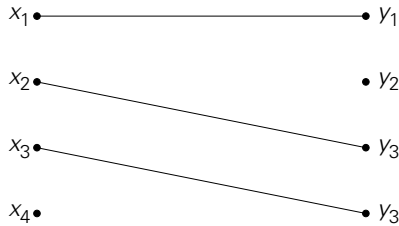
#### Definitie 8.6

Een maximale matching in een bipartiete graaf is een matching, zodanig dat het aantal knopen van  $V_1$  die incident zijn met een tak van de matching zo groot mogelijk is.

Evenmin als een volledige matching hoeft een maximale matching éénduidig te zijn.

**Voorbeeld 8.6**

De graaf uit Voorbeeld 8.1 bezit geen volledige matching zoals we zagen. In de matching van figuur 8.12 zijn drie van de vier knopen uit  $V_1$  incident met takken. Dus is deze matching maximaal.



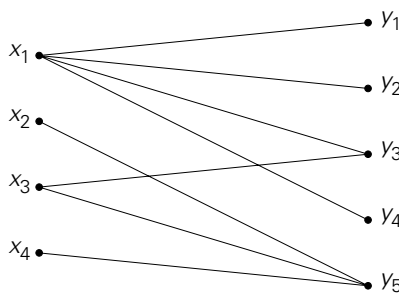
Figuur 8.12.

Om de grootte en de constructie van maximale matchings te onderzoeken voeren we het volgende begrip in.

**Definitie 8.7**

Laat  $G = (V, E)$  een bipartiete graaf zien met  $V$  gepartitioneerd als  $V = V_1 \cup V_2$ . Als  $A \subseteq V_1$ , dan is  $\delta(A) = |A| - |R(A)|$  de deficiëntie van  $A$ . De deficiëntie van  $G$  is gelijk aan  $\delta(G) = \max \{ \delta(A) \mid A \subseteq V_1 \}$ .

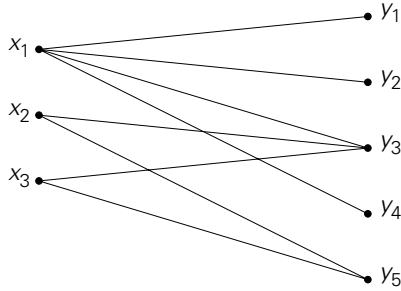
Er geldt voor elke bipartiete graaf  $G$  dat  $\delta(G) \geq 0$  is, want  $\delta(\emptyset) = 0$ . Als  $\delta(G) > 0$  is, is er een  $A \subseteq V_1$  met  $|A| > |R(A)|$ . Volgens Stelling 8.4 bezit  $G$  dan geen volledige matching.

**Voorbeeld 8.7**

Figuur 8.13.

Bovenstaande graaf heeft geen volledige matching. Voor  $A = \{x_2, x_3, x_4\}$  geldt  $R(A) = \{y_3, y_5\}$  en dus is  $\delta(A) = 3 - 2 = 1$  en  $\delta(G) \geq 1$ .

Verwijderen we nu knoop  $x_4$  en de takken incident met  $x_4$  dan ontstaat de graaf van figuur 8.14 die wèl een volledige matching bezit, zoals men ogenblikkelijk inziet.



Figuur 8.14.

**Stelling 8.8**

Laat  $G(V,E)$  een bipartiete graaf zijn, met  $V$  gepartitioneerd als  $V = V_1 \cup V_2$ . Een maximale matching van  $G$  is incident met  $|V_1| - \delta(G)$  knopen van  $V_1$ .

**Bewijs**

We gebruiken een transportnetwerk  $N$  zoals in het bewijs van Stelling 8.4. Analoog als in dat bewijs zullen we nu aantonen dat voor elke snede  $(P, \bar{P})$  geldt dat  $c(P, \bar{P}) \geq |V_1| - \delta(G)$ , en voorts dat er een snede bestaat waarvoor het gelijkteken in deze betrekking geldig is.

We definiëren weer  $P = \{a\} \cup A \cup B$ , met  $A \subseteq V_1$  en  $B \subseteq V_2$ .

Als er een tak  $(x,y)$  is met  $x \in A$  en  $y \in V_2 - B$ , dan behoort deze tak tot de snede  $(P, \bar{P})$  en dus is dan  $c(P, \bar{P}) \geq k > |V_1| - \delta(G)$ .

