

Hoofdstuk 8

De diffusievergelijking

8.1 Eenduidigheid

Laat $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$) een open, begrensd en samenhangend gebied zijn met een stuksgewijs gladde rand $\partial\Omega$. We beschouwen het probleem (zie ook (7.9), (7.10) en (7.11)):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty) = \{(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in \Omega, t > 0\}, \quad (8.1)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = u_r(\mathbf{x}, t) \quad \text{voor } (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_1 \times (0, \infty), \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = q_r(\mathbf{x}, t) \quad \text{voor } (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_2 \times (0, \infty), \quad (8.3)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \text{voor } \mathbf{x} \in \Omega \quad (8.4)$$

waarin D een positieve constante is en waarin u_r , q_r en u_0 gegeven functies zijn. We laten zien dat dit probleem ten hoogste één oplossing kan hebben (eenduidigheid). Daartoe beschouwen we eerst het volgende *vergelijkingsprincipe*.

Lemma 8.1.1 *Stel u_i , $i = 1, 2$, zijn oplossingen van (8.1)–(8.4) met begincondities u_{0i} en randcondities u_{ri} , q_{ri} . Als*

$$u_{r1} \leq u_{r2} \quad \text{in } \partial\Omega_1 \times (0, \infty), \quad q_{r1} \leq q_{r2} \quad \text{in } \partial\Omega_2 \times (0, \infty),$$

en

$$u_{01} \leq u_{02} \quad \text{in } \Omega,$$

dan geldt

$$u_1 \leq u_2 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty).$$

BEWIJS. Laat $j(s) = \max\{s, 0\}$ voor $-\infty < s < \infty$ en

$$J(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}s^2 & \text{voor } s \geq 0, \\ 0 & \text{voor } s < 0, \end{cases}$$

m.a.w. $J'(s) = j(s)$. We beschouwen nu de verschilfunctie $v = u_1 - u_2$. Deze voldoet ook aan vergelijking (8.1) en aan (8.2)–(8.4). met $u_r = u_{r1} - u_{r2}$, $q_r = q_{r1} - q_{r2}$, $u_0 = u_{01} - u_{02}$. We vermenigvuldigen de vergelijking voor v met $j(v)$ en integreren het resultaat over Ω . Dan ontstaat

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} J(v) d\Omega = -D \int_{\Omega} j'(v) \|\nabla v\|^2 d\Omega + D \int_{\partial\Omega} j(v) \frac{\partial v}{\partial n} dS,$$

en na integratie in t

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} J(v) d\Omega + D \int_0^t dt \int_{\Omega} j'(v) \|\nabla v\|^2 d\Omega + D \int_0^t dt \int_{\partial\Omega_2} j(v) (q_{r2} - q_{r1}) dS \\ = \int_{\Omega} J(u_{01} - u_{02}) d\Omega + D \int_0^t dt \int_{\partial\Omega_1} j(u_{r1} - u_{r2}) \frac{\partial v}{\partial n} dS. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Omdat de verschilfuncties $u_{01} - u_{02}$ en $u_{r1} - u_{r2}$, niet positief zijn en omdat $j(s) = J(s) = 0$ voor $s \leq 0$, reduceert (8.5) tot

$$\int_{\Omega} J(v) d\Omega + D \int_0^t dt \int_{\Omega} j'(v) \|\nabla v\|^2 d\Omega + D \int_0^t dt \int_{\partial\Omega_2} j(v) (q_{r2} - q_{r1}) dS = 0, \quad (8.6)$$

voor alle $t > 0$. Omdat alle termen niet negatief zijn, immers $q_{r2} \geq q_{r1}$, volgt

$$\int_{\Omega} J(v) d\Omega = 0 \quad \text{voor alle } t > 0.$$

We gebruiken vervolgens de continuïteit van v om te concluderen dat

$$v = u_1 - u_2 \leq 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty).$$

□

Het vergelijkingsprincipe zegt dus dat oplossingen geordend zijn overeenkomstig de ordening van de data. Met wat meer werk (zie bijvoorbeeld Protter & Weinberger [15]) kan worden aangetoond dat de ordening strikt is, d.w.z. $u_1 < u_2$ in Ω , tenzij $u_1 \equiv u_2$ in Ω . Een direct gevolg van het vergelijkingsprincipe is de eenduidigheid.

Gevolg 8.1.2 *Het diffusieprobleem (8.1)–(8.4) heeft ten hoogste één oplossing.*

BEWIJS. Stel dat bij één data set, d.w.z. u_0 , u_r en q_r , twee oplossingen u_1 en u_2 horen. We passen dan Lemma 8.1.1 toe en vinden zowel $u_1 \leq u_2$ als $u_2 \leq u_1$ in $\Omega \times (0, \infty)$. □

Als het gebied Ω onbegrensd is, kan het bovenstaande bewijs niet zonder meer worden toegepast (waarom?). We moeten dan ten aanzien van de oplossing

extra eisen stellen zoals begrensdsheid of bepaalde groeicondities op ‘oneindig’ (zie bijvoorbeeld Protter & Weinberger [15]). Het resultaat is dat in bijna alle gevallen eenduidigheid geldt.

