

Caleidoscoop van de Wiskunde

onder redactie van
A.W. Grootendorst
en A.J. van Zanten

CIP-gegevens Koninklijke Bibliotheek, Den Haag

Caleidoscoop

Caleidoscoop van de Wiskunde/ red.: A. W. Grootendorst, A.J. van Zanten. —

Delft: Delftse Universitaire Pers. — Ill. — Met lit. opg.

ISBN 90-407-1122-4 <http://www.vssd.nl/hlf/wiskunde.html>

NUGI 811

Uitg. in opdracht van Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft

© 1995 by the authors

Uitgegeven door:

Delftse Universitaire Pers

Stevinweg 1, 2628 CN Delft

tel. 015 - 783254, telefax 015 - 781661.

In opdracht van:

Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft

Poortlandplein 6, 2628 BM Delft

tel. 015 - 782124, telefax 015 - 787585.

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

ISBN 90-407-1122-4

Ten geleide

De bundel die voor u ligt bevat de teksten van de voordrachten die in het cursusjaar 1991/1992 zijn gehouden in het kader van de ‘caleidoscoop-serie’, een reeks voordrachten voor — in eerste instantie — wiskundestudenten aan de Technische Universiteit Delft over uiteenlopende onderwerpen uit de wiskunde, waarin een aantal boeiende facetten daarvan werden belicht.

De keuze van de onderwerpen werd geheel aan de sprekers overgelaten, zodat onderlinge samenhang nauwelijks aanwezig is (met uitzondering van de voordrachten 4 en 5 die door dezelfde spreker zijn gehouden). Het taalgebruik is evenmin gecoördineerd: ook hier prevaleerde de vrije keuze.

Het initiatief tot deze activiteit werd genomen door de Wiskunde en Informatica Studievereniging ‘Christiaan Huygens’, die daarvoor zeker een compliment verdient.

Tevens gaat onze dank uit naar de VSSD, die de uitgave van dit boekje ter hand nam, zoveel goede suggesties gaf en het in zo’n voortreffelijke vorm goot.

Nu deze voordrachten in de vorm van dit boekje in wijdere kring bekend worden, hopen wij dat de lezers er evenveel genoegen aan zullen beleven als de schrijvers bij het samenstellen ervan.

Delft, april 1995

De redacteuren
A.W. Grootendorst
A.J. van Zanten

Inhoud

TEN GELEIDE	5
HET VIERKLEURENPROBLEEM	9
J.M. Aarts	
Geschiedenis	9
Opzet van dit artikel	10
De Identiteit van Euler	15
De vijfkleurenstelling	18
Het vierkleurenprobleem	19
Referenties	21
KETTINGBREUKEN: EEN BINDENDE FACTOR	23
M.G. de Bruin	
Inleiding	23
1. De algoritme	23
2. Differentievergelijkingen	25
3. Produkten van matrices	26
4. Möbiustransformaties	28
5. C-Kettingbreuken	29
6. Nulpunten van polynomen	30
7. Slotopmerkingen	31
ONTBINDEN IN FACTOREN	33
H.J.A. Duparc	
DE MEETKUNDIGE ALGEBRA BIJ EUCLIDES EN DE OORSPRONG VAN DE TERMEN PARABOOL, HYPERBOOL EN ELLIPS	37
A.W. Grootendorst	
1. Oriëntatie in de tijd	37
2. De bronnen	39
3. De oorsprong van de meetkundige algebra bij de Grieken	41
4. Enkele eenvoudige stellingen uit de meetkundige algebra	43
5. Enkele opmerkingen over het probleem van het irrationale bij de Grieken	49
6. Drie problemen uit de meetkundige algebra	53
Literatuur	63
EUDOXUS EN DEDEKIND	65
A.W. Grootendorst	
1. Het irrationale in de Griekse wiskunde vóór Euclides	65

2.	Verhouding en evenredigheid van getallen bij Euclides: Eudoxus	69
3.	Verhouding en evenredigheid van grootheden bij Euclides: Eudoxus	71
4.	Het irrationale getal bij Dedekind	76
	Aantekeningen	83
	Literatuur	84
STOEIEN MET HILBERTMATRICES		87
J. Simonis		
	Momenten uit Hilberts leven	87
	Ein Beitrag zur Theorie des Legendre'schen Polynoms	87
	De polynoomruimte V_n	87
	Een stelling van Cauchy	88
	Een reeksontwikkeling	90
	Een schatting van $\ H_n\ $	90
	Een voorbeeld van slecht gedrag	92
	Literatuur	92
DE VIERDE DIMENSIE		95
Th.H.M. Smits		
1.	Ontstaan der quaternionen	95
2.	Rotaties in \mathbb{R}^3	96
3.	De 4-kwadratenstelling	98
4.	Oktaven	100
5.	Classificatie van algebra's	102
6.	Spin van het electron	104
7.	Het Leech-lattice	105
	Referenties	107
RAMSEY-THEORIE OF HET GEGENERALISEERDE DUIVENHOKPRINCIPE		109
A.J. van Zanten		
1.	Inleiding	109
2.	Eenvoudige voorbeelden	109
3.	Ramsey-getallen	111
4.	Een ongelijkheid voor Ramsey-getallen	113
5.	Bekende Ramsey-getallen	114
6.	Een Ramsey-spel	115
7.	Getallen van Van der Waerden	116
8.	De Folkman-constructie	118
OVER DE AUTEURS...		121
TREFWOORDENREGISTER		123

Het vierkleurenprobleem

J.M. Aarts

Geschiedenis

Aangezien de geschiedenis aanvangt met geschreven documenten, begint de geschiedenis van het vierkleurenprobleem in [1878]. In dat jaar vraagt Cayley in een artikel, aangeboden aan de London Mathematical Society, een bewijs voor de vierkleurenhypothese:

iedere landkaart kan met vier kleuren gekleurd worden en wel zó dat elk tweetal aan elkaar grenzende landen daarbij verschillende kleuren krijgt.

De mondelinge overlevering schrijft de formulering van de vierkleurenstelling toe aan professor DeMorgan, die haar in 1852 had geleerd van (jawel) zijn student Frederick Guthrie, die op zijn beurt weer pronkte met de wijsheid van zijn broer Francis Guthrie.