Is er niet zo'n tak, dan is  $R(A) \subseteq B$ , terwijl de snede  $(P, \bar{P})$  bestaat uit de takken van  $a$  naar  $V_1 - A$  en uit de takken van  $B$  naar  $z$ . Al deze takken hebben een capaciteit gelijk aan 1 en dus is  $c(P, \bar{P}) = |V_1 - A| + |B| = |V_1| - |A| + |B| \geq |V_1| - |A| + |R(A)| = |V_1| - \delta(A) \geq |V_1| - \delta(G)$ .

In alle gevallen geldt dus  $c(P, \bar{P}) \geq |V_1| - \delta(G)$ .

We zullen tenslotte laten zien dat er inderdaad een snede bestaat in  $N$ , waarvan de capaciteit gelijk is aan  $|V_1| - \delta(G)$ . We kiezen daartoe een  $A \subseteq V_1$  met  $\delta(A) = \delta(G)$ . Als nu  $B := R(A)$  gekozen wordt in het eerste deel van dit bewijs, dan zijn er geen takken tussen  $A$  en  $V_2 - B$ . Dus is  $c(P, \bar{P}) = |V_1 - A| + |R(A)| = |V_1| - |A| + |R(A)| = |V_1| - \delta(A) = |V_1| - \delta(G)$ .  $\square$

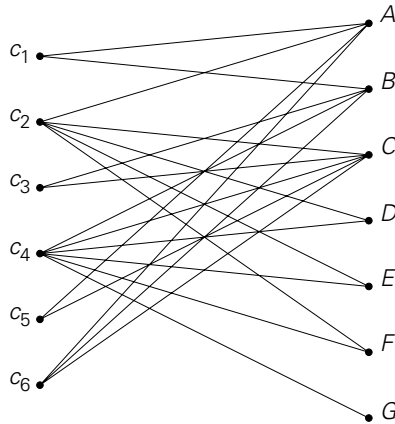
**Voorbeeld 8.8**

Een parlement heeft zes commissies geïnstalleerd met de volgende samenstellingen:  $c_1 = \{A, B\}$ ,  $c_2 = \{A, C, D, E, F\}$ ,  $c_3 = \{B, C\}$ ,  $c_4 = \{B, C, D, E, F, G\}$ ,  $c_5 = \{A, C\}$ ,  $c_6 = \{A, B, C\}$ .

In een of andere vergadering mag elke commissie door hoogstens één lid vertegenwoordigd zijn. Bovendien mag één persoon hoogstens één commissie vertegenwoordigen. De vraag is nu wat het grootst mogelijke aantal commissieleden is die aan de

vergadering deel kunnen nemen. Dit aantal is dus tevens het grootste mogelijke aantal commissies die in de bewuste vergadering vertegenwoordigd zijn.

We construeren een bipartiete graaf  $G$ , waarbij  $V_1$  de verzameling commissies is en  $V_2$  de verzameling personen die lid zijn van die commissies. Er is een tak  $\{x, y\}$  als persoon  $y$  lid is van commissie  $x$ .



*Figuur 8.15.*

Het doel is nu een maximale matching te bepalen van  $V_1$  in  $V_2$ .

Nemen we  $A = \{c_1, c_3, c_5, c_6\}$ , dan is  $R(A) = \{A, B, C\}$  en dus is  $\delta(A) = 4 - 3 = 1$ . Inspectie van alle andere deelverzamelingen van  $V_1$  leert dat er geen deelverzameling is met een grotere waarde van  $\delta$ . Dus is  $\delta(G) = 1$ . Uit Stelling 8.8 volgt dat het maximale aantal takken in een matching gelijk is aan  $6 - 1 = 5$ . Dus is het gevraagde aantal ook gelijk aan 5.

In de volgende twee voorbeelden is de precieze structuur van de bipartiete graaf niet bekend. Uit de onvolledige kennis die we van de graaf hebben kunnen we, zo blijkt, toch nog wel conclusies trekken omtrent het aantal takken in een maximale matching.

### Voorbeeld 8.9

Van een bipartiete graaf  $G = (V, E)$ , met partitionering  $V = V_1 \cup V_2$ , is bekend dat  $\rho(x) \geq 4$ ,  $\forall x \in V_1$  en dat  $\rho(y) \leq 5$ ,  $\forall y \in V_2$ . Voorts is nog gegeven dat  $|V_1| \leq 15$ . Men wil graag weten hoeveel takken er minstens in een maximale matching van  $V$  zullen zitten, hoe de graaf er verder ook uitziet.

