Een van de vele fraaie opstellen over wiskunde, die prof. A.W. Grootendorst schreef, is het hiernavolgende over Eudoxus en Dedekind. Het artikel, de weergave van een voordracht, staat in de VSSD-uitgave Caleidoscoop van de Wiskunde (ISBN 90-407-1122-4), een bundel met boeiende opstellen van diverse wiskundedocenten van de TUDelft. Voor meer informatie zie http://www.vssd.nl/hlf/a005.htm.

Prof. Grootendorst overleed op 80-jarige leeftijd in december 2004. Hij oogste ook veel lof met zijn Grepen uit de Geschiedenis van de Wiskunde, eveneens door de VSSD uitgegeven en nog steeds verkrijgbaar (http://www.vssd.nl/hlf/a011.htm).

Eudoxus en Dedekind

A.W. Grootendorst

1. Het irrationale in de Griekse wiskunde vóór Euclides

1.1 Er zijn meerdere manieren om het reële getal in te voeren. In deze voordracht zal in hoofdzaak aandacht geschonken worden aan de wijze waarop Richard Dedekind (1831-1916) via zijn ‘Schnitte’, het lichaam van de rationale getallen uitbreidde met de irrationale getallen tot het lichaam van de reële getallen [1.1][1]. De reden dat juist deze methode gekozen is als onderwerp van deze voordracht, ligt daarin dat hier een voorbeeld voor handen is hoe de diepe betekenis van een geniale gedachte uit de geschiedenis van de wiskunde, nl. de redentheorie van Eudoxus (ca. 400-347) na ruim 2200 (!) jaren werd ingezien en op even geniale wijze werd uitgewerkt door Dedekind [1.2].

1.2 Men vermoedt dat in de school van Pythagoras (6^{e} eeuw v.C.) het irrationale ontdekt is, waarbij het niet zeker is welke irrationaliteit het eerst gevonden werd: de onderlinge onmeetbaarheid van de lengte van zijde en diagonaal in het vierkant of in de regelmatige vijfhoek. In ieder geval kwam deze ontdekking als een grote schok aan, immers bij de Pythagoreërs gold de suprematie van het (natuurlijke) getal, zoals verwoord is door de Pythagoreër Philolaus [1.3].
Inderdaad heeft alles wat men kan kennen, een getal, want het is niet mogelijk iets te begrijpen of te kennen zonder het getal.
Traditioneel wordt de ontdekking van het irrationale toegeschreven aan Hippasus van Metapontum (ca. 520 - ca. 480), de eerste belangrijke wiskundige uit de school van Pythagoras. Volgens de overlevering [1.4] zou hij als straf voor de openbaarmaking van deze ‘gruwelijke’ ontdekking de dood op zee gevonden hebben.

1.3 De onderlinge onmeetbaarheid van zijde en diagonaal in een regelmatige vijfhoek (zie afb. 1.2) kan worden bewezen met behulp van de stelling in El. X. 2[2].
Hier wordt de bekende Euclidische algoritme (‘delen met rest’) — officieel anthyphaeresis of antanairesis genoemd — ingevoerd. We lezen daar:
Indien men van twee ongelijke grootheden steeds afwisselend de kleinste van de grootste aftrekt en de rest nooit af te passen is op de voorgaande, dan zullen deze grootheden onderling onmeetbaar zijn.

---

1 Verwijzingen naar de aantekeningen zijn tussen [ ] geplaatst.
2 El. X. 2 verwijst naar hoofdstuk 2 van het boek X van de Elementen van Euclides.

In moderne taal betekent dit dat a_0 en a_1 onderling onmeetbaar zijn indien het volgende schema (Euclidische algoritme) nooit afbreekt.

$$a_0 = a_1 q_0 + r_1 \qquad 0 \leq r_1 < a_1$$

$$a_1 = r_1 q_1 + r_2 \qquad 0 \leq r_2 < r_1$$

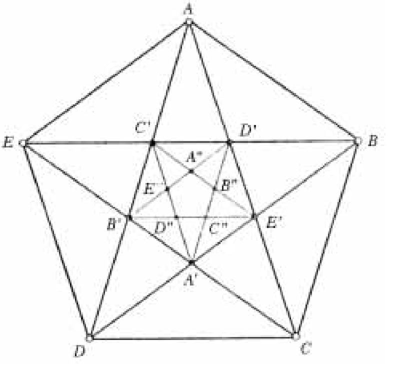
$$r_1 = r_2 q_2 + r_3 \qquad 0 \leq r_3 < r_2$$

Zou dit schema wel eindigen, bijv. met

$$r_{n-1} = r_n q_n$$

dan ziet men eenvoudig in dat r_n de g.g.d. van a_0 en a_1 is.
Dit passen we toe op de regelmatige vijfhoek in afbeelding 1.2.

Afbeelding 1.1. Euclides.



Afbeelding 1.2.

Men ziet eenvoudig in: $AE = ED' = DC$ en $BD' = D'A' = A'D$. Stelt men in vijfhoek $ABCDE$ de diagonaal op d_1 en de zijde op a_1 en in vijfhoek $A'B'C'D'E'$ de diagonaal op d_2 en de zijde op a_2 en gaat men zo voort met steeds weer de 'binnenste' vijfhoek, dan zien we:

$$EB = ED' + D'B = AE + D'A'$$

dus

$$d_1 = 1 \cdot a_1 + d_2 \qquad \text{met} \quad 0 < d_2 < a_1$$

en analoog

$$d_2 = 1 \cdot a_2 + d_3 \qquad \text{met} \quad 0 < d_3 < a_2$$

en men ziet dat deze keten niet afbreekt, dus zijde en diagonaal van een regelmatige vijfhoek zijn onderling ondeelbaar.

Tenslotte volgt uit de gelijkvormigheid van de driehoeken AEB en $A'DC$ dat $EB : AE = DC : A'D$

maar $DA' = A'D' = D'B = d_1 - a_1$, dus

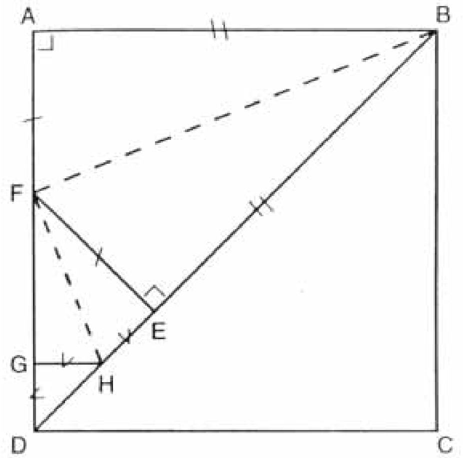
$$d_1 : a_1 = a_1 : (d_1 - a_1)$$

$$a_1^2 + d_1 a_1 - d_1^2 = 0$$

$$a_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot d_1$$

dus $(-1 + \sqrt{5})/2$ en dus ook $\sqrt{5}$ is irrationaal. De verdeling van d_1 in a_1 en $d_1 - a_1$ is de bekende verdeling in uiterste en middelste reden.