Al vrij snel kwamen er reacties op het artikel van Cayley. Bewijzen van de vierkleurenstelling werden gepubliceerd door Kempe in [1879] en door Tait in [1880]. Jammer genoeg kleefden er aan deze bewijzen enige onnauwkeurigheden. Dat werd aangetoond door respectievelijk Heawood in [1890] en Petersen in [1891]. Heawood liet men behulp van de door Kempe ontwikkelde methoden zien dat de volgende vijfkleurenstelling wel geldt:

iedere landkaart kan met vijf kleuren gekleurd worden zó dat aan elkaar grenzende landen daarbij verschillende kleuren krijgen.

Verder gaf Heawood als eerste oplossingen voor kleurproblemen op andere oppervlakken, zoals bijvoorbeeld de torus.

In de loop der jaren zijn er door vele onderzoekers inspanningen verricht om de vierkleurenhypothese te bewijzen dan wel te weerleggen. Het vierkleurenprobleem was (en is eigenlijk nog steeds) een van de grote onopgeloste problemen uit de wiskunde. Het onderzoek aan het vierkleurenprobleem heeft een enorme bijdrage geleverd aan de ontwikkeling van de grafentheorie.

In [1976] kondigden Appel en Haken aan dat zij er in geslaagd waren om met de hulp van de computer de vierkleurenstelling te bewijzen. De oplossing vergde meer dan duizend uren rekentijd. Het ging daarbij niet om het uitvoeren van ingewikkelde berekeningen, maar om het genereren van lijsten van alle mogelijke speciale gevallen die door de computer bekeken moesten worden. In elk van de gevallen — en dat zijn er ongeveer 2000 — is er weer veel rekentijd nodig om aan te tonen dat kleuring met

vier kleuren mogelijk is. We komen hier nog op terug. Al met al zijn we in een tamelijk onbevredigende situatie beland. Enerzijds is er een oplossing, maar er is geen mens die de oplossing kan controleren. Van een bewijs verwacht je, dat je het kan volgen, ja zelfs kan navertellen, zeg in een middag desnoods in een week. Het is echter al ondoenlijk om te controleren dat de lijst van alle te onderzoeken speciale gevallen inderdaad volledig is.

Opzet van dit artikel

De rest van dit artikel bestaat uit vier delen.

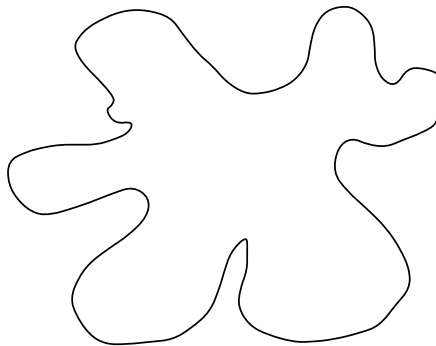
Eerst zullen we beschrijven wat we onder een kaart verstaan en het vierkleurenprobleem nauwkeurig beschrijven. Enkele reducties van het probleem worden besproken. Ook komen de beschrijving van het vierkleurenprobleem met behulp van grafentheorie en een equivalente formulering van het vierkleurenprobleem aan de orde.

In het tweede deel bespreken we de identiteit van Euler. Deze speelt een essentiële rol in het bewijs van de vier- en vijfkleurenstelling.

Het derde deel bevat een volledig bewijs van de vijfkleurenstelling. Wat hier aan de orde komt is van groot nut in het laatste deel waar we enkele aspecten van het bewijs van de vierkleurenstelling bewijzen.

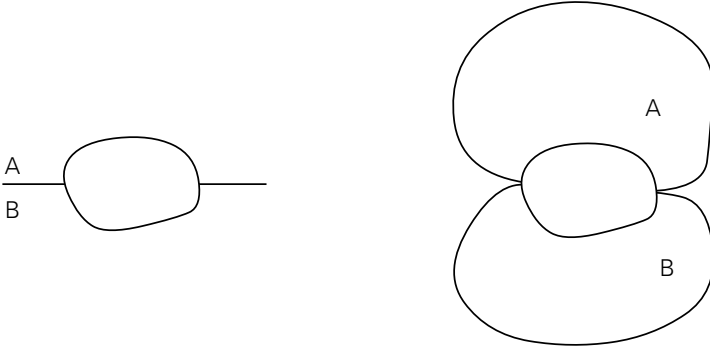
We beginnen met het beschrijven van kaarten in het vlak. Een *topologische cirkel* of *Jordankromme* in het vlak is het beeld van een gewone cirkel onder een bijectieve continue afbeelding. Zo'n topologische cirkel verdeelt het vlak in precies twee gebieden die elk de topologische cirkel tot rand hebben. (Een gebied is een open en samenhangende verzameling.) Dat lijkt evident, maar het is allerminst eenvoudig.

Het ligt besloten in de stelling van Jordan.



Laten nu eens eindig veel topologische cirkels in het vlak gegeven zijn. Zij verdelen het vlak in een aantal gebieden. Dat kunnen er wel eens oneindig veel zijn. Als het aantal gebieden waarin het vlak verdeeld wordt eindig is, dan spreken we van een *kaart*. Elk complementair gebied tezamen met zijn rand heet een *land*. Landen geven

we in het algemeen aan met hoofdletters. Een kaart lijkt natuurlijk erg veel op een gewone landkaart. Enkele opvallende verschillen zijn dat de zee ook als land wordt beschouwd, en dat eilanden en enclaves alle als aparte landen worden opgevat. Twee landen in een kaart *grenzen aan elkaar* of *zijn burens* als ze een Jordanboog (dit is het beeld van een gesloten interval onder een bijectieve continue afbeelding) gemeenschappelijk hebben; in dat geval heet de doorsnede van de landen de *grens*.

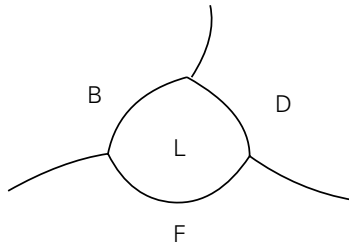


A en B grenzen aan elkaar

A en B grenzen niet aan elkaar

Een *kaart kleuren* met een zeker aantal kleuren wil zeggen: ieder land één van de kleuren geven en wel zó dat burens altijd verschillende kleuren krijgen. We noemen dit een *kleuring* van de kaart. Kleuren worden aangegeven met kleine letters.