Nu we eenduidigheid hebben vastgesteld, gaan we in de volgende paragrafen enkele oplosmethoden behandelen. Deze geven dus telkens de *unieke* oplossing.

8.2 Gelijkvormigheidsoplossing op $(0, \infty)$

Beschouw in het half-oneindige gebied $\{x > 0\}$ het diffusieprobleem

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} & x > 0, t > 0 \\ C(0, t) = C_1, & t > 0, \\ C(x, 0) = C_0 & x > 0. \end{cases}$$

Hierin zijn de rand- en beginconcentratie, C_0 en C_1 , constant. We maken de concentratie dimensieloos,

$$u(x, t) = \frac{C(x, t) - C_0}{C_1 - C_0} \quad (8.7)$$

en krijgen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 1 & t > 0, \\ u(x, 0) = 0 & x > 0. \end{cases} \quad (8.8)$$

We merken nu het volgende op. Laat $u = u(x, t)$ de unieke oplossing zijn van probleem (8.8). Omdat de rand- en begincondities en de diffusiecoëfficiënt constant zijn, geldt dat voor iedere $k > 0$

$$u_k(x, t) = u(kx, k^2t)$$

ook aan probleem (8.8) voldoet (ga na!). Wegens eenduidigheid moet dus gelden

$$u(x, t) = u_k(x, t) = u(kx, k^2t) \quad \text{voor alle } x > 0, t > 0,$$

en voor iedere $k > 0$. Neem nu $k = 1/\sqrt{t}$. Dan geldt

$$u(x, t) = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) \quad \text{voor alle } x > 0, t > 0,$$

met andere woorden: u hangt alleen af van de combinatie x/\sqrt{t} . We spreken dan van een gelijkvormigheidsoplossing, omdat voor iedere $t > 0$ het concentratieprofiel essentieel van dezelfde vorm is.

Samengevat hebben we aangetoond dat de oplossing van probleem (8.8) de volgende gedaante heeft:

$$u(x, t) = f(\eta) \quad \text{met} \quad \eta = x/\sqrt{t} \quad \text{en} \quad 0 < \eta < \infty.$$

De onbekende functie f is het gelijkvormigheidsprofiel.

Uitwerking van de differentiaties geeft

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{x}{t^{3/2}} \frac{df}{d\eta} = -\frac{1}{2} \frac{1}{t} \eta f'$$

en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{t} f'',$$

waarin de accenten differentiatie naar η aangeven. Substitutie van deze uitdrukkingen in de partiële differentiaalvergelijking van (8.8) leidt tot een gewone differentiaalvergelijking voor f ,

$$\frac{1}{2} \eta f' + D f'' = 0, \quad \eta > 0. \quad (8.9)$$

De randconditie (8.8) geeft

$$f(0) = 1, \quad (8.10)$$

en de beginconditie (8.8) geeft

$$f(\infty) = 0. \quad (8.11)$$

We moeten dus het randwaardeprobleem (8.9)–(8.11) oplossen. Daartoe stellen we $v = f'$ en krijgen

$$\frac{1}{2} \eta v + D v' = 0, \quad \eta > 0.$$

Door integratie vinden we

$$v(\eta) = A \exp\left(-\frac{\eta^2}{4D}\right),$$

en dus

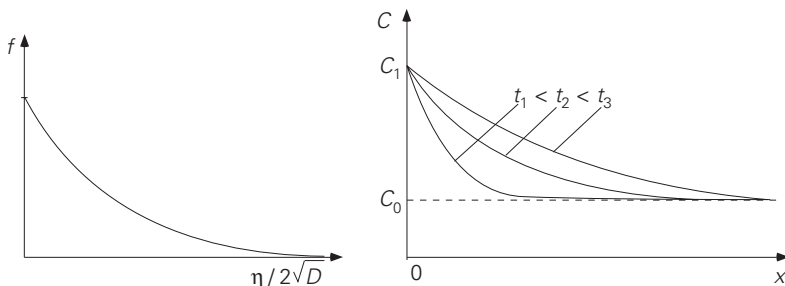
$$f(\eta) = A \int_0^\eta \exp\left(-\frac{s^2}{4D}\right) ds + B, \quad (8.12)$$

waarin A en B integratieconstanten zijn. Uit (8.10) volgt $B = 1$ en uit (8.11)

$$-1 = A \int_0^\infty \exp\left(-\frac{s^2}{4D}\right) ds = A 2\sqrt{D} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = A\sqrt{\pi D}.$$

We gebruiken vervolgens de definitie van de error-functie:

$$\operatorname{erf}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-t^2} dt, \quad -\infty < s < \infty,$$



Figuur 8.1: De grafieken voor $f(\eta)$ en de concentratie $C(x, t)$.

met $\operatorname{erf}(0) = 0$ en $\operatorname{erf}(\pm\infty) = \pm 1$, en de definitie voor de complementaire error-functie:

$$\operatorname{erfc}(s) = 1 - \operatorname{erf}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_s^{\infty} e^{-t^2} dt, \quad -\infty < s < \infty, \quad (8.13)$$

met $\operatorname{erfc}(\infty) = 0$, $\operatorname{erfc}(0) = 1$, $\operatorname{erfc}(-\infty) = 2$.