1.4 De methode van de oneindig voortlopende Euclidische algoritme kunnen we ook gebruiken om de onderlinge ondeelbaarheid van zijde en diagonaal in een vierkant aan te tonen. Zie daarvoor afbeelding 1.3.



Afbeelding 1.3.

We beginnen met de zijde AB af te passen op de diagonaal BD. De rest ED moet nu worden afgepast op AB, maar daarvoor kunnen we ook AD nemen. Aangezien kennelijk geldt: $AF = FE = ED$, zien we dat we ED tweemaal kunnen afpassen op AD met rest GD. Echter $GD = GH$, dus het komt er op neer dat we GH moeten afpassen op ED. Omdat echter $GH = HE$, rest ons dat we GH moeten afpassen op DH, maar dan zijn we in dezelfde situatie als in het begin, waaruit volgt dat dit proces nooit eindigt. Hieruit blijkt dat de verhouding $BD : AB = \sqrt{2}$ irrationaal is. Dit zullen we nog op 3 andere manieren aantonen.

1.5 De eerste daarvan is alom bekend en stamt uit een supplement op El. X. 115 [1.5]. In moderne notatie:

Stel $\sqrt{2} = \frac{t}{n}$ met natuurlijke t en n en $(t,n) = 1$.

Dan geldt: $t^2 = 2n^2$, dus t^2 en derhalve t even, bijv. $t = 2s$. Hieruit volgt dan $n^2 = 2s^2$ dus ook n^2 en n even, in strijd met de onderstelling dat $(t,n) = 1$.

1.6 Een fraai bewijs valt te ontlenen aan Aristoteles [1.6]; het vereist de mogelijkheid en eenduidigheid van ontbinding in priemfactoren en is uit te breiden tot de stelling dat een getal dat geen kwadraat is van een natuurlijk getal, ook niet het kwadraat is van een rationaal getal.
Stel $D \neq m^2$ $(m \in \mathbb{N})$ dan bevat D een oneven aantal priemfactoren. Als nu $D = (\frac{t}{n})^2$ met natuurlijke t en n, dan zou $n^2D = t^2$. In het linkerlid staat dan een oneven aantal priemfactoren, in het rechterlid een even aantal. Dit levert een contradictie.

1.7 Tot slot het bewijs dat Dedekind gaf van de irrationaliteit van $\sqrt{D}$ als D een natuurlijk getal is dat niet zelf het kwadraat is van een natuurlijk getal. [1.7]
Daar dit bewijs weinig bekend is, wordt het hier weergegeven. Het verloopt aldus:
Als D het kwadraat is van een rationaal getal, dan zijn er twee natuurlijke getallen t en n met $(t, n) = 1$, waarvoor geldt

$$t^2 - Dn^2 = 0. \qquad (*)$$

Laat nu n_0 het kleinste natuurlijke getal zijn dat hieraan voldoet. Voor zekere $\lambda \in \mathbb{N}$ geldt voor de bij die n_0 behorende t_0:

$$\lambda n_0 < t_0 < (\lambda + 1)n_0$$

dus, als we stellen

$$n_1 = t_0 - \lambda n_0$$

dan geldt:

$$0 < n_1 < n_0.$$

Stelt men verder

$$t_1 = Dn_0 - \lambda t_0,$$

dan geldt $t_1 > 0$ en

$$t_1^2 - Dn_1^2 = (\lambda^2 - D)(t_0^2 - Dn_0^2) = 0.$$

Daar echter $0 < n_1 < n_0$ levert dit een tegenspraak met de onderstelling dat n_0 het kleinste natuurlijke getal is dat aan (*) voldoet.

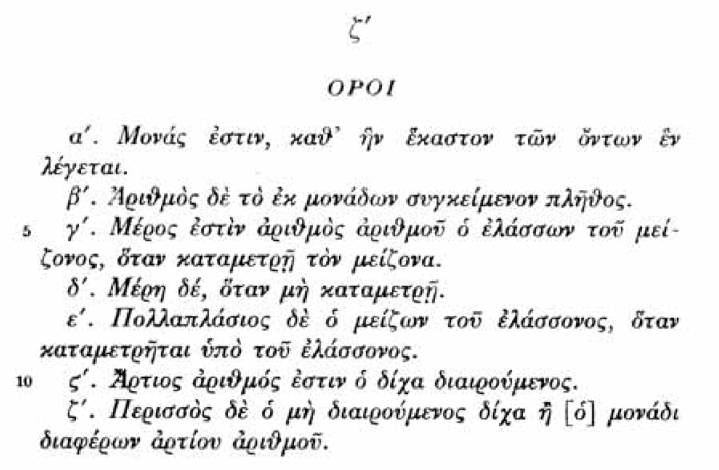
2. Verhouding en evenredigheid van getallen bij Euclides: Eudoxus

2.1 Het zevende boek van de Elementen van Euclides (ca. 300 v.C.) is het eerst van de drie getallentheoretische boeken (VII, VIII, IX) die als een merkwaardige enclave voorkomen in het overigens meetkundige werk van Euclides. Met getal wordt daarin steeds — in goede Pythagorische traditie — bedoeld: natuurlijk getal. Dit blijkt al direct uit de eerste twee definities van dit boek [2.1]:

Eenheid is datgene op grond waarvan elk van de dingen ‘één’ genoemd wordt.

en

Een getal (arithmos, staat daar) *is een hoeveelheid, samengesteld uit eenheden.*



ζʹ

ΟΡΟΙ

αʹ. Μονάς ἐστιν, καθʼ ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.

βʹ. Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

γʹ. Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα.

δʹ. Μέρη δέ, ὅταν μὴ καταμετρῇ.

εʹ. Πολλαπλάσιος δὲ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

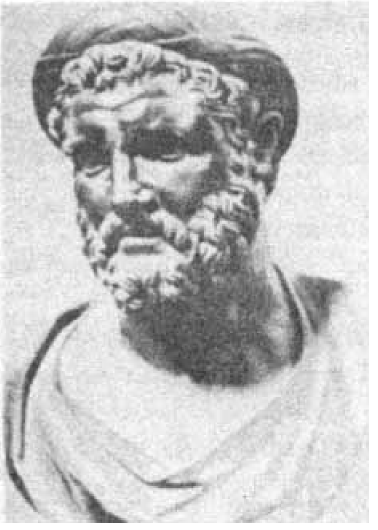
ϛʹ. Ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος.

ζʹ. Περισσὸς δὲ ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα ἢ [ὁ] μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ.

Afbeelding 2.1.

In de school van Pythagoras (6e eeuw v.C.), die duidelijk zijn stempel op de Elementen drukte, gold 1 niet als getal, maar als grondslag daarvan, zoals een steen, waaruit een muur is op gebouwd zelf geen muur is. Sommige Pythagoreërs sloten zelfs 2 uit als getal. Getal was eerste instantie een aantal. Vele schrijven de kerngedachten van het zevende boek van de Elementen toe aan Theaetetus (circa 417-369). Sommigen doen dat met meer zekerheid dan anderen. Vast staat echter dat hij beschikte over de leer van de evenredigheden uit de Pythagorische school en bekend was met het werk van Hippocrates van Chios (circa 450 v.C.) en Archytas van Tarente (circa 375 v.C.).