Hoeveel kleuren zijn nu nodig om iedere kaart te kunnen kleuren? Met drie kleuren lukt het niet.

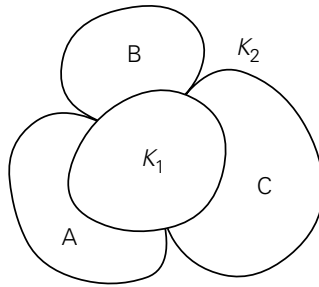


Het deel van de kaart van Europa waarin België, Frankrijk, Duitsland en Luxemburg liggen laat dat zien. Cayley's vraag was nu: toon aan dat iedere kaart met vier kleuren gekleurd kan worden.

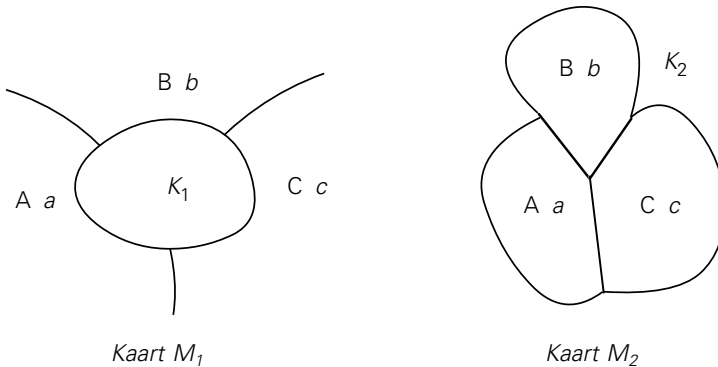
We maken nu enkele voorbereidende opmerkingen. De algemene aanpak van de kleurproblemen is een bewijs door volledige inductie. Om de delen van zo'n bewijs in elkaar te passen voert men het begrip *reducibele kaart* in. Men noemt een kaart *reducibel* wanneer er een methode is om de kleuring van die kaart te herleiden tot kleuringen van kaarten met minder landen. Het gaat hierbij om kleuringen met vier of vijf kleuren.

We illustreren dit aan de hand van enkele voorbeelden.

Bekijken we eerst de situatie uit de onderstaande figuur. De drie landen A, B en C vormen tezamen een verzameling waarvan het complement uit twee delen bestaat: die geven we aan met K_1 en K_2 . We zullen laten zien dat deze kaart reducibel is. In dit verband noemen we de *driering* A-B-C een *reducibele configuratie*; immers het feit dat de kaart reducibel is wordt veroorzaakt door de aanwezigheid van de driering A-B-C.

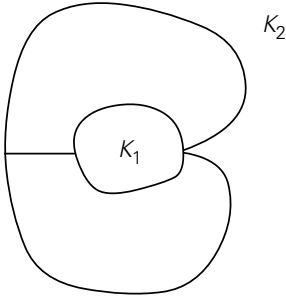


Hoe bewijzen we dat? We maken twee nieuwe kaarten M_1 en M_2 als volgt.

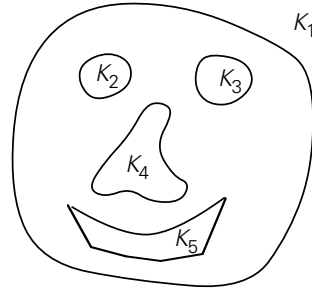


De kaarten M_1 en M_2 hebben minder landen dan de oorspronkelijke kaart. Als we aannemen dat M_1 en M_2 gekleurd kunnen worden, dan kunnen we het zó inrichten dat A, B en C in M_1 en M_2 dezelfde kleuren krijgen, zeg in deze volgorde a, b en c. Door de manier waarop we de kaarten gemaakt hebben zijn a, b en c noodzakelijkerwijs verschillende kleuren.

De kleuringen van M_1 en M_2 leveren op eenvoudige wijze een kleuring van de oorspronkelijke kaart op. Op dezelfde wijze toont men aan dat een twee- of éénring een reducibele configuratie is.



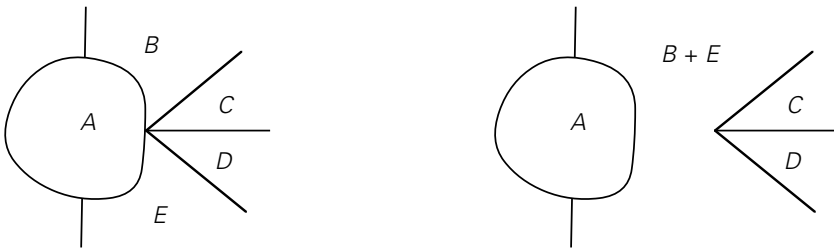
Een tweering



Een éénring

Een *hoekpunt* in een kaart is een punt dat tot drie of meer landen behoort. Het aantal landen waartoe een hoekpunt behoort heet de *orde* van het hoekpunt.

Stelling. Een kaart waarin een hoekpunt van orde groter dan drie voorkomt is reducibel. Anders gezegd: een hoekpunt van orde groter dan drie is een reducibele configuratie.



Bekijk de linker figuur. Daarin is een hoekpunt van orde groter dan drie. We weten al dat een één- en een tweering reducibele configuraties zijn. Als B en E hetzelfde land zijn of aan elkaar grenzen, dan hebben we te maken met een één- of een tweering en is de kaart op die gronden reducibel. We mogen dus aannemen dat B en E verschillend zijn en niet aan elkaar grenzen. Uit het laatste volgt dat B en E eenzelfde kleur mogen krijgen. We breken nu het hoekpunt open zoals geschetst in de rechter figuur. Deze nieuwe kaart heeft één land minder dan de oorspronkelijke. Een kleuring van de nieuwe kaart geeft meteen een kleuring van de oorspronkelijke kaart.

Definitie. We noemen een kaart *regulier* indien daarin geen één-, twee of driering voorkomen en indien ieder hoekpunt orde drie heeft.

Op grond van het voorgaande mogen we ons bij de behandeling van het vierkleurenprobleem en de vijfkleurenstelling beperken tot reguliere kaarten. De kleuring van de niet-reguliere kaarten kan immers afgeleid worden uit de kleuring van kaarten met minder landen. Merk op dat in een reguliere kaart iedere grens een Jordanboog is.