In (8.12) substitueren we $A = -1/\sqrt{\pi D}$ en we gebruiken uitdrukking (8.13). Dan ontstaat

$$f(\eta) = \operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{D}}\right), \quad \eta \geq 0$$

en dus

$$C(x, t) = (C_1 - C_0) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) + C_0,$$

voor $x > 0$ en $t > 0$.

We kunnen nu ook gemakkelijk de niveau-krommen van de concentratie $C(x, t)$ bepalen. Laten we kijken naar

$$C(x, t) = C_0 + \frac{1}{4}(C_1 - C_0) = \frac{3}{4}C_0 + \frac{1}{4}C_1.$$

Los dan met behulp van een tabel of computer op

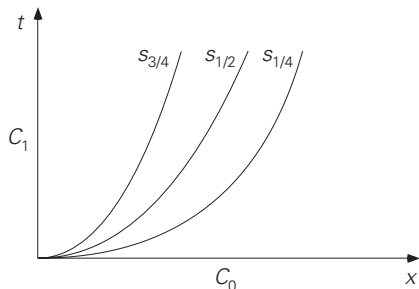
$$\operatorname{erfc}(s) = \frac{1}{4}, \quad \text{zeg } s = s_{\frac{1}{4}}.$$

Dan geldt $C(x, t) = \frac{3}{4}C_0 + \frac{1}{4}C_1$ langs de kromme

$$s_{\frac{1}{4}} = \frac{x}{2\sqrt{Dt}},$$

ofwel

$$x = 2s_{\frac{1}{4}}\sqrt{Dt}.$$



Figuur 8.2: Concentratie is constant langs parabolen in x, t -vlak.

8.3 Gelijkvormigheidsoplossing op $(-\infty, \infty)$

Beschouw nu een beginwaardeprobleem voor de diffusievergelijking.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad \text{voor } -\infty < x < \infty, t > 0, \quad (8.14)$$

met

$$C(x, 0) = \begin{cases} C_1 & x < x_0, \\ C_0 & x > x_0, \end{cases} \quad (8.15)$$

en $x_0 \in \mathbb{R}$. Na de schaling (8.7) ontstaat dan

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 & x < x_0, \\ 0 & x > x_0. \end{cases} \end{cases}$$

We zoeken weer een gelijkvormigheidsoplossing. Laat

$$u(x, t) = f(\eta), \quad \eta = (x - x_0)/\sqrt{t}.$$

Dan ontstaat voor f het randwaardeprobleem

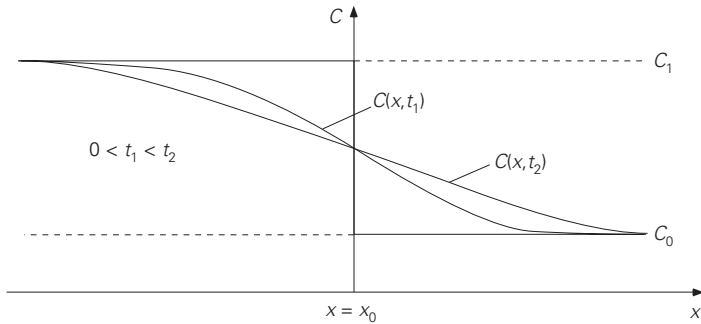
$$\begin{cases} \frac{1}{2}\eta f' + Df'' = 0 & -\infty < \eta < \infty, \\ f(-\infty) = 1, \quad f(+\infty) = 0. \end{cases}$$

Ga na dat de oplossing wordt gegeven door

$$f(\eta) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{D}}\right), \quad -\infty < \eta < \infty.$$

Voor de concentratie $C = C(x, t)$ betekent dit

$$C(x, t) = C_0 + \frac{1}{2}(C_1 - C_0) \operatorname{erfc}\left(\frac{x - x_0}{2\sqrt{Dt}}\right),$$



Figuur 8.3: Het verloop van de concentratie $C(x, t)$ op verschillende tijdstippen.

voor $-\infty < x < \infty$ en $t > 0$.

Merk op dat

- (i) $C(x_0, t) = \frac{1}{2}(C_0 + C_1)$ voor alle $t > 0$;
- (ii) de niveaulijnen van de concentratie in het x, t -vlak weer parabolen zijn, nu van de vorm $x = x_0 + \text{Const. } 2\sqrt{Dt}$.