Theaetetus stond in de oudheid bekend als in alle opzichten briljant. Hij is vermoedelijk de ontdekker van het regelmatige achtvlak en twintigvlak, gold als grondlegger van de stereometrie en ontdekte de irrationaliteiten in de rij $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, …, $\sqrt{17}$. Ook was hij de hoofdfiguur in de gelijknamige dialoog van Plato die gewijd is aan de kennisleer.



Afbeelding 2.2. Pythagoras.

Hij vond de dood in 369 v.C. ten gevolge van zijn deelname aan een veldslag bij Corinthe.

2.2 Na zorgvuldige definities van even, oneven, deelbaarheid, priem etc. volgt dan als twintigste definitie die van evenredigheid. Let wel niet van verhouding, maar in feite van de gelijkheid van niet-gedefinieerde verhoudingen. VII Def. 20
Getallen zijn evenredig (analogon) wanneer het eerste van het tweede en het derde van het vierde evenzoveel maal veelvoud is of hetzelfde deel of dezelfde delen.
De eerste twee delen van deze definitie spreken voor zichzelf:
$A : B = C : D$ indien $A = tB$ en $C = tD$ of $B = tA$ en $D = tC$. Voor een goed begrip van het derde deel moeten we iets verder in het boek VII lezen en dan blijkt dat met 'dezelfde delen' bedoeld wordt

$$A = ad_1; B = bd_1 \text{ en } C = ad_2; D = bd_2$$

waarbij d_1 de g.g.d is van A en B en d_2 de g.g.d. van C en D is. Men ziet eenvoudig in dat dit geval beide voorgaande impliceert.

2.3 Met behulp van deze definitie worden dan de bekende eigenschappen afgeleid, zoals

$$a : b = c : d \Leftrightarrow (a \pm b) : (c \pm d) = a : b$$

$$a : b = c : d \Leftrightarrow ad = bd \text{ etc.}$$

Uiteraard is deze notatie een anachronisme. In de Elementen gaat het geheel verbaal toe. Zo leest men in stelling VII.11 in plaats van

$$a : b = c : d \Rightarrow (a - c) : (b - d) = a : b,$$

de fraaie volzin:
Indien het geheel tot het geheel staat zoals een afgenomen stuk tot een afgenomen stuk, dan zal de rest staan tot de rest zoals het geheel tot het geheel [2.2].
Met behulp van def. 20 zijn al deze eigenschappen op voor de hand liggende wijze af te leiden.
Voor ons doel is echter het belangrijkste dat men uit def. 20 een eigenschap kan afleiden die de band legt met de definitie van evenredigheid van 'grootheden' (lengten, oppervlakken, inhouden) zoals Eudoxus (ca. 400 - ca. 347) die gaf, wellicht geïnspireerd door de definitie van Theaetetus. De bedoelde eigenschap van de evenredigheid van getallen luidt:
Er geldt: $A : B = C : D$ (*)
dan en slechts dan als voor willekeurige natuurlijke getallen m en n geldt:

$$mA \gtreqless nB \Leftrightarrow mC \gtreqless nD \qquad (**)$$

Het bewijs is eenvoudig. Uit (*) volgt immers

$$A = ad_1,\ B = bd_1 \text{ en } C = ad_2,\ D = bd_2$$

en dus

$$mA \gtreqless nB \Leftrightarrow mad_1 \gtreqless nbd_1 \Leftrightarrow mad_2 \gtreqless nbd_2 \Leftrightarrow mC \gtreqless nD.$$

Dat uit (**) ook (*) volgt, blijkt als we alleen letten op het gelijkteken in (**); dan zien we immers:

$$mA = nB \Leftrightarrow mC = nD \qquad (***)$$

Nu zijn A en B getallen, dus we mogen deze als resp. n en m kiezen. Aangezien $BA = AB$, volgt met (***):
$BC = AD$ en met één van de bovengenoemde stellingen hebben we dan $A : B = C : D$.

3. Verhouding en evenredigheid van grootheden bij Euclides: Eudoxus

3.1 In het vijfde boek van de Elementen van Euclides vinden we een volledige redentheorie, d.w.z. een volledige theorie van evenredigheden voor grootheden, die — toegepast op gehele getallen — dezelfde resultaten geeft als de zojuist genoemde uit El.VII en dit dus in feite overbodig maakt. Merkwaardig is dat er geen antieke bronnen zijn die verband leggen tussen boek V en VII.
Men is het er algemeen over eens dat Eudoxus van het Kleinaziatische Cnidus (ca. 400 - ca. 347) de auctor intellectualis is van dit boek en niet alleen van dit deel van de Elementen. In een scholion (toelichting) schreef Proclus (410 - 485), na de opsomming van een aantal wiskundigen [3.1]:

Niet veel jonger dan deze is Euclides, die de Elementen samenstelde, veel van de resultaten van Eudoxus samenvatte, veel voltooide wat Theaetetus was begonnen en de minder strenge bewijzen van zijn voorganger in een niet te weerleggen vorm bracht.
Met betrekking tot boek V zegt hij expliciet [3.2]
Sommigen zeggen dat dit boek de vinding is van Eudoxus, een leerling van Plato.
Van het vele werk dat volgens antieke getuigen van zijn hand verscheen rest ons nog slechts een aantal fragmenten [3.3].
Hij behoort echter tot de belangrijkste wiskundigen van de oudheid. Opgeleid o.a. door Archytas van Tarente en Plato (427-347) ontwikkelde hij zich tot astronoom en wiskundige die niet alleen belangrijke ontdekkingen deed op het gebied van de wiskunde, maar deze ook toepaste op het gebied van de astronomie. Zo ontwikkelde hij een geocentrisch wereldbeeld waarin de aarde het middelpunt was van een stel concentrische bollen waarop de planeten zich bevonden en waarmee hij hun schijnbare bewegingen wist te verklaren. Hierbij toonde hij zich een meester in stereometrie, vooral waar het de meetkunde van de bol betrof.
Van zijn wiskundewerk staat in deze voordracht zijn redentheorie centraal. Daarnaast echter vermelden we dat Archimedes (287 - 212) aan hem de exhaustie methode toeschreef. Deze komt neer op het volgende: als men van een gegeven oppervlakte, zeg A, de helft of meer wegneemt, van de rest eveneens de helft of meer en dit procédé voortzet, houdt men op de duur minder over dan een vooraf gegeven oppervlakte. In moderne notatie: $\lim_{n\to\infty} A(1-r)^n = 0$ ($\frac{1}{2} \le r < 1$). Hiermee toonde hij o.a. aan dat de oppervlakten van twee cirkels zich verhouden als de kwadraten van hun stralen; van hem stamt ook het bewijs van de formule voor de inhoud van een rechte cirkelkegel. Ook zou de axiomatische methode en de systematische presentatie, die zo kenmerkend zijn voor de Elementen van Euclides, van hem afkomstig zijn.