Voor we ons met ernstiger zaken gaan bezig houden noemen we nog twee dingen die weliswaar niet onbelangrijk zijn, maar door hun aard nog gerekend kunnen worden tot de recreatieve wiskunde.

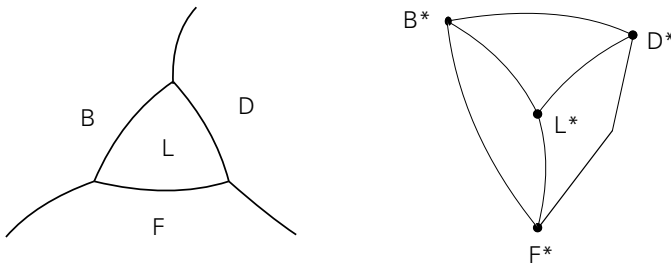
Stelling. Zij M een reguliere kaart. Dan kan M gekleurd worden met vier kleuren dan en slechts dan indien de grenzen van M met drie kleuren zó gekleurd kunnen worden dat in ieder hoekpunt drie verschillend gekleurde grenzen samenkomen.

Bewijs. We bewijzen één kant van de stelling. Voor de rest van het bewijs zie bijvoorbeeld Saaty en Kainen [1977]. Stel dat M gekleurd is met vier kleuren. We kleuren de grenzen volgens het volgende schema.

Kleuren aan weerszijde van de grens	Kleur grens
a-b of c-d	1
a-c of b-d	2
a-d of b-c	3

Men gaat eenvoudig na dat hiermee de gewenste kleuring van de grenzen verkregen wordt.

We merken nu op dat de grenzen van een reguliere kaart te samen met de hoekpunten opgevat kunnen worden als een vlakke graaf G . Dit is één verbinding tussen kleurproblemen en grafentheorie. Een andere verbinding verkrijgt men op de volgende wijze. Kies in ieder land een punt (de hoofdstad). Dit wordt een punt in de te vormen graaf. Twee punten in de te vormen graaf worden verbonden indien de corresponderende landen aan elkaar grenzen.



Op deze manier krijgen we een vlakke graaf G^* . Dit is de *duale graaf* van de bovengenoemde graaf G . In plaats van kaarten te kleuren kunnen we nu ook de punten in grafen kleuren en wel zó dat punten die verbonden zijn verschillende kleuren krijgen. In de taal van de grafentheorie luidt de vierkleurenstelling: het chromatisch getal van een vlakke graaf is kleiner dan of gelijk aan vier. Het laat zich raden wat het chromatisch getal is.

De Identiteit van Euler

Euler ontdekte dat er bij veelvlakken in de ruimte een eenvoudige relatie bestaat tussen het aantal vlakken, het aantal ribben en het aantal hoekpunten. Deze naar Euler genoemde relatie komt op verschillende plaatsen terug. Zij verwoordt in feite een diepliggende eigenschap van het vlak en het boloppervlak. We zullen hier een variant van de identiteit van Euler bespreken in de taal van de landkaarten.

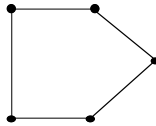
Stelling. Zij M een kaart zonder één- of tweering. Is H het aantal hoekpunten, G het aantal grenzen en L het aantal landen, dan geldt

$$H - G + L = 2.$$

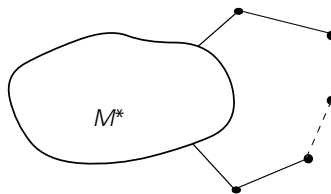
Deze relatie heet de *identiteit van Euler*.

Bewijs. We bewijzen de identiteit door een bewijs met volledige inductie. Omdat M geen éénring bevat kunnen we M ontstaan denken door met een willekeurig land van M te beginnen en er dan telkens één land aan toe te voegen en wel zó dat het toegevoegde land grenst aan een land uit het reeds gevormde deel. Omdat M geen tweering bevat bestaat de grens tussen landen uit precies één boog.

Zo ziet bijvoorbeeld het begin eruit. Het is een land met 5 grenzen en 5 hoekpunten. In M heeft dit land dus 5 burens. Voor deze partiële kaart klopt de identiteit van Euler. Er zijn 2 landen ($L = 2$), er zijn $G = H = 5$.



Nemen we aan dat we een gedeelte M^* van M reeds verkregen hebben en dat voor M^* de Identiteit van Euler geldt.



Toevoegen van een land aan M^* komt neer op het toevoegen van een aantal zeg a grenzen en $a - 1$ hoekpunten. (De hoekpunten van het toe te voegen land die in M^* liggen zijn daar reeds aanwezig). Het aantal landen vermeerdt met 1. Het totale effect op de som $H - G + L$ is 0.

De identiteit van Euler wordt dus niet verstoord door toevoeging van een nieuw land. Daarmee is het bewijs voltooid.

Met behulp van de identiteit van Euler zijn veel interessante eigenschappen af te leiden. Euler gebruikte de relatie om een volledige opsomming te geven van regelmatige en halfregelmatige veelvlakken. Daarover is in [1991] een heel aardig boekje verschenen van de hand van A.K. van der Vegt.

We zullen ons hier beperken tot toepassingen van de Identiteit die samenhangen met het vierkleurenprobleem. Een poging om de vierkleurenhypothese te weerleggen zou kunnen bestaan uit het maken van een kaart met vijf landen die twee aan twee aan elkaar grenzen. Bestaat zoiets? Laten we eens aannemen dat zo'n kaart bestaat. Voor zo'n kaart geldt dan $L = 5$.

Zo'n kaart kan géén tweering bevatten, want landen aan verschillende kanten van de tweering grenzen niet aan elkaar. Hieruit volgt dat de grens tussen twee landen uit precies één boog bestaat. Ieder land heeft 4 burens en dus vinden we $G = 10$ (ieder land heeft 4 grenzen, dat is 20 grenzen alles bij elkaar, maar iedere grens is twee keer geteld). In ieder hoekpunt komen tenminste drie grenzen samen en dus is $H \leq 20/3$ (iedere grens heeft twee hoekpunten). Omdat H geheel is, komt er $H \leq 6$. Vullen we dit in in de identiteit van Euler dan komt er

$$H - G + L \leq 6 - 10 + 5 = 1, \text{ en } 1 \text{ is niet gelijk aan } 2.$$

We zien dat de Euler Identiteit niet geldt. Tegenspraak.