8.4 Algemeen beginwaardeprobleem op $(-\infty, \infty)$

We beschouwen weer de diffusievergelijking (8.14), echter nu met een puls als beginconcentratie:

$$C(x, 0) = \begin{cases} C_1 & x < -a, \\ C_0 & -a < x < a, \\ C_1 & x > a, \end{cases} \tag{8.16}$$

met $a > 0$ en $C_0 > C_1$.

Merk op dat deze puls geschreven kan worden als de som van twee stapfuncties (zoals in (8.15)). We schrijven in plaats van (8.16)

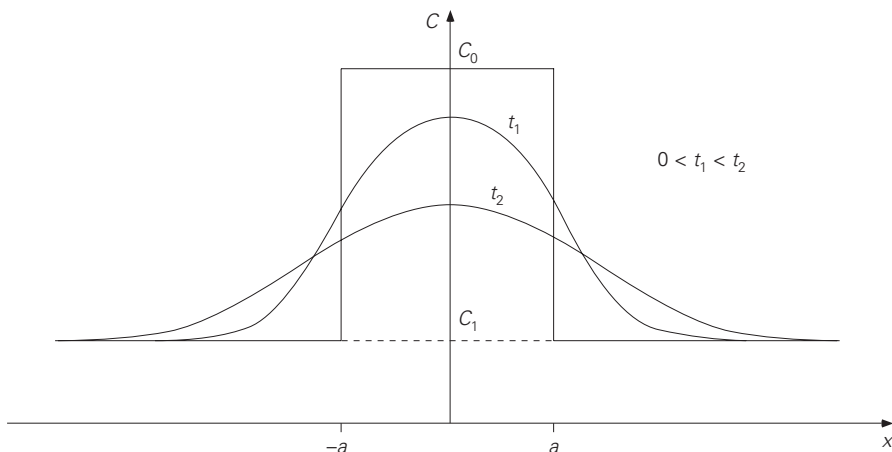
$$C(x, 0) = C_u(x, 0) + C_d(x, 0)$$

met

$$C_u(x, 0) = \begin{cases} C_1 & x < -a, \\ C_0 & x > -a, \end{cases} \tag{8.17}$$

en

$$C_d(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ C_1 - C_0 & x > a. \end{cases} \tag{8.18}$$



Figuur 8.4: Het diffusiegedrag van een puls bij toenemende tijd

Met beginconcentratie (8.17) correspondeert de oplossing

$$C_u(x, t) = C_0 + \frac{1}{2}(C_1 - C_0) \operatorname{erfc} \left(\frac{x+a}{2\sqrt{Dt}} \right)$$

en met (8.18)

$$C_d(x, t) = C_1 - C_0 + \frac{1}{2}(C_0 - C_1) \operatorname{erfc} \left(\frac{x-a}{2\sqrt{Dt}} \right).$$

Omdat de diffusievergelijking (8.14) *lineair* is, kunnen oplossingen bij elkaar worden opgeteld om nieuwe oplossingen te construeren. Tellen we C_u en C_d bij elkaar op dan ontstaat dus de oplossing corresponderend met beginverdeling (8.16). We krijgen

$$\begin{aligned} C(x, t) &= C_u(x, t) + C_d(x, t) \\ &= C_1 + \frac{1}{2}(C_0 - C_1) \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{x-a}{2\sqrt{Dt}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{x+a}{2\sqrt{Dt}} \right) \right\} \\ &= C_1 + \frac{C_0 - C_1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-a}{2\sqrt{Dt}}}^{\frac{x+a}{2\sqrt{Dt}}} e^{-s^2} ds, \end{aligned} \quad (8.19)$$

voor $-\infty < x < \infty$, $t > 0$.

Kiezen we voor C_0 en C_1 de bijzondere waarden

$$C_1 = 0 \text{ en } C_0 = \frac{M}{2a},$$

dan geldt

$$\lim_{a \downarrow 0} C(x, 0) = 0 \text{ voor alle } x \neq 0$$

en

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C(x, 0) dx = M \text{ voor alle } a > 0.$$

In de limiet, voor $a \downarrow 0$, schrijven we

$$C(x, 0) = M\delta(x), \quad (8.20)$$

waarin δ de *Dirac-distributie* voorstelt. De corresponderende oplossing wordt gevonden door in (8.19) de limiet $a \downarrow 0$ te nemen. Er ontstaat dan

$$C(x, t) = \frac{M}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right), \quad (8.21)$$

voor $-\infty < x < \infty$, $t > 0$. Dit wordt de *fundamentele oplossing* van de diffusievergelijking genoemd.