3.2 De grote betekenis van de nu te bespreken theorie ligt daarin dat deze niet beperkt blijft tot (natuurlijke) getallen, maar zich uitstrekt tot continu veranderlijke grootheden ook in het geval dat deze onderling geen gemene maat hebben. In feite hebben we hier een theorie waarin de definitie en de eigenschappen van het onmeetbare getal besloten liggen. De ontdekking daarvan zou echter voorbehouden blijven aan Richard Dedekind (1831 - 1916), die met grote genialiteit de theorie van El.V 22 eeuwen later — in 1858 — oppakte.

3.3 Boek V van de Elementen van Euclides zet in met de definities van deler en veelvoud van grootheden. Het begrip grootheid wordt daarbij niet gedefinieerd, maar in een scholion op boek V [3.4] leest men:
Een grootheid is dat wat in het oneindige kan worden vermeerderd en gedeeld. Er zijn daarvan drie soorten: lengten, oppervlakten, inhouden.
Daarna volgt (bij Euclides) de ‘definitie’ van verhouding [3.5].
Een verhouding is een zekere betrekking tussen gelijksoortige grootheden inzake hun afmeting.

Met deze 'definitie' valt uiteraard niet veel te beginnen. Het enige dat eruit blijkt is dat een verhouding geen getal is en zeker ook niet het quotiënt van twee getallen, want aan lengten etc. werden geen getallen toegekend. (Hoe zou dan toen ook gekund hebben?) Ook het begrip 'gelijksoortig' wordt hier niet verklaard, maar de scholiast [3.6] wijst er op dat

Niemand een lengte met een oppervlakte vergelijke.

en dat laatste blijkt ook uit Def. V,4:

Men zegt dat die grootheden een verhouding kunnen hebben die na vermenigvuldiging elkaar kunnen overtreffen.

Het gaat dus om verhoudingen van lengten onderling, oppervlakten onderling, inhouden onderling. In deze definitie wordt geformuleerd datgene wat later bekend geworden is als het axioma van Eudoxus/Archimedes en dat aldus luidt:

Bij twee gelijksoortige grootheden A en B kan men steeds natuurlijke getallen n en m vinden z.d.d.

$$nA > B \text{ en } mB > A.$$

Het gaat in feite om het uitsluiten van 'oneindige kleine' grootheden.

3.4 Hoewel dus het begrip verhouding van grootheden niet op operationele wijze is gedefinieerd, wordt in de beroemde Def. V, 5 het begrip 'gelijkheid' van verhoudingen vastgelegd:

ε΄. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.

Afbeelding 3.1.

Grootheden worden gezegd dezelfde verhouding te hebben, de eerste tot de tweede en de derde tot de vierde, wanneer willekeurige, gelijke veelvouden van de eerste en de derde tegelijkertijd groter zijn dan, gelijk zijn aan, of kleiner zijn dan willekeurige gelijke veelvouden van de tweede en de vierde, in dezelfde volgorde genomen.

Deze volzin zouden wij aldus in formule samenvatten.

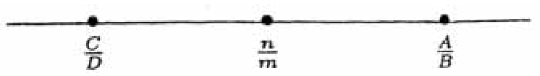
Voor de grootheden A, B, C, D geldt dat:

$$A : B = C : D$$

dan en slechts dan als voor alle $m, n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$mA \gtreqless nB \Leftrightarrow mC \gtreqless nD.$$

Zoals gezegd hadden de Grieken voor de verhouding van twee grootheden A en B geen notatie; als wij die dan toch aangeven met $A : B$, dan mogen we — in hun gedachtengang — zeker niet aan een getal denken!
De genoemde definitie ligt in het verlengde van (is geïnspireerd door?) de eigenschap die we in §2.3 afleidden voor natuurlijke getallen en die *volgde uit de definitie van evenredigheid van natuurlijke getallen.*
Def. V, 6 zegt dan dat grootheden die dezelfde verhouding hebben 'evenredig' (analogon) genoemd worden.
Direct daarna wordt de ordening van verhoudingen ingevoerd door Def. V, 7, die in onze taal zou luiden:
$A : B > C : D$ dan en slechts dan als er $n, m \in \mathbb{N}$ bestaan z.d.d. *$mA > nB$ en tevens $mC < nD$.*
Deze definitie lijkt in eerste instantie ondoorzichtig, maar als we even brutaalweg bij $A : B$ en $C : D$ toch aan 'getallen' denken (later worden zij dat toch) dan staat hier te lezen dat $A : B > C : D$ wanneer er een rationaal getal $\frac{n}{m}$ tussen $\frac{C}{D}$ en $\frac{A}{B}$ ligt, immers $mA > nB$ betekent dan $\frac{n}{m} < \frac{A}{B}$ en $mC < nD$ betekent dan $\frac{n}{m} > \frac{C}{D}$.



Afbeelding 3.2.

3.5 Met deze definitie van gelijkheid en ordening van verhoudingen worden dan de gebruikelijke eigenschappen afgeleid. We geven hiervan als voorbeeld stelling V, 18, maar dan in moderne notatie.
De stelling luidt:

$$(A + B) : B = (C + D) : D \Leftrightarrow A : B = C : D$$

Bewijs:
$\Rightarrow$ Uit het gegeven volgt voor willekeurige $m, n \in \mathbb{N}$:

$$m(A + B) \gtreqless (m + n)B \Leftrightarrow m(C + D) \gtreqless (m + n)D$$

en dus

$$mA \gtreqless nB \Leftrightarrow mC \gtreqless nD$$

maar dit betekent juist

$$A : B = C : D$$

$\Leftarrow$ Dit volgt door de redenering 'van onder naar boven' te volgen. N.B. alle genomen

kleine tussenstappen, zoals $m(A + B) = mA + mB$ zijn nauwkeurig verantwoord in de Elementen.
Als tweede voorbeeld, de stelling:

$$A > B \Rightarrow A : C > B : C.$$

Bewijs:
We onderscheiden
a. $A - B < B$
b. $A - B \geq B$.
a. $A - B < B$. Kies $m \in \mathbb{N}$ z.d.d. $m(A - B) > C$ en daarna $n \in \mathbb{N}$ z.d.d.

$$(n - 1)C \leq mB < nC. \qquad (*)$$

dan geldt

$$C < mA - mB$$

$$nC - C \leq mB$$

dus

$$nC < mA \qquad (**)$$

en tevens (*)

$$mB < nC \qquad (*)$$

Uit (*) en (**) volgt dan, per definitie

$$A : C > B : C$$

b. $B \leq A - B$
Kies nu $m \in \mathbb{N}$ z.d.d.

$$mB > C$$

en daarna $n \in \mathbb{N}$ z.d.d.