We nemen een  $A \subseteq V_1$  ( $A \neq \emptyset$ ) en beschouwen alle takken uitgaande van  $A$ . Noem deze verzameling  $F$ , dus  $F = \{\{a, b\} \mid a \in A, b \in R(A)\}$ . Uit de gegevens volgt dat  $|F| \geq 4|A|$  en  $|F| \leq 5|R(A)|$ . Dus volgt dat  $4|A| \leq 5|R(A)|$  en  $\delta(A) = |A| - |R(A)| \leq |A| - \frac{4}{5}|A| = \frac{1}{5}|A|$ . Omdat  $A \subseteq V_1$  is ook  $|A| \leq 15$  en dus  $\delta(A) < \frac{1}{5} \cdot 15 = 3$ . Dit geldt voor alle  $A \subseteq V_1$ . Daarom is ook  $\delta(G) \leq 3$  en het aantal takken in een

maximale matching is minstens  $|V_1| - 3$ .

### Voorbeeld 8.10

Een groot constructiebedrijf moet een zeer omvangrijk project uitvoeren. Het project heeft 30 deelprojecten die aan onderaannemers zullen worden uitbesteed. Voor elke deelproject kunnen hoogstens 7 aannemers inschrijven. In totaal schrijven 50 aannemers in. Van hen zijn er 5 die op 10 deelprojecten inschrijven, 5 die op 8 projecten inschrijven en 20 op 3 projecten. De overige 20 schrijven op 2 projecten in. Om redenen die er hier niet toe doen worden er niet twee of meer projecten aan eenzelfde aannemer gegund. Wat is, onder bovengenoemde condities, het maximale aantal deelprojecten die tegelijk kunnen worden uitgevoerd?

Ook hier construeren we (denkbeeldig) een bipartiete graaf, met als  $V_1$  de verzameling onderaannemers en als  $V_2$  de deelprojecten. Er is een tak  $\{x,y\}$  als aannemer  $x$  heeft ingeschreven op project  $y$ . De vraag is dan hoeveel takken een maximale matching bezit. Evenmin als in het vorige voorbeeld zullen we deze vraag precies kunnen beantwoorden. Echter kunnen we wel weer een ondergrens bepalen voor het gevraagde aantal.

We nemen een verzameling  $A \subseteq V_1$  met  $n_1$  aannemers die op 10 projecten hebben ingeschreven,  $n_2$  op 8,  $n_3$  op 3 en  $n_4$  op 2 projecten. Dan is  $\delta(A) = |A| - |R(A)| = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - |R(A)|$ . Wegens de beperkte inschrijving per project geldt  $7|R(A)| \geq 10n_1 + 8n_2 + 3n_3 + 2n_4$ . Daarom is  $\delta(A) < (n_1 + n_2 + n_3 + n_4) - \frac{1}{7}(10n_1 + 8n_2 + 3n_3 + 2n_4) = -\frac{3}{7}n_1 - \frac{1}{7}n_2 + \frac{4}{7}n_3 + \frac{5}{7}n_4$ .

De deelverzameling  $A$  was willekeurig gekozen. De bovengrens voor  $\delta(A)$  is daarom maximaal als  $n_1 = n_2 = 0$ ,  $n_3 = 20$  en  $n_4 = 20$ . Dus is  $\delta(G) \leq (\frac{4}{7} + \frac{5}{7}) 20$  ofwel  $\delta(G) \leq 25$ . Het grootst mogelijke aantal deelprojecten die tegelijk kunnen worden uitgevoerd is daarom altijd minstens  $|V_1| - 25 = 50 - 25 = 25$ , hoe ook de inschrijvingen verdeeld zijn over de deelprojecten.

Met Stelling 8.8 zijn we in principe in staat om het aantal takken in een maximale matching in een bipartiete graaf te berekenen. Een volgende vraag, die erg voor de hand ligt, is welke takken er in een maximale matching zitten. Hiervoor bestaat een constructie die bekend staat als de *Hongaarse methode*. Om deze methode te beschrijven definiëren we eerst nog een paar begrippen voor een bipartiete graaf.

#### Definitie 8.9

Laat  $G = (V,E)$  een bipartiete graaf zijn, gepartitioneerd volgens  $V = V_1 \cup V_2$ . Laat verder  $M \subset E$  een matching van  $V_1$  in  $V_2$  zijn. Een knoop  $v \in V$  heet niet-verzadigd als  $M$  geen tak bevat incident met  $v$ . Een pad in  $G$  heet alternerend met betrekking tot  $M$  als het afwisselend takken van  $M$  en van  $E - M$  bevat.