Voor iedere continue functie $f \in C(\mathbb{R})$ hebben we de gelijkheid (zie ook (6.19)):

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y-x)f(y) dy \quad \left(= \lim_{a \downarrow 0} \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(y) dy \right)$$

We passen dit toe om een uitdrukking te construeren voor de oplossing van het algemene beginwaardeprobleem voor de diffusievergelijking met

$$C(x, 0) = C_0(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

waarin C_0 een continue en begrensde, maar verder willekeurig gekozen, beginverdeling is. Met

$$\delta(y-x)C_0(y)$$

op $t = 0$, correspondeert de oplossing (zie (8.20) en (8.21))

$$\frac{C_0(y)}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4Dt}\right).$$

Dus met

$$C_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y-x)C_0(y) dy$$

op $t = 0$, correspondeert de oplossing

$$C(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{D\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} C_0(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4Dt}\right) dy$$

voor $-\infty < x < \infty$, $t > 0$. Met behulp van deze uitdrukking kunnen we het volgende aantonen.

- (i) *Vergelijkingsprincipe*. Als twee continue en begrensde initiële concentraties geordend zijn volgens

$$C_{01}(x) \geq C_{02}(x) \text{ voor } -\infty < x < \infty \quad (C_{01} \neq C_{02})$$

dan geldt voor de corresponderende oplossingen

$$C_1(x, t) > C_2(x, t) \text{ voor } -\infty < x < \infty, t > 0.$$

Merk op dat hier een strikte ongelijkheid geldt (vergelijk met Lemma 8.1.1).

- (ii) *Oneindige voortplantingssnelheid*. Als de initiële concentratie de vorm

$$C_0(x) = \begin{cases} > 0 & |x| < a, \\ 0 & |x| > a, \end{cases}$$

met $a > 0$ heeft, dan geldt

$$C(x, t) > 0 \text{ voor } -\infty < x < \infty, t > 0.$$

Dus deze verstoring plant zich voort met een oneindige snelheid! Hiermee hebben we een defect aan het diffusiemodel aangetoond. We zullen in hoofdstuk 11 een niet-lineaire diffusievergelijking bespreken waarvoor wel een eindige voortplantingssnelheid bestaat.

8.5 Randwaardeprobleem op $(0, L)$

Zoeken we op het eindige interval $(0, L)$ een oplossing, dan moeten we in de eindpunten $x = 0$ en $x = L$ randcondities stellen. In het volgende probleem schrijven we de functiewaarden voor:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} & 0 < x < L, t > 0, \\ C(0, t) = C_l, \quad C(L, t) = C_r & t > 0, \\ C(x, 0) = C_0(x) & 0 < x < L. \end{cases} \quad (8.22)$$

We reduceren eerst het probleem zodat homogene ($= 0$) randwaarden ontstaan. Dit gaat als volgt. Laat

$$\bar{C}(x) = Ax + B, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Merk op dat deze functie aan de differentiaalvergelijking (8.22) voldoet. We kiezen nu A en B zodat ook aan de randwaarden (8.22) is voldaan:

$$\bar{C}(0) = C_l \Rightarrow B = C_l$$

en

$$\bar{C}(L) = C_r \Rightarrow AL + C_l = C_r, \quad \text{m.a.w. } A = \frac{C_r - C_l}{L}.$$

Dit geeft

$$\bar{C}(x) = \frac{C_r - C_l}{L}x + C_l, \quad 0 < x < L.$$

Deze uitdrukking kunnen we opvatten als de *stationaire warmte- of concentratieverdeling*.

We bekijken vervolgens het verschil

$$u(x, t) = C(x, t) - \bar{C}(x), \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

Voor deze functie ontstaat nu een diffusieprobleem met homogene randwaarden

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t > 0, \\ u(x, 0) = C_0(x) - \bar{C}(x) =: u_0(x) & 0 < x < L. \end{cases} \quad (8.23)$$

Evenals in het voorbeeld van het trillend membraan (zie deel II, paragraaf 5.4) passen we de methode van scheiden van variabelen toe. We gaan eerst een voorraad oplossingen aanleggen door te stellen

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

Substitutie van deze vorm in vergelijking (8.23) geeft

$$XT' = DTX'' \quad \text{voor } 0 < x < L, \quad t > 0,$$

ofwel

$$\frac{1}{D} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \text{constant} = -\lambda^2 \text{ (zeg)}.$$

We krijgen dus weer twee gewone differentiaalvergelijkingen. Voor T ontstaat

$$T' + \lambda^2 DT = 0, \quad t > 0, \quad (8.24)$$

en voor X ontstaat

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, & 0 < x < L, \\ X(0) = X(L) = 0, \end{cases} \quad (8.25)$$

waarin de randcondities een direct gevolg zijn van randcondities (8.23). Het randwaardeprobleem (8.25) is een eigenwaardeprobleem van het type Sturm-Liouville. We zijn dit al eerder tegengekomen in deel II, paragraaf 4.2, bij de

behandeling van een deeltje in een oneindig diepe potentiaalput, zie vergelijking (4.4). We vinden alleen niet-triviale oplossingen voor de eigenwaarden

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.26)$$

met als orthogonale eigenfuncties

$$X = X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Met (8.26) wordt de oplossing van vergelijking (8.24)

$$T(t) = \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}\right), \quad t > 0.$$

We vinden dus als voorraad oplossingen

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}\right), \quad (8.27)$$

voor $0 < x < L$, $t > 0$ en $n = 1, 2, 3, \dots$. Deze functies voldoen allemaal aan de partiële differentiaalvergelijking (8.23) en de bijbehorende homogene randwaarden. Omdat de vergelijking *lineair* is, voldoet iedere lineaire combinatie van de functies (8.27) aan vergelijking (8.23) en aan de homogene randwaarden.