$$(n - 1)C \leq m(A - B) < nC, \qquad (***)$$

dan volgt uit $B \leq A - B$
en dus

$$mB < m(A - B),$$

met (***)

$$mB < nC.$$

Verder volgt uit:

$$C < mB$$

met

$$nC - C \leq mA - mB < nC \qquad (***)$$

dat

$$nC < mA$$

Dus we hebben

$$mA > nC \text{ en } mB < nC$$

hetgeen betekent

$$A : C > B : C.$$

4. Het irrationale getal bij Dedekind

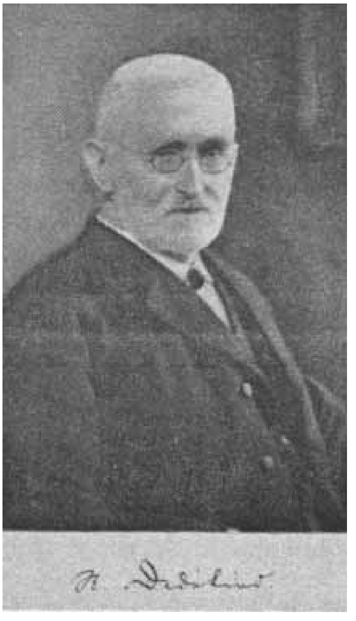
4.1 De kroon op het werk, waarvoor Eudoxus de basis legde, werd gezet door Richard Julius Wilhelmus Dedekind. Deze grote, bescheiden wiskundige werd in 1831 geboren in Braunschweig en studeerde vanaf 1850 in Göttingen o.a. bij Gauss, onder wiens leiding hij in 1852 promoveerde op een proefschrift over integralen van Euler, d.w.z. integralen van het type

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x \ \text{ en } \int_0^1 x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

Achtereenvolgens was hij privaatdocent in Göttingen, hoogleraar aan het Polytechnikum in Zürich (de voorloper van de Eidgenössische Technische Hochschule) en vanaf 1862 tot zijn emeritaat in 1894, hoogleraar aan het Polytechnikum in Braunschweig.

Van zijn vele bijdragen tot de wiskunde worden hier slechts genoemd zijn fundamentele werk op het gebied van de algebraïsche getallentheorie — met als hoogtepunt de ideaaltheorie met de ontbindbaarheid van een ideaal in priemfactoren — en zijn strenge definitie van het irrationale getal.

Ook mag zijn 'editorial' werk niet onvermeld blijven: met Weber gaf hij het verzamelde werk van Riemann (1826 - 1866) uit, hij werkte mee aan de uitgave van het getallentheoretische werk van Gauss (1777 - 1855) en publiceerde na de dood van Dirichlet (1805 - 1859) diens 'Vorlesungen über Zahlentheorie'.



Afbeelding 4.1. Dedekind.

4.2 Hier houden we ons bezig met Dedekinds constructie van de irrationale getallen uit de rationale.
Bij zijn onderwijs in de differentiaal- en integraalrekening voelde hij behoefte aan een goede fundering daarvan. Zo schrijft hij:
Man sagt so häufig, die Differentialrechnung beschäftige sich mit den stetigen Grössen, und doch wird nirgends eine Erklarung von dieser Stetigkeit gegeben… [4.1]
Verderop leest men op dezelfde bladzijde, waar hij spreekt over de stelling dat iedere naar boven begrensde verzameling van reële getallen een kleinste bovengrens heeft:
Es kam nur noch darauf an, seinen eigentlichen Ursprung in den Elementen der Arithmetik zu entdecken und hiermit zugleich eine wirkliche Definition von dem Wesen der Stetigkeit zu gewinnen. Dies gelang mir am 24 November 1858.
In het voorwoord tot 'Was sind und was sollen die Zahlen?' (lit. (3), (4)) noemt hij — schrijvende over irrationale getallen — als zijn bron van inspiratie de hierboven behandelde def. V. 5 in de Elementen van Euclides:
... So ist diese Art ihrer Bestimmtheit schon auf das deutlichste in der beruhmten Definition ausgesprochen, welche Euklid (Elemente V. 5) für die Gleichheit der Verhältnisse aufstellt. Eben diese uralte Überzeugung ist nun gewiss die Quelle meiner Theorie.

4.3 Wij herhalen deze definitie hier in moderne notatie:
Men zegt dat $A : B = C : D$ dan en slechts dan als voor alle $m, n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$mA \gtreqless nB \Leftrightarrow mC \gtreqless nD.$$

Dedekind zag de diepere betekenis hiervan in. Deze houdt nl. in dat de definitie die Eudoxus gaf van de gelijkheid van verhoudingen, een evenredigheid dus, in de verzameling $\mathbb{Q}^+$ van alle positieve rationale getallen een verdeling in twee klassen A_1 en A_2 induceert, z.d.d.
voor alle $\frac{n}{m} \in A_1$, geldt $mA \geq nB$
en voor alle $\frac{n}{m} \in A_2$ geldt $mA < nB$,
Als we even brutaal zijn en $A : B$ schrijven als een 'breuk' (Wat dat dan ook moge beteken), dan zou gelden voor $\frac{n}{m} \in A_1 : \frac{n}{m} \leq \frac{A}{B}$ en voor $\frac{n}{m} \in A_2 : \frac{n}{m} > \frac{A}{B}$. Dit verklaart waarom we A_1 'onderklasse' noemen en A_2 'bovenklasse'.

4.4 Deze klassen blijken de volgende eigenschappen te bezitten:

1. $A_1 \neq \emptyset$ en $A_2 \neq \emptyset$.
2. $A_1 \cup A_2 = \mathbb{Q}^+$ en $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
3. als $\frac{n_1}{m_1} \in A_1$ en $\frac{n_2}{m_2} \in A_2$, dan geldt $\frac{n_1}{m_1} < \frac{n_2}{m_2}$.

Bewijs:
1. Volgens het axioma van Eudoxus-Archimedes bestaan er natuurlijke getallen m en z.d.d. $mA > B$ en $nB > A$ dus $\frac{1}{m} \in A_1$ en $n \in A_2$; derhalve $A_1 \neq \emptyset$ en $A_2 \neq \emptyset$.
2. Steeds geldt voor $\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{m}}$: $mA \geq \mathrm{n}B$ òf $mA < nB$ en nooit beide tegelijkertijd.
3. Stel $\frac{n_1}{m_1} \in A_1$ en $\frac{n_2}{m_2} \in A_2$, dan geldt:

$$m_1A > n_1B \text{ en } m_2A < n_2B$$

dus $n_1m_2A < n_1n_2B < n_2m_1A$
dus $n_1m_2 < n_2m_1$
oftewel $\frac{n_1}{m_1} < \frac{n_2}{m_2}$

4.5 Het is eenvoudig in te zien dat A_1 geen kleinste element en A_2 geen grootste element kan hebben. Verder merken we op dat m.b.t. een grootste en een kleinste element in A_1 resp. A_2, er 3 mogelijkheden zijn:

1. A_1 heeft een grootste element en A_2 geen kleinste
2. A_2 heeft een kleinste elemen en A_1 geen grootste.
3. A_1 heeft geen grootste element en A_2 geen kleinste.