Conclusie: er bestaat geen kaart van vijf landen die twee aan twee aan elkaar grenzen.

Terloops zij opgemerkt dat een soortgelijke redenering ook aangewend kan worden om te laten zien dat de 'utilities graph' niet ingebed kan worden in het vlak. Waar gaat het hier om?

Gegeven zijn drie huizen A, B en C en drie nutsbedrijven W (voor water), G (voor gas) en E (voor elektriciteit).

De vraag is nu: kunnen A, B en C elk op water, gas en elektriciteit worden aangesloten (elk verbonden worden met W, G en E) zó dat de gebruikte verbindingen in het vlak elkaar niet snijden. Het antwoord is nee. (Sterkte met de oplossing.)

Voortgaande met onze bespreking van toepassingen die samenhangen met het vierkleurenprobleem, laten we nu zien dat iedere reguliere kaart landen moet bevatten met 'weinig' burens.

Daartoe maken we een verfijning van de Identiteit van Euler.

Zij M een reguliere kaart. Het aantal landen in M met n burens geven we aan met L_n . Hierbij is $n \geq 3$, want in M zijn geen tweeringen. Ook bestaat de grens tussen twee landen uit precies één boog. Daarom krijgen we voor de kaart M het volgende.

Het aantal grenzen wordt $G = \frac{1}{2} \sum n L_n$. Hierbij is de sommatie over alle $n \geq 3$. Dat de formule klopt ziet men als volgt. Ieder land met n burens heeft n grenzen en er zijn dus alles bij elkaar $\sum n L_n$ grenzen. Iedere grens is hierbij twee keer geteld. Uit de opmerking dat iedere grens een boog is volgt voor het aantal hoekpunten:

$$H = \frac{2G}{3} = \frac{1}{3} \sum nL_n$$

Vullen wij dit alles in in de identiteit van Euler dan komt er

$$\frac{1}{3} \sum nL_n - \frac{1}{2} \sum nL_n + \sum L_n = 2$$

of na vermenigvuldiging met 6

$$\sum (6 - n)L_n = 12$$

hetgeen na herschikking leidt tot

$$3L_3 + 2L_4 + L_5 = 12 + L_7 + 2L_8 + \dots$$

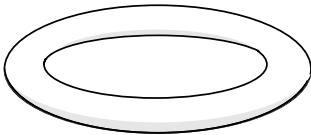
De getallen in het linkerlid geven de bijdragen van de landen met 3, 4 of 5 buren. Die bijdragen moeten in het totaal in ieder geval 12 of meer zijn. Dit komt omdat alle getallen L_k groter dan of gelijk aan nul zijn.

Een belangrijke consequentie van dit alles is:

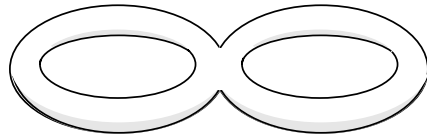
Stelling. Iedere reguliere kaart bevat tenminste één land met vijf of minder buren.

Dit zal voor ons bewijs van de vijfkleurenstelling voorlopig genoeg informatie blijken te zijn.

We sluiten onze beschouwingen over de identiteit van Euler af met een opmerking over kleurproblemen op andere oppervlakken dan de bol.



Torus



Dubbeltorus of krakeling

Men kan natuurlijk ook definiëren wat kaarten op andere oppervlakken zijn. Bij andere oppervlakken kan men bijvoorbeeld denken aan de torus of de krakeling. Met enig verstand van zaken kan men ook bij deze oppervlakken een relatie afleiden tussen het aantal landen (L), het aantal grenzen (G) en het aantal hoekpunten (H). Voor de torus vindt men $H + G + L = 0$ en voor de krakeling $H - G + L = -2$. In samenhang hiermee noemt men 2, 0 en -2 de *karakteristiek van Euler* van respectievelijk de bol (of ook het vlak), de torus en de krakeling. Met behulp van deze kennis bewees Heawood in [1890] dat iedere kaart op de torus met zeven kleuren gekleurd kan worden. Verder liet hij zien dat er een kaart op de torus gemaakt kan worden die bestaat uit zeven landen die twee aan twee aan elkaar grenzen. Zo'n kaart kan niet met minder dan zeven kleuren gekleurd worden.

Het boek van Ringel uit [1974] bevat een volledige behandeling van de kleur-

problemen van alle oppervlakken behalve de bol. Een interessant aspect is dat in 1974 alle kleurproblemen, behalve het vierkleurenprobleem, volledig opgelost waren.

De vijfkleurenstelling

We geven nu een bewijs van de vijfkleurenstelling.

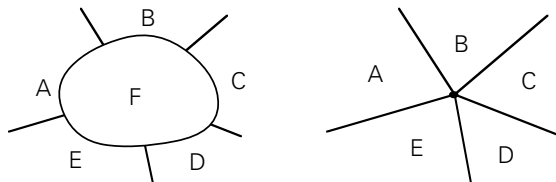
Stelling. Iedere landkaart kan met vijf kleuren gekleurd worden zó dat aan elkaar grenzende landen daarbij verschillende kleuren krijgen.

Bewijs. Het bewijs is met volledige inductie. Als de landkaart vijf of minder landen bevat, kan zij met vijf kleuren gekleurd worden.

Zij nu M een kaart met n landen, waarbij $n \geq 6$. We nemen aan dat iedere kaart met minder dan n landen met vijf kleuren gekleurd kan worden. Dit is de inductieveronderstelling.

We mogen aannemen dat M regulier is. In het andere geval immers bevat M reducibele configuraties en kan de kleuring van M herleid worden tot de kleuring van kaarten met minder dan n landen. En kaarten met minder dan n landen kunnen gekleurd worden volgens de inductieveronderstelling.

Met de identiteit van Euler hebben we afgeleid dat M een land bevat met vijf of minder burens. Zij F zo'n land.



We vormen nu een nieuwe kaart M' door het land F tot één punt samen te trekken. Volgens de inductieveronderstelling kan M' met vijf kleuren gekleurd worden. De kleuring van M' brengen we over naar M . Als hierbij voor de kleuring van A t/m E maar vier (of minder) kleuren gebruikt worden, dan kan de vijfde kleur gebruikt worden voor F .