Wat is de situatie op $t = 0$? We hebben

$$u_n(x, 0) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Dus als u_0 uit (8.23) van de vorm

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (N \in \mathbb{N}), \quad (8.28)$$

is, dan ontstaat als bijbehorende oplossing

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (8.29)$$

en dus

$$C(x, t) = \bar{C}(x) + u(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0.$$

Merk op dat

$$C(x, t) \rightarrow \bar{C}(x) \text{ als } t \rightarrow \infty, \text{ uniform voor } 0 \leq x \leq L.$$

Deze methode lijkt dus alleen maar te werken voor zeer speciale begincondities, namelijk als u_0 kan worden geschreven als een lineaire combinatie van sinustermen zoals in (8.28). We kunnen echter de theorie zoals verwoord in Stelling 6.2.5

toepassen en u_0 , mits voldoende glad, schrijven als de oneindige som (of Fourierreeks)

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (8.30)$$

waarin de convergentieresultaten van Stelling 6.2.5 gelden. De *Fourier-coëfficiënten* c_n worden dan gebruikt in (8.28), met $N = \infty$, en geven zo een uitdrukking voor de oplossing van het algemene beginwaardeprobleem. Merk op dat we bij het bepalen van de Fourier-coëfficiënten in (6.13) gebruik maken van het orthonormale stelsel $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Deze normering heeft hier nog niet plaats gevonden.

Een ander soort randwaardeprobleem ontstaat als de uiteinden geen deeltjes of warmte doorlaten. We spreken dan van geïsoleerde uiteinden (zie (7.12)). We vinden dan voor de concentratie of temperatuur het probleem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & 0 < x < L. \end{cases} \quad (8.31)$$

Stellen we weer

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

dan ontstaat voor T

$$T' + \lambda^2 DT = 0, \quad t > 0, \quad (8.32)$$

en voor X het Sturm-Liouville-eigenwaardeprobleem

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, & 0 < x < L, \\ X'(0) = X'(L) = 0. \end{cases}$$

Dit geeft de eigenwaarden

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.33)$$

(*Let op*: nu nemen we $n = 0$ wel mee) en de eigenfuncties

$$X = X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Met (8.33) lossen we vergelijking (8.32) op en we vinden als voorraad oplossingen

$$u_n(x, t) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}\right), \quad (8.34)$$

voor $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$ en voor $n \in \mathbb{N}$ (dus inclusief $n = 0$). Deze functies voldoen allemaal aan de differentiaalvergelijking en de randvoorwaarden van (8.31). Schrijven we met behulp van Stelling 6.2.5

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (8.35)$$

m.a.w. ontwikkelen we u_0 in cosinus termen, dan krijgen we als oplossing van (8.31):

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}\right), \quad (8.36)$$

voor $0 \leq x \leq L$ en $t \geq 0$. Hoewel de reeksontwikkelingen (8.30) en (8.35) volgen uit de theorie van hoofdstuk 6, zullen we in de volgende paragraaf het bijzondere geval van Fourier-sinus- en Fourier-cosinusreeksen bespreken.

Merk op dat oplossing (8.36) voldoet aan

$$u(x, t) \rightarrow c_0 \text{ als } t \rightarrow \infty, \text{ uniform voor } 0 \leq x \leq L,$$

en

$$\int_0^L u(x, t) dx = c_0 L, \text{ voor alle } t \geq 0, \quad (8.37)$$

m.a.w. de totale hoeveelheid massa of warmte is constant; er vindt t.g.v. de diffusie alleen een herverdeling plaats. Omdat (8.37) ook geldt voor $t = 0$, vinden we

$$c_0 = \frac{1}{L} \int_0^L u_0(x) dx = \text{de gemiddelde waarde van } u_0(x).$$

Verder merken we op dat de reeksen (8.29) en (8.36) voor iedere $t > 0$ uniform convergeren wegens de factoren $\exp(-n^2\pi^2 Dt/L^2)$. Dit geldt ook voor iedere afgeleide naar t , dus voor $\frac{\partial^n u}{\partial t^n}$ met $n \in \mathbb{N}$ (ga na!). Als gevolg hiervan is u oneindig vaak differentieerbaar met betrekking tot x en t in het oplossingsgebied $\{(x, t) : 0 \leq x \leq L, t > 0\}$. We noteren dit als

$$u \in C^\infty([0, L] \times (0, \infty)).$$

De beginconditie u_0 heeft in het algemeen deze gladheid niet. Het extreme geval is de fundamentele oplossing (8.21), waarin u_0 een Dirac-distributie is. Ook hier geldt

$$u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty)),$$

met andere woorden: de bijbehorende (fundamentele) oplossing is oneindig vaak differentieerbaar in x en t voor iedere $t > 0$.