De vierde mogelijkheid A_1 heeft een grootste element, zeg m_1 en A_2 heeft een kleinste element, zeg m_2 kan zich niet voordoen, want dan zou daar $m_1 < m_2$ voor $\mu = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)$ gelden: $\mu > m_1$ en dus $\mu \notin A_1$ dus $\mu \in A_2$ maar tevens $\mu < m_2$ en dus $\mu \notin A_2$ dus $\mu \in A_1$ maar $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ dus tegenspraak.
Uiteraard kunnen we het altijd zo inrichten dat A_2 geen kleinste element heeft door dit

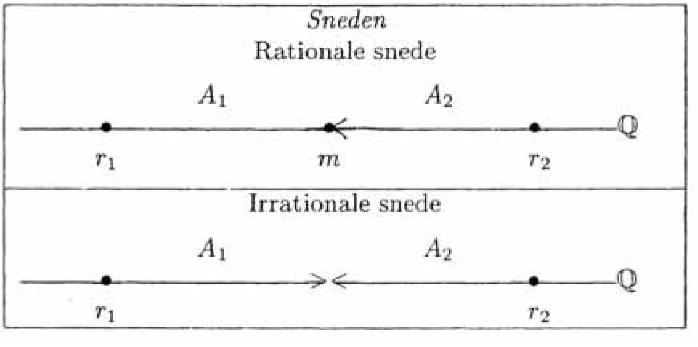
eventuele element aan A_1 toe te kennen.

4.6 Indien A_1 een grootste (rationaal) element, zeg r, heeft dan correspondeert met de verdeling, d.w.z. met dit paar klassen (A_1,A_2) het rationale getal r. Heeft A_1 geen grootste element (en A_2 geen kleinste), dan kunnen we het paar (A_1,A_2) laten corresponderen met 'iets nieuws'. Dit bracht Dedekind op de gedachte om in $\mathbb{Q}$, het lichaam van alle rationale getallen, in abstracto een verdeling in twee klassen A_1 en A_2 te definiëren, welke verdeling per definitie de karakteristieke eigenschappen heeft die hierboven voortvloeiden voor $\mathbb{Q}^+$ uit de definitie van Eudoxus.
Het paar (A_1,A_2) noemde Dedekind een snede (Schnitt) en is als 'snede van Dedekind' de geschiedenis ingegaan. Deze snede stelde Dedekind in staat om het lichaam $\mathbb{Q}$ van de rationale getallen uit te breiden met de irrationale getallen tot het lichaam $\mathbb{R}$ van de reële getallen.

4.7 De zuinigste definitie van een snede van Dedekind luidt aldus:
Een snede is een geordend paar deelverzamelingen (A_1,A_2) van het lichaam $\mathbb{Q}$ van de rationale getallen en wel zó dat.

1. $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$.
2. $A_1 \cup A_2 = \mathbb{Q}$; $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
3. Als $r_1 \in A_1$ en $r_2 \in A_2$ dan geldt: $r_1 < r_2$.
4. A_2 heeft geen kleinste element.

In het geval dat A_1 een grootste element, zeg m, heeft laat men met de snede (A_1,A_2) het rationale getal m corresponderen. Men spreekt dan van een *rationale* snede. In het geval dat A_1 geen grootste element heeft spreken we van een *irrationale* snede.
De verzameling sneden in $\mathbb{Q}$ is nu wat Dedekind de verzameling van de reële getallen noemde.
De rationale getallen die één-éénduidig corresponderen met de rationale sneden zijn hierin isomorf ingebed.



Afbeelding 4.2.

De irrationale sneden noemt men irrationale getallen. Dit zijn de nieuwe aanwinsten, maar nu formeel ingevoerd.

Van deze collectie reële getallen kan bewezen worden dat zij — bij geschikt gekozen operaties en definities — een geordend lichaam vormen met een continuïteitseigenschap die we nog zullen preciseren.

4.8 Het bekendste voorbeeld van een irrationale snede is wel de snede waarmee $\sqrt{D}$ wordt gedefinieerd in het geval dat D behoort tot $\mathbb{N}$, maar niet het kwadraat is van een geheel getal.
In §1.6 en §1.7 zagen we al dat in dit geval D ook niet het kwadraat is van een rationaal getal. De bijbehorende snede wordt als volgt gedefinieerd:

$$A_2 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r > 0 \wedge r^2 > D\} \quad \text{en} \quad A_1 = \mathbb{Q} - A_2.$$

We zien dan eenvoudig in dat voldaan is aan de eisen (1), (2) en (3) van de definitie.
Blijft nog te bewijzen dat A_1 geen grootste element heeft en A_2 geen kleinste.
Voor het bewijs nemen we $r \in A_1$, met $r > 0$ (er geldt dan $r^2 < D$) en laten zien dat er in A_1 nog een groter element is. Daartoe kiezen we allereerst een rationale h z.d.d. $0 < h < 1$. Dan geldt:

$$(r + h)^2 = r^2 + 2rh + h^2 < r^2 + 2rh + h = r^2 + (2r + 1)h.$$

Bepalen we h nader z.d.d. $h < \frac{D-r^2}{2r+1}$, dan geldt $(r + h)^2 < D$, dus $r + h \in A_1$ dus A_1 heeft geen grootste element.
Analoog: zij $r \in A_2$ (er geldt dan $r > 0$ en $r^2 > D$). Kies nu $0 < h < r$. Er geldt dan $(r - h)^2 = r^2 - 2rh + h^2 > r^2 - 2rh > D$, indien we ook nog zorgen dat $h < \frac{r^2-D}{2r}$. Voor $r - h$ geldt: $r - h \in A_2$ en $r - h < r$; A_2 heeft dus geen kleinste element [4.2].

4.9 Na de introductie van het begrip ‘snede’, gaat Dedekind de ‘orde op zaken stellen’, d.w.z. hij definieert voor deze sneden de begrippen ‘gelijk aan’ (=) ‘groter dan’ (>) en ‘kleiner dan’ (<).
Als α en β twee sneden zijn, waarbij $\alpha = (A_1,A_2)$ en $\beta = (B_1,B_2)$ dan definieert men $\alpha = \beta$ d.e.s.d, als $A_1 = B_1$ en tevens $A_2 = B_2$.
Indien $A_1 \neq B_1$ dan onderscheiden we twee gevallen:

1. A_1 en B_1 hebben slechts één rationaal getal niet gemeen
2. A_1 en B_1 hebben minstens twee rationale getallen niet gemeen.

1. Stel $B_1 \neq A_1$ en a_1' is het enige rationale getal dat wel in A_1 maar niet in B_1 ligt. We kunnen dan bewijzen dat $B_1 \subset A_1$ en dat α en β beide met het rationale getal a_1' corresponderen, dus in wezen gelijk zijn (zie aantekening [4.3]).
2. Stel $B_1 \neq A_1$ en er zijn minstens twee rationale getallen a_1' en a_1'' die wel A_1 maar niet in B_1 liggen. In dit geval zijn er uiteraard oneindig veel rationale getallen in A_1 die niet tot B_1 behoren en we noemen de sneden α en β wezenlijk verschillend.
   We zeggen dan $\alpha > \beta$ en $\beta < \alpha$.
   In bovenstaande redenering kunnen uiteraard α en β verwisseld worden, zodat we alle gevallen te pakken hebben.