We moeten dus nog bekijken het geval dat voor de kleuring van A t/m E vijf kleuren nodig zijn. Zij A gekleurd met a , B met b , C met c , D met d en tenslotte E met e .

We proberen nu de kleur van C te veranderen van c in a . Daarbij maken we gebruik van het door Kempe in [1879] ingevoerde begrip keten. Als een kaart gedeeltelijk gekleurd is, dan heten twee landen X en Y verbonden door een (x,y) -keten, indien er een rij landen bestaat, opeenvolgend gekleurd met x en y , zó dat het eerste land uit de rij X is, het laatste Y , terwijl ieder land uit de rij grenst aan zijn opvolger in de rij.

Zoals gezegd proberen we de kleur van C te veranderen van c in a . Daartoe beschouwen we alle landen die met C verbonden zijn met een (a,c) -keten. We onderscheiden

twee gevallen:

1. A en C zijn niet verbonden door een (a,c) -keten.
2. A en C zijn wel verbonden door een (a,c) -keten.

In het eerste geval beschouwen we alle landen die met C verbonden zijn door een (a,c) -keten. In dit geval behoort A hier niet toe. We gaan bij deze landen de kleuren a en c verwisselen. Hierdoor krijgen we eveneens een kleuring van M met uitzondering van F. Voor de burens van F hebben we nu de kleuring A met a , B met b , C met a , D met d en E met e . We kunnen nu F kleuren met c .

In het tweede geval bekijken we de (a,c) -keten die C met A verbindt tezamen met F. De ring R die zo gevormd wordt verdeelt het vlak in twee delen. We kunnen nu een variant toepassen van de redenering van het eerste geval. Beschouw alle landen die met D verbonden zijn door een (b,d) -keten. B kan daar niet bij zijn, omdat een (b,d) -keten de ring R niet kan kruisen.

We kunnen dus bij D en alle landen, die met D door een (b,d) -keten verbonden zijn de kleuren b en d verwisselen (B is daar niet bij) en F kleuren met d .

Hiermee is het bewijs voltooid.

Het vierkleurenprobleem

Voor een bewijs van de vierkleurenstelling kunnen we veel van het voorgaande gebruiken. Zo'n bewijs gebruikt de methode van volledige inductie. Net zoals bij het bewijs van de vijfkleurenstelling mogen we aannemen dat de te kleuren kaart M regulier is. In M is er dan een land met drie, vier of vijf burens.

Een land met drie burens is omgeven door een driering en vormt zoals we eerder gezien hebben een reducibele configuratie. Een kaart met een land met vier burens kan net zo behandeld worden als de kaart met een land met vijf burens in het bewijs van de vijfkleurenstelling. Zo vindt men een bewijs voor het volgende lemma.

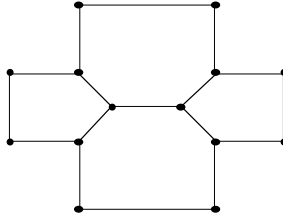
Lemma. Een land met vier burens is een reducibele configuratie.

Op grond van dit lemma mogen we bij het bewijs van de vierkleurenstelling aannemen dat M geen enkel land bevat met minder dan vijf burens.

Met de eerder ingevoerde notatie krijgen we voor M :

$$L_5 = 12 + \sum_{n \geq 7} (n - 6)L_n \quad (*)$$

We zien dat er minstens 12 landen zijn met vijf burens. Jammer genoeg is nog niemand in staat geweest om te bewijzen dat een land met vijf burens reducibel is.



In [1913] bewees Birkhoff onder andere dat een groep van vier landen met vijf burens gerangschikt als in de figuur wel een reducibele configuratie is. Maar we kunnen niet bewijzen dat er altijd zo'n configuratie aanwezig is. Het probleem waarvoor we ons gesteld zien is tweeledig.

Ten eerste moeten we proberen het aantal reducibele configuraties op te voeren en ten tweede moeten we proberen de Identiteit van Euler zo te gebruiken dat we kunnen laten zien dat meer en meer configuraties moeten voorkomen in een kaart en wel die configuraties waarvan is aangetoond dat ze reducibel zijn. Volgens Appel en Haken was Heesch een van de weinige wiskundigen die geloofden dat langs deze lijnen een oplossing van het vierkleurenprobleem gevonden kon worden.

Tot besluit van onze opmerkingen over het bewijs van de vierkleurenstelling lichten we een methode toe die door Heesch is ontwikkeld om vast te stellen dat bepaalde configuraties in een kaart moeten voorkomen. De methode heet die van de *ladingsverschuiving*.

We lichten de methode toe aan de hand van een propositie.

Propositie. Iedere reguliere kaart waarin ieder land vijf of meer burens heeft bevat een tweetal landen die burens zijn van elkaar en waarbij één land van het paar vijf burens heeft, terwijl het andere land hoogstens zes burens heeft.

Bewijs. We herschrijven de formule (*) als

$$L_5 + \sum_{n \geq 7} (6 - n)L_n = 12$$

We kunnen de formule als volgt interpreteren. Geven we ieder land met vijf burens een lading +1, ieder land met zes burens een lading 0 en ieder land met n burens, waarbij $n \geq 7$, een lading $6 - n$ dan zegt de formule dat de som van alle ladingen +12 is. We schuiven nu de lading van een land met vijf burens weg naar zijn burens, een lading $+1/5$ naar elk van zijn burens. De totale lading verandert hierbij niet. Na de ladingsverschuiving moet er dus een land B met positieve lading zijn.

- Neem eens aan dat B vijf burens heeft. Dan heeft B lading van zijn burens ontvangen. Immers alle lading van B was weggeschoven. Dat betekent dat een buur van B eveneens vijf burens heeft. Er is dus een paar van twee buurlanden waarvan elk land vijf burens heeft.

- Neem eens aan dat B zes burens heeft. Dan had B geen lading voor de ladingsverschuiving en erna wel. Dat betekent de aanwezigheid van een paar bestaande uit een land met vijf burens en een land met zes burens.
- Neem eens aan dat B zeven burens heeft. Dan had B een lading -1 . Om positieve lading te krijgen moet B tenminste zes burens hebben die elk $1/5$ lading afstaan aan B. Van die zes burens grenzen er altijd twee aan elkaar. Dit geeft een configuratie als in het eerst beschouwde geval.
- We weten dat een land met n burens waarbij $n \geq 8$ een lading heeft die gelijk is aan $6 - n$.