De Hongaarse methode berust op de volgende eigenschap.

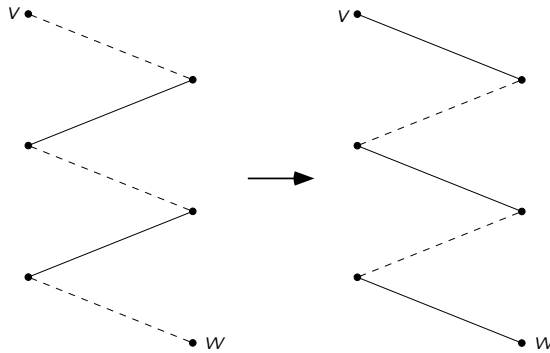
**Stelling 8.10**

Een matching in een bipartiete graaf  $G$  is niet maximaal dan en slechts dan als er een tweetal niet-verzadigde knopen is die via een alternerend pad met elkaar verbonden zijn.

**Bewijs**

Laat  $M$  een of andere matching zijn van  $V_1$  in  $V_2$ . Takken van  $M$  tekenen we in figuur 8.16 op de gewone wijze, takken van  $E - M$  geven we aan met stippellijnen.

(i) Veronderstel dat er een alternerend pad  $P$  is tussen de niet-verzadigde knopen  $v \in V_1$  en  $w \in V_2$ . Omdat  $v$  en  $w$  niet incident zijn met takken van  $M$  is de eerste en de laatste tak van  $P$  gestippeld. Het pad  $P$  is dus van oneven lengte en  $v$  en  $w$  liggen niet allebei in  $V_1$  of in  $V_2$ . Het aantal gestippelde takken in  $P$  is één groter dan het aantal niet-gestippelde takken. Laat de niet-gestippelde takken van  $P$  weg uit  $M$  en voeg aan  $M$  toe de gestippelde takken van  $P$ .



Figuur 8.16.

Omdat  $v$  en  $w$  niet-verzadigd waren, waren ze niet incident met takken van  $M$ . We krijgen daarom een nieuwe matching  $M'$  van  $V_1$  in  $V_2$  met  $|M'| = |M| + 1$ . De oorspronkelijke matching  $M$  was dus niet maximaal. De noodzakelijkheid van de conditie uit de stelling is hiermee aangetoond.

(ii) Stel nu dat er géén pad te vinden is, zoals omschreven in de stelling. Label alle niet-verzadigde knopen van  $V_1$ . Label vervolgens ook alle knopen in  $V_1$  en in  $V_2$  die via een alternerend pad verbonden zijn met een niet-verzadigde knoop van  $V_1$ .

We definiëren nu  $A$  als de verzameling van alle gelabelde knopen in  $V_1$ . De verzameling van alle gelabelde knopen in  $V_2$  is dan  $R(A)$ . Immers elke gelabelde knoop in  $V_2$  zit ook in  $R(A)$ , daar hij anders niet gelabeld zou zijn. Bovendien is *elke* knoop in  $R(A)$  gelabeld. Als  $(v,w)$  namelijk gestippeld is kan het alternerende pad van een niet-verzadigde knoop naar  $v$  uitgebreid worden met  $(v,w)$ , en als  $(v,w)$  niet gestippeld is, is  $(w,v)$  de laatste tak van een dergelijk pad.

We kunnen zelfs zeggen dat elke knoop in  $R(A)$  verzadigd is, anders zou er namelijk

een alternerend pad bestaan tussen twee niet-verzadigde knopen. Evenzo zijn de knopen van  $A$  die met een gestippelde tak zijn verbonden met een knoop van  $R(A)$  verzadigd.

We vinden dus dat  $\delta(A) := |A| - |R(A)|$  gelijk is aan het aantal niet-verzadigde knopen in  $A$  en dus in  $V$ . De niet gestippelde takken (dat zijn de takken van de gegeven matching  $M$ ) ‘matchen’ dus  $|V_1| - \delta(A)$  knopen van  $V_1$  met knopen van  $V_2$ . Omdat  $\delta(A) \leq \delta(G)$  is  $|V_1| - \delta(A) \geq |V_1| - \delta(G)$ . Uit Stelling 8.8 volgt dan  $|V_1| - \delta(A) = |V_1| - \delta(G)$  en  $M$  is dus een maximale matching.