Het is niet moeilijk te bewijzen dat deze ordening *totaal* is, d.w.z. als $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, dan geldt

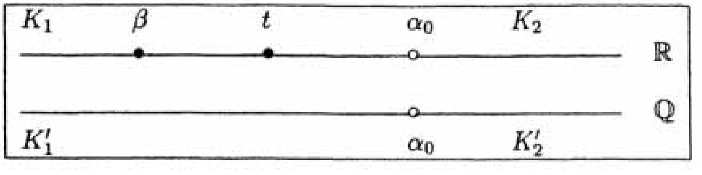
$$\alpha = \beta \text{ of } \alpha > \beta \text{ of } \alpha < \beta$$

Verder geldt de transitieve wet:

$$\text{als } \alpha < \beta \text{ en } \beta < \gamma \text{ dan } \alpha < \gamma.$$

en:
Tussen twee verschillende reële getallen liggen oneindig veel reële getallen.
Ook deze eigenschappen zijn niet moeilijk te bewijzen.

4.10 Een belangrijke consequentie van deze ordening van $\mathbb{R}$ is het continuïteitsbeginsel, dat de samenhang van $\mathbb{R}$ bepaalt en dat als volgt geformuleerd kan worden:
Indien de verzameling $\mathbb{R}$ van alle reële getallen in twee niet lege klassen K_1 en K_2 wordt verdeeld zodanig dat voor $\alpha_1 \in K_1$ en $\alpha_2 \in K_2$ geldt $\alpha_1 < \alpha_2$, dan is er precies één $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ zodanig dat voor elke $\beta \in \mathbb{R}$ met $\beta < \alpha_0$, geldt: $\beta \in K_1$ en voor elke $\beta \in \mathbb{R}$ met $\beta > \alpha_0$ geldt $\beta \in K_2$.



Afbeelding 4.3.

Voor het bewijs leze men aantekening [4.4]. De betekenis van deze stelling is nauwelijks te overschatten: zij bevat de kern van het begrip continuïteit. In het voorwoord tot zijn 'Stetigkeit und irrationale Zahlen' vergelijkt Dedekind de rechte lijn met de verzameling rationale getallen en constateert bij deze laatste collectie 'Lückenhaftigkeit, Unvollstandigkeit oder Unstetigkeit' en vraagt zich af waarin dan wel de 'Stetigkeit' van de rechte lijn bestaat. Hij wil dit probleem streng aanpakken:
Mit vagen Reden über den ununterbrochenen Zusamenhang in den kleinsten Teilen ist naturlich nichts erreicht.
Hij merkt dan op dat een blik op de rechte lijn leert dat een gegeven punt p de rechte verdeelt in twee stukken, zódat ieder punt van het ene deel links van ieder punt van het andere deel ligt en gaat dan als volgt verder:
Ich finde nun das Wesen der Stetigkeit in der Umkehrung, also in dem folgenden Prinzip: Zerfallen alle Punkte der Geraden in Zwei Klassen von der Art, dass jeder Punkt der ersten Klasse links van jedem Punkte der zweiten Klassen liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung aller Punkte in Zwei Klassen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt [4.5].
Voor de door hem ingevoerde reële getallen lukt het hem dit te bewijzen en dat is dan

ook een antwoord op zijn ‘cri de cœur’ die we in §4.2 weergaven.

4.11 Na de ordening worden de algebraïsche bewerkingen — optelling, vermenigvuldiging en hun inversen — voor sneden ingevoerd.
Bij de definitie van de optelling zijn er weinig problemen.
Als (A_1,A_2) en (B_1,B_2) twee sneden zijn, dan definiëren wij de som $(S_1,S_2) = (A_1,A_2) + (B_1,B_2)$ daarvan, door:

$$S_1 = \{(a_1 + b_1) | a_1 \in A_1; b_1 \in B_1\} \text{ en } S_2 = \{(a_2 + b_2) | a_2 \in A_2; b_2 \in B_2\}$$

Men kan dan rechttoe, rechtaan bewijzen dat hierdoor inderdaad een snede is gedefinieerd en dat de sneden met deze definitie een geordende Abelse groep vormen, waarbij de snede die met $0 \in \mathbb{N}$ correspondeert het nulelement is [4.6].
Met betrekking tot de vermenigvuldiging is de situatie gecompliceerder. Allereerst bezien we twee niet-negatieve sneden (A_1,A_2) en (B_1,B_2). Hiervoor definieert men het produkt $(P_1,P_2) = (A_1,A_2)\cdot(B_1,B_2)$ door:

$$P_1 = \{a_1 b_1 | a_1 \in A_1; b_1 \in B_1\}$$

en

$$P_2 = \{a_2 b_2 | a_2 \in A_2; b_2 \in B_2\}.$$

Dit produkt is inderdaad een snede. De vermenigvuldiging is associatief, commutatief, distributief over hier boven gedefinieerde opstelling en heeft als één-element de snede die met $1 \in \mathbb{N}$ correspondeert.
Elke positieve snede blijkt dan een multiplicatieve inverse te bezitten. Niet zonder veel moeite kan men de vermenigvuldiging uitbreiden tot de negatieve sneden. Voor de bewijzen hiervan zij ook hier verwezen naar de zoeven genoemde literatuur [4.5].
Het resultaat is echter dat de door Dedekind ingevoerde sneden een geordend lichaam ($\mathbb{R}$) vormen waarin het lichaam $\mathbb{Q}$ van de rationale getallen isomorf kan worden ingebed.
Dit lichaam $\mathbb{R}$ is — zoals we zagen — totaal geordend en heeft de in §4.10 genoemde continuïteitseigenschap.

4.12 Tot slot vermelden we nog de constructie van reële getallen niet behulp van inkrimpende intervallen met rationale eindpunten. Zo’n ‘nest’ van intervallen heeft dan een aan alle intervallen gemeenschappelijk rationaal getal of niet. Op deze verzamelingen intervallen kan men een equivalentierelatie definiëren. De bijbehorende klassen vormen dan met geschikt gekozen operaties een lichaam, het lichaam van de reële getallen. De klassen van intervallen met (rationaal) lege doorsnede brengen dan de irrationale getallen in.
De gedachtengang van inkrimpende intervallen is al zeer oud en gaat terug tot de Babyloniërs en de Grieken. Men denke aan de benadering van de oppervlakte van een cirkel met behulp van in- en omgeschreven regelmatige veelhoeken door Archimedes.

Aantekeningen

N.B. tussen () geplaatste getallen verwijzen naar de literatuurlijst

1.1 Dedekind (3) en (4)

1.2 Deze voordracht is een nadere uitwerking van en een aanvulling op de opmerking die ik maakte in mijn lezing over de meetkundige algebra bij de Euclides. Zie pag. 51-53.