De totale lading die zo'n land kan ontvangen is gelijk aan $n/5$. Omdat $n/5 > n - 6$ alleen oplossingen heeft voor $n \leq 7$ zien we dat een land met acht of meer burens bij bovengenoemde ladingsverschuiving nooit een positieve lading kan krijgen.

Hiermee hebben we alle gevallen die op kunnen treden geanalyseerd en is het bewijs van de propositie voltooid.

Appel en Haken hebben, de methode van Heesch volgend, met behulp van de computer een lijst van ongeveer 2000 configuraties gegenereerd met de eigenschap dat iedere kaart tenminste één van deze configuraties moet bevatten.

Vervolgens hebben zij, weer met behulp van de computer, aangetoond dat elk van deze configuraties reducibel is.

Zij hebben hiervan uitvoerig verslag gedaan in [1989].

Referenties

Appel K.I. en W. Haken

[1976] *Every planar map is four colorable*, Bull.Am. Math. Soc. **82**, 711-712

[1989] *Every planar map is four colorable*, Contemporary Mathematics, Vol. 98, xiii + 741 p. American Math. Soc, Providence (R.I.)

Birkhoff, G.D.

[1913] *The reducibility of maps*, Amer. J. Math. **35**, 115-128

Cayley, A.

[1878] *On the colouring of maps*, Proc. London Math. Soc. **9**, 148

Heawood, P.J.

[1890] *Map colour theorem*, Quarterly J. Pure and Appl. Math. **24**, 332-338

Kempe, A.B.

[1879] *On the geographical problem of the four colours*, Amer. J. Math. **2**, 193-200

Petersen, J.

[1891] *Die Theorie der regulären Graphen*, Acta Math. **15**, 193-220

Ringel, G.

[1974] *Map Color Theorem*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 209, Springer, Berlin

Saaty, T.L. and P.C. Kainen

[1986] *The four-color problem*, Dover New York (first print 1977 by McGraw-Hill)

Tait, P.G.

[1880] *Note on a theorem in geometry of position*, Trans. Royal Soc. Edinburgh, **29**, 657-660

Vegt, A.K. van der

[1991] *Regelmaat in de ruimte*, DUM, Delft.

Stoeien met Hilbertmatrices

J. Simonis

Momenten uit Hilberts leven

- 1862 Geboren in Königsberg, Oost-Pruisen (tegenwoordig Kaliningrad).
- 1886 Privatdozent (soort onbetaalde academische betrekking) in Königsberg.
- 1888 De invariantentheorie vermoord, Hilberts reputatie gevestigd.
- 1894 “Ein Beitrag ...” (het onderwerp van deze voordracht).
- 1895 Hoogleraar in Göttingen, het toenmalige centrum van de wiskundige wereld.
- 1900 De 23 problemen van Hilbert.
- 1943 Overleden in Göttingen op (1943-1862)-jarige leeftijd.

Ein Beitrag zur Theorie des Legendre’schen Polynoms

Probleem: kies een vast getal n en bekijk alle polynomen $f(x) := \sum_{i=1}^n a_i x^{i-1}$ met geheeltallige coëfficiënten a_i . Voor welk $f(x)$ heeft de integraal

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx$$

de kleinste van nul verschillende waarde?

Essentiële stap:

Het berekenen van de $n \times n$ -determinant

$$|H_n| := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

(In het hele artikel komt *geen* matrix voor.)

De polynoomruimte V_n

In traditionele lineaire-algebraboeken bestrijdt men de misvatting dat de \mathbb{R}^n de enige

vectorruimten zijn met het volgende voorbeeld:

De verzameling V_n van de reële polynomen van graad $< n$ is een n -dimensionale *vectorruimte* als we V_n voorzien van de voor de hand liggende optelling en scalaire vermenigvuldiging:

$$\sum_{i=1}^n a_i x^{i-1} + \sum_{i=1}^n b_i x^{i-1} := \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) x^{i-1}$$

en

$$c \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i x^{i-1} \right) := \sum_{i=1}^n c \cdot a_i x^{i-1}.$$

Als *inwendig produkt* op V_n kiest men dan gewoonlijk

$$\langle f(x), g(x) \rangle := \int_0^1 f(x)g(x) \, dx,$$

wat bij de studenten grote verbazing wekt.

Wegens de bilineariteit van het inwendig produkt is het voldoende de onderlinge inwendige produkten van een stel basisvectoren te kennen. We nemen hiervoor $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$:

$$\langle x^{i-1}, x^{j-1} \rangle = \int_0^1 x^{i+j-2} \, dx = \frac{1}{i+j-1} := h_{i,j}.$$

Dus het inproduct van twee ‘vectoren’ $f(x) := \sum_{i=1}^n a_i x^{i-1}$ en $g(x) := \sum_{i=1}^n a_i x^{i-1}$ wordt gegeven door

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \sum_{i,j} a_i h_{i,j} b_j = \mathbf{a}^T H_n \mathbf{b}$$

waarbij $\mathbf{a}^T := [a_1, a_2, \dots, a_n]$, $\mathbf{b}^T := [b_1, b_2, \dots, b_n]$ en $H_n := [h_{i,j}]$ (de *Hilbertmatrix* van orde n).

Uit de eigenschappen van het inwendig produkt volgt dat H_n *symmetrisch* en *positief-definiet* is. Alle eigenwaarden van H_n zijn dus reëel en positief.

Een stelling van Cauchy

Voor kleine waarden van n levert een programma als DERIVE de volgende resultaten:

$$H_2^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}, H_3^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}, H_4^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{bmatrix}$$

wat suggereert dat alle inversen H_n^{-1} geheeltallig zijn.