De voorwaarde van de stelling is dus ook voldoende.  $\square$

Op grond van Stelling 8.10 kunnen we de volgende algoritme opstellen voor de constructie van een maximale matching.

1. Start met één of andere matching, bij voorkeur één met zoveel mogelijk takken.
2. Zoek een alternerend pad dat twee verschillende niet-verzadigde knopen  $v$  en  $w$  verbindt, met  $v \in V_1$  en  $w \in V_2$ .
3. Als zo'n pad gevonden is construeren we volgens de methode uit het bewijs een nieuwe matching die één tak meer bevat dan de vorige en gaan vervolgens door met regel 2.

Als zo'n pad niet bestaat, is de matching maximaal.

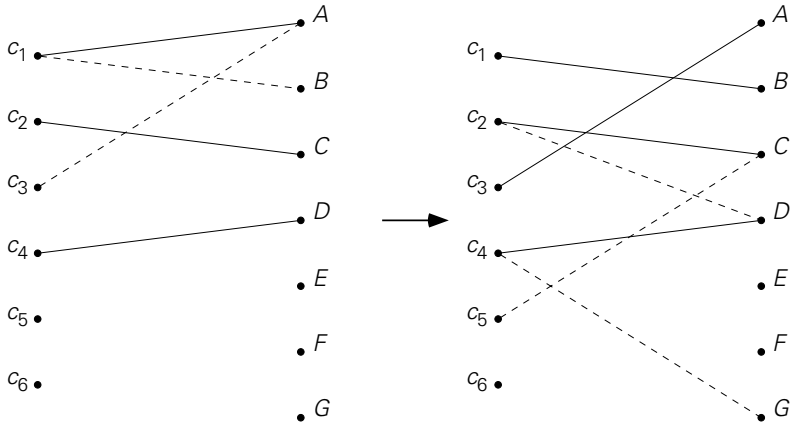
Regel 2 van deze algoritme geeft aanleiding tot een eindig zoekproces, omdat het aantal paren niet-verzadigde knopen eindig is en ook het aantal paden tussen de knopen van zo'n paar. Echter kan het systematisch zoeken in een ‘grote’ graaf nog wel lastig zijn. In dat geval moeten we voor dit zoekproces ook weer een aparte algoritme ontwerpen. Hierop gaan we niet verder in.

### Voorbeeld 8.11

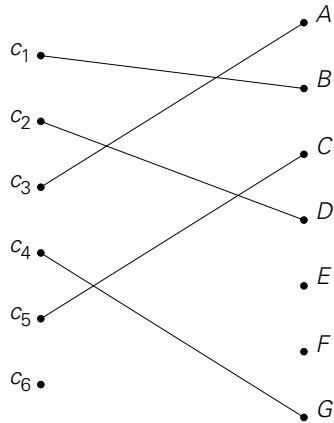
We passen de Hongaarse methode toe op de graaf uit Voorbeeld 8.8. Stel dat de beginmatching  $M_0$  bestaat uit de takken  $\{c_1, A\}$ ,  $\{c_2, C\}$  en  $\{c_4, D\}$ . Ten opzichte van deze matching zijn  $c_3 \in V_1$  en  $B \in V_2$  twee niet-verzadigde knopen. In figuur 8.17 is een alternerend pad  $P$  aangegeven tussen  $c_3$  en  $B$ . De enige tak van  $P$  die in de matching zit wordt weggelaten uit de matching en de beide andere takken worden toegevoegd. Zo ontstaat een nieuwe matching  $M_1$  met 4 takken (zie figuur 8.17).

Ten opzichte van de nieuwe matching zijn  $c_5$  en  $G$  twee niet-verzadigde knopen. Een alternerend pad tussen  $c_5$  en  $G$  is weer in de figuur aangegeven (we hadden ook het pad via  $D$  en  $c_4$  kunnen nemen). Door uit  $M_1$  de takken  $\{c_2, C\}$  en  $\{c_4, D\}$  te verwijderen en  $\{c_5, C\}$ ,  $\{c_2, D\}$  en  $\{c_4, G\}$  toe te voegen, ontstaan de matching  $M_2$ .

Hierin is het paar niet-verzadigde knopen  $c_6$  en  $E$  niet via een alternerend pad met elkaar te verbinden. Hetzelfde geldt voor het paar knopen  $c_6$  en  $F$ . Dus hebben we een maximale matching verkregen.



Figuur 8.17.



Figuur 8.18.