8.6 Fourier-reeksen met sinus- en cosinustermen

We geven hier een korte samenvatting van deze bijzondere Fourier-reeksen. We verwijzen naar Churchill & Brown [5] voor de theoretische achtergrond en naar Spiegel [19] voor veel rekenvoorbeelden.

Bij gegeven $L > 0$, beschouwen we de rij functies

$$\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), \dots, \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \dots, \quad (8.38)$$

voor $-L \leq x \leq L$. Deze functies vormen een orthonormaal stelsel op $(-L, L)$, d.w.z. voor ieder tweetal f en g uit de rij (8.38) geldt

$$\int_{-L}^{+L} f(x)g(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{als } f \text{ en } g \text{ verschillend,} \\ 1 & \text{als } f \text{ en } g \text{ hetzelfde.} \end{cases} \quad (8.39)$$

Met functies uit (8.38) wordt een *trigonometrisch polynoom* gemaakt. Laat dit gegeven zijn door

$$s_N(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}.$$

Wegens (8.39) geldt dan voor de coëfficiënten

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} s_N(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

en

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} s_N(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Een *trigonometrische reeks* is een reeks van de vorm

$$s(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\},$$

met $-L \leq x \leq L$, waarbij de som gedefinieerd is voor zover de reeks convergent is. De vraag is, of ook hier geldt

$$\begin{Bmatrix} a_n \\ b_n \end{Bmatrix} \stackrel{?}{=} \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} s(x) \begin{Bmatrix} \cos(n\pi x/L) \\ \sin(n\pi x/L) \end{Bmatrix} dx.$$

Deze vraag komt neer op de vraag of

$$\int_{-L}^{+L} \sum_{n=1}^{\infty} \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^{+L}. \quad (8.40)$$

Het antwoord op deze vraag is lang niet altijd bevestigend. Alleen als de reeks *uniform convergeert*, dan is (8.40) toegestaan. Wat te doen in de andere gevallen? Om dit te onderzoeken beschouwen we het volgende.

Laat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodiek zijn met periode $2L$ (d.w.z. $f(x) = f(x + 2L)$) en laat f integreerbaar zijn over een periode. Van zo'n gegeven functie kunnen we *Fourier-coëfficiënten* berekenen:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.41)$$

en

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.42)$$

Als de functie f *even* is ten opzichte van $x = 0$, d.w.z. $f(x) = f(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, dan vinden we voor de Fourier-coëfficiënten

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.43)$$

en

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.44)$$

Als daarentegen de functie f *oneven* is ten opzichte van $x = 0$, d.w.z. $f(x) = -f(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, dan vinden we

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.45)$$

en

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.46)$$

Als de Fourier-coëfficiënten bekend zijn, dan bekijken we de trigonometrische reeks

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}$$

voor $-\infty < x < \infty$. We noemen dit de *Fourier-reeks* van f . Er doen zich nu twee vragen voor:

- (i) Onder welke voorwaarden voor de functie f convergeert de Fourier-reeks van f , puntsgewijs op \mathbb{R} ?
- (ii) Als de Fourier-reeks van f convergent is voor zekere $x \in \mathbb{R}$ wat heeft de som $s(x)$ dan te maken met $f(x)$?

Om deze vragen te beantwoorden moeten er extra eisen worden gesteld aan de functie f , net zoals in Stelling 6.2.5. We beperken ons tot het volgende geval.

Stelling 8.6.1 *Laat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodiek zijn met periode $2L$ en laten f en f' stuksgewijs continu zijn over een periode, zeg $[-L, L]$. Dan is de Fourier-reeks van f convergent voor iedere $x \in [-L, L]$ (en natuurlijk ook daarbuiten wegens de periodiciteit) met som $s(x)$ waarvoor geldt*

$$s(x) = \frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}, \quad -L \leq x \leq L.$$

We geven eerst een voorbeeld en keren dan terug naar de diffusieproblemen van paragraaf 8.5.