Zoals zo vaak in de wiskunde kunnen we de zaak vereenvoudigen door te *generaliseren*. In feite heeft Cauchy al het werk al voor ons gedaan:

Stelling:

$$\det \left(\left[\frac{1}{a_i+b_j} \right]_{i,j=1\dots n} \right) = \frac{\prod_{i,j}(a_i-a_j) \cdot (b_i-b_j)}{\prod_{i,j}(a_i+b_j)}$$

Bewijs

Op de manier van Cauchy bekijken we het voorbeeld $n = 3$:

Trek de derde rij van de eerste en tweede af. Wegens betrekkingen als

$$\frac{1}{a_1+b_1} - \frac{1}{a_3+b_1} = \frac{(a_3-a_1)}{(a_1+b_1) \cdot (a_3+b_1)}$$

kunnen we de factor

$$\frac{(a_3-a_1) \cdot (a_3-a_2)}{(a_3+b_1) \cdot (a_3+b_2) \cdot (a_3+b_3)}$$

uit de determinant halen. Over blijft de determinant

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \frac{1}{a_1+b_3} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \frac{1}{a_2+b_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Trek nu de derde kolom van de eerste en tweede af. Na het verwijderen van de factor

$$\frac{(b_3-b_1) \cdot (b_3-b_2)}{(a_1+b_3) \cdot (a_2+b_3)}$$

blijft de determinant

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & 1 \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} \end{bmatrix}$$

over. De recursie is nu duidelijk.

Gevolg:

Kiezen we $a_i = i$ en $b_j = j - 1$, dan vinden we een formule voor de determinant van de

Hilbertmatrix:

$$\det(H_n) = \frac{\{1!2!\dots(n-1)!\}^4}{1!2!\dots(2n-1)!}.$$

op vergelijkbare wijze zijn de cofactoren, en dus de inverse, van H_n te berekenen. Inderdaad is H_n^{-1} geheeltallig.

Een reeksontwikkeling

We beginnen met de machtreeksontwikkeling

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad (|x| < 1)$$

en vullen voor x de waarde:

$$x := \frac{(i-1) \cdot (j-1)}{i \cdot j}$$

in. dit levert

$$\frac{1}{i+j-1} = \frac{1}{i \cdot j \cdot (1-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i-1)^k}{i^{k+1}} \cdot \frac{(j-1)^k}{j^{k+1}}.$$

We kunnen nu H_n schrijven als een oneindige som van matrices van rang 1:

$$H_n = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{v}_k (\mathbf{v}_k)^T,$$

met (beschouwd als kolomvector):

$$\mathbf{v}_k := \left[\frac{(i-1)^k}{i^{k+1}} \right]_{i=1, \dots, n}.$$

Hieraan zien we weer dat H_n positief-definiet is.

Voorbeeld

$$H_3 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{8} \\ \frac{4}{27} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} & \frac{2}{27} \end{bmatrix} + \dots$$

we kunnen nu breuken als oneindige sommen van kwadraten schrijven, b.v.

$$\frac{1}{5} = \left[\frac{1}{3} \right]^2 + \left[\frac{2}{9} \right]^2 + \left[\frac{4}{27} \right]^2 + \dots$$

(maar waarom zouden we).

Een schatting van $\|H_n\|$

We nemen als definitie van de norm:

$$\|H_n\| := \sup \frac{\|H_n \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

In ons geval is $\|H_n\|$ dan gelijk aan λ_{\max} , de grootste eigenwaarde van H_n .

Het programma MATLAB levert de volgende waarden

$n = 2$	$\ H_n\ = 1,2676$
4	1,5002
8	1,6959
16	1,8600
32	1,9984
64	2,1161
90	2,1676

Het geoefende wiskundige oog ziet hier onmiddellijk convergentie naar π , en inderdaad is hiervoor in het boek ‘Inequalities’ van Hardy, Littlewood en Pólya een bewijs te vinden. We laten nu zien dat $\|H_n\| < 4$ voor alle n . (Het idee is van Man-Duen Choi, [2].)

Daartoe bekijken we de matrices

$$L_n := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

die sterk op Hilbertmatrices lijken, maar in feite veel eenvoudiger zijn. Zo hebben ze de Cholesky-decompositie $L_n = C_n(C_n)^T$, met

$$C_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

(het benedendriehoeksdeel van L_n).

Aangezien

$$(L_n)_{i,j} \geq (H_n)_{i,j} \geq 0 \quad \text{voor alle } i, j, n$$

geldt:

$$\|L_n\| \geq \|H_n\| \quad \text{voor alle } n.$$

Merk nu op dat de diagonaalmatrix

$$I - (C - i)(C^T - I) = C + C^T - L$$

positief is.

Uit

$$\|C - I\|^2 = \|(C - I)(C^T - I)\| \leq 1.$$

volgt dat

$$\|C\| \leq \|I\| + \|C - I\| \leq 2$$

en

$$\|H_n\| \leq \|L\| = \|CC^T\| = \|C\|^2 \leq 4.$$

Een voorbeeld van slecht gedrag

De Hilbertmatrices H_n zijn berucht om haar extreem hoge conditiegetal, en worden daarom vaak gebruikt om, numerieke methoden te testen. Voor $n = 3$ heeft Steven Weintraub in de ‘Mathematical Monthly’ een aardig voorbeeld geconstrueerd:

Het stelsel

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{13}{12} \\ \frac{47}{60} \end{bmatrix} \left(= \begin{bmatrix} 1,8333\dots \\ 1,0833\dots \\ 0,7833\dots \end{bmatrix} \right)$$

heeft de exacte oplossing $[1 \ 1 \ 1]^T$, terwijl het stelsel

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1,80 \\ 1,10 \\ 0,78 \end{bmatrix}$$

de exacte oplossing $[0 \ 6 \ -3,6]^T$ heeft. De rechterleden verschillen ongeveer 1,7%,

terwijl de oplossingen een kleine 400% verschillen!

Literatuur

1. A.L. CAUCHY, *Mémoire sur les fonctions alternées et sur les sommes alternées*, Exercices d'analyse et de phys. math., ii. pp. 151-159 (1841).
1. M.-D. CHOI, *Tricks or treats with the Hilbert Matrix*, Amer. Math. Monthly 90 (1983).
2. G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD and G. PÓLYA, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge (1976).
3. H. FREUDENTHAL, *Hilbert*, Dictionary of Scientific Biography, Vol. 5, Scribners, New York (1981).
4. D. HILBERT, *Ein Beitrag zur Theorie des Legendre'schen Polynoms*, Acta Mathematica 18 (1894).
5. T. MUIR, *A treatise on the theory of determinants*, Dover, New York (1960).
6. C. REID, *Hilbert*, Springer-Verlag, Berlin etc. (1970).
7. S. WEINTRAUB, *Letter to the editor: 'Tricks or treats with the Hilbert Matrix'*, Amer. Math. Monthly 93 (1986).