1.3 H. Diels - W. Kranz (5).

1.4 Jamblichus (13) §88 en Heiberg (12) pag. 85.

1.5 We vinden dit wel bij Thaer (19) maar niet bij Heiberg - Stamatis (11).

1.6 Zie hiervoor Fowler (8) pag. 215,304,305.

1.7 Dedekind (3) pag. 324,325; (4) pag. 13,14, 15.

2.1 Heath (9), dl. II pag. 277; Heiberg (11) dl. II pag. 103; Thaer (19) pag. 141.

2.2 O.c. resp. pag. 311; pag. 118; pag. 150.

3.1 Steck (18), pag. 150.

3.2 Heiberg (12), pag. 211.

3.3 Lasserre (17).

3.4 Heiberg (12), pag. 213.

3.5 Heath (9), II pag. 126; Heiberg (11), II pag.1; Thear (9), pag. 91.

3.6 Heiberg (12), pag. 315.

4.1 Dedekind (3), pag. 316; (4) pag. 2.

4.2 Het bewijs is hier enigzins gewijzigd doordat we twee gevallen onderscheiden. Hierdoor komt h op iets minder gekunstelde wijze te voorschijn. Dedekind werkt met slechts één h die in beide gevallen voldoet, maar deze h 'valt uit de lucht'.

4.3 We gaan uit van de sneden (A_1,A_2) en (B_1,B_2) met $A_1 \neq B_1$ en wel zó dat a'_1 het enige rationale getal is dat wel in A_1, maar niet in B_1 ligt en dus wel in B_2. Om dit laatste te accentueren noteren we a'_1 dan ook wel als b'_2. Voor elke $b_1 \in B_1$ geldt dan $b_1 < b'_2$, dus $b_1 < a'_1$ (*). Hieruit volgt $B_1 \subset A_1$; stel nl. dat voor zekere $b_1 \in B_1$ geldt $b_1 \notin A_1$ dan $b_1 \in A_2$ en dus $b_1 > a'_1$ $(\in A_1)$. Tegenspraak. Nu is a'_1 het enige element van A_1 dat niet in B_1 ligt. Voor elke andere $a_1 \in A_1$ geldt dus $a_1 \in B_1$ en dus volgens (*): $a_1 < a'_1$, m.a.w. a'_1 is het grootste element van A_1 en (A_1,A_2) is de rationale snede die met het getal a'_1 correspondeert. Uit het bovenstaande volgt tevens dat A_1 en B_1 slechts in a'_1 verschillen.
Nu bezien we de snede (B_1,B_2) en tonen aan dat a'_1 $(= b'_2)$ het kleinste element van

B_2 is. We zagen al dat voor elke $b_1 \in B_1$ geldt $b_1 < a_1'$ ($= b_2'$) (zie (*)).
Voor elke $b_2 \in B_2$ met $b_2 \neq b_2'$ geldt dan $b_2 > b_2'$ want anders zou $b_2 < b_2'$, dus $b_2 < a_1'$ ($\in A_1$); maar omdat A_1 en B_1 alleen in a_1' verschillen, zou dan $b_2 \in B_1$ en dat geeft een tegenspraak. Hieruit volgt dat $b_2' = a_1'$ het kleinste rationale getal is van B_2 en dus correspondeert ook de snede (B_1,B_2) met het rationale getal a_1'.

4.4 Laat $\mathbb{R}$ verdeeld zijn in twee niet lege klassen K_1 en K_2, zó dat uit $\alpha_1 \in K_1$ en $\alpha_2 \in K_2$ volgt $\alpha_1 < \alpha_2$. Deze klassenindeling van $\mathbb{R}$ induceert in de verzameling (het lichaam) $\mathbb{Q}$ van alle rationale getallen een indeling in twee klassen K_1', en K_2' waarbij K_1' alle rationale getallen van K_1 bevat en K_2' die van K_2.
(K_1',K_2') is een snede van Dedekind in $\mathbb{Q}$ en bepaalt dus op éénduidige wijze een — al dan niet rationaal — reëel getal α_0. Neem nu $\beta \in \mathbb{R}$ en $\beta \neq \alpha_0$. Onderscheid nu $\beta < \alpha_0$ en $\beta > \alpha_0$. Als $\beta < \alpha_0$, dan is er een *rationaal* getal t met $\beta < t < \alpha_0$. Omdat $t < \alpha_0$, geldt $t \in K_1$, anders $t \in K_2$ dus $t \in K_2'$ en dus $t > \alpha_0$ hetgeen een tegenspraak oplevert. Maar dan geldt ook $\beta \in K_1$, want $\beta < t$ en als $\beta \in K_2$ dan zou $\beta > t$ omdat $t \in K_1$. Het geval $\beta > \alpha_0$ verloopt analoog. Bij de gegeven indeling in klassen K_1 en K_2 is er dus precies één reëel getal α_0 zodanig dat $\beta < \alpha_0$ als $\beta \in K_1$ en $\beta > \alpha_0$ als $\beta \in K_2$. Men kan α_0 als grootste element aan K_1 of als kleinste aan K_2 toevoegen.

4.5 Dedekind (3), pag. 322 en (4), pag. 10 en 11.

4.6 Voor de details van de bewijzen zie lit. (3), (4), (7), (16).

Literatuur

1. E.M.J. BERTIN, H.J.M. BOS, A.W. GROOTENDORST ed., *Two Decades of Mathematics in the Netherlands*, M.C., Amsterdam, 1978.
2. R. DEDEKIND, *Was sind und was sollen die Zahlen?* In: Gesammelte Abhandlungen III, p. 335-391, Chelsea Publishing Company, New York, 1969.
3. R. DEDEKIND, Stetigkeit und Irrationale Zahlen, o.c.p. 315-334.
4. R. DEDEKIND, *Essays on the Theory of Numbers*, Dover Publications Inc., New York, 1963. (Engelse vertaling van (2) en (3)).
5. H. DIELS, W. KRANS, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, 6e ed., Brill, Leiden, 1969.
6. E.J. DIJKSTERHUIS, *De Elementen van Euclides I en II*, Noordhoff, Groningen, 1929.
7. H.-D. EBBINGHUIS et al., *Zahlen*, 3e Auflage, Springer, Berlin etc., 1992.
8. D.H. FOWLER, *The Mathematics of Plato's Academy*, Oxford, 1987.
9. T.L. HEATH, *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (translated from the Text of Heiberg), Dover Publications Inc., New York, 1956.

10. T.L. HEATH, *A History of Greek mathematics* I, II, Clarendon Press, Oxford, 1965.
11. I.L. HEIBERG, *Euclidis Elementa* (ed. E.S. Stamatis), Teubner, Leipzig, 1969.
12. I.L. HEIBERG, *Euclidis Elementa, Scholia in Libros VI-XIII* (ed. E.S. Stamatis), Teubner, Leipzig, 1977.
13. JAMBLICHUS-PORPHYRIUS, *Leven en leer van Pythagoras*, vertaling H.W.A. van Rooijen-Dijkman, Ambo, Baarn, 1987.
14. M. KLINE, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University press, New York, 1972.
15. W.B. KNORR, *The Evolution of the Euclidean Elements*, Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1975.
16. E. LANDAU, *Grundlagen der Analysis*, Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt, 1960.
17. F. LASSERRE, *Die Fragmente des Eudoxus von Knidos*, Berlin, 1966.
18. MAX STECK, *Proklos Diadochos, Kommentar zum Ersten Buch von Euklids* '*Elementa*' Halle, 1945.
19. C. THAER, *Euklid, die Elemente*, Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt, 1962, (Duitse vertaling).
20. Vacantiecursus 1991: *Meetkundige Structuren*, C.W.I. Amsterdam 1991.