Voorbeeld 8.6.2. Laat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x \leq 0, \\ x^2 & 0 \leq x < \pi, \\ 0 & x = \pi, \end{cases}$$

en laat f verder 2π -periodiek zijn. Ga na dat deze functie aan de condities van Stelling 8.6.1 voldoet met $L = \pi$. We berekenen eerst de Fourier-coëfficiënten (8.41) en (8.42):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{1}{3}\pi^2.$$

Voor $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos nx dx = \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi x^2 d \sin nx, \\ &= -\frac{2}{n^2\pi} \int_0^\pi x \sin nx dx = \frac{2}{n^2\pi} \int_0^\pi x d \cos nx, \\ &= \frac{2}{n^2\pi} x \cos nx \Big|_0^\pi - \frac{2}{n^2\pi^2} \int_0^\pi \cos nx dx, \\ &= \frac{2}{n^2} \cos n\pi = \frac{2}{n^2}(-1)^n, \end{aligned}$$

en

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x^2 \sin nx dx = \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{n^3\pi}[(-1)^n - 1].$$

Dit geeft de Fourier-reeks

$$\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}(-1)^n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{n^3\pi}[(-1)^n - 1] \right\} \sin nx.$$

Deze reeks is convergent met som $s(x)$ waarvoor geldt:

$$s(x) = f(x) \quad \text{voor } -\pi < x < \pi$$

en

$$s(-\pi) = s(\pi) = \frac{1}{2} [f(\pi + 0) + f(\pi - 0)] = \frac{\pi^2}{2}.$$

Uit zulke convergentieresultaten kunnen soms interessante identiteiten worden gehaald. Zo volgt uit $s(0) = 0$

$$0 = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} (-1)^n,$$

of

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}.$$

Uit $s(\pi) = \frac{\pi^2}{2}$ volgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

Bij de diffusievergelijkingen ontstond het probleem om een gegeven initiële verdeling $u_0(x)$, $0 \leq x \leq L$, te schrijven óf in termen van $\sin(n\pi x/L)$, zie (8.30), óf in termen van $\cos(n\pi x/L)$, zie (8.35). Hoe doen we dat? De truc is de volgende.

Om (8.30) te krijgen zetten we u_0 oneven voort als een $2L$ -periodieke functie. Dat wil zeggen, definieer $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \begin{cases} u_0(x) & 0 \leq x \leq L, \\ -u_0(-x) & -L < x < 0, \end{cases}$$

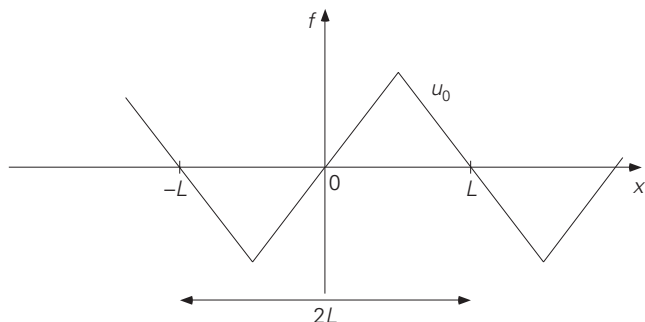
en verder $2L$ -periodiek (d.w.z. $f(x+2L) = f(x)$). De Fourier-reeks van f wordt dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \text{met} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

(zie ook (8.45) en (8.46)). Merk op dat deze coëfficiënten overeenstemmen met (6.13), indien we de sinus-termen normeren op $(0, L)$. Deze coëfficiënten worden gebruikt om de voorraad oplossingen $\{u_n(x, t)\}_{n=1}^{\infty}$, zie ook (8.27), te combineren. Er ontstaat dan voor $0 \leq x \leq L$, $t > 0$ de oplossing

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 D t}{L^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (8.47)$$

Zoals eerder opgemerkt, impliceren de factoren $\exp(-n^2 \pi^2 D t / L^2)$ dat deze reeks uniform convergeert op $[0, L]$ voor iedere $t > 0$. Op $t = 0$ zien we dat (8.47) convergeert in de zin van Stelling 8.6.1.

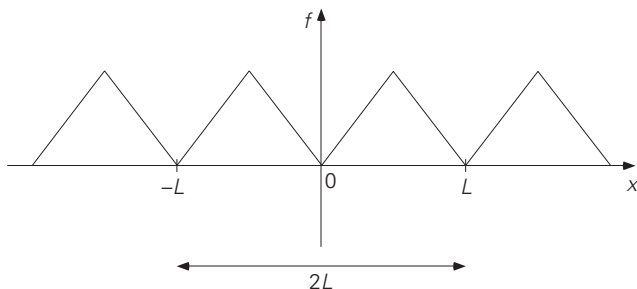


Figuur 8.5: Voorbeeld van constructie van f : oneven voortzetting

Om (8.35) te krijgen zetten we u_0 even voort als een $2L$ -periodieke functie. Dat wil zeggen, definieer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \begin{cases} u_0(x) & 0 \leq x \leq L, \\ u_0(-x) & -L < x < 0, \end{cases}$$

en verder $2L$ -periodiek. De Fourier-reeks van f wordt dan



Figuur 8.6: Voorbeeld van constructie van f : even-voortzetting

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \text{met} \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

(zie ook (8.43) en (8.44)). Deze coëfficiënten worden weer gebruikt om de oplossingen $\{u_n(x, t)\}_{n=1}^{\infty}$, gedefinieerd in (8.34), te combineren. Dit geeft de oplossing

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 D t}{L^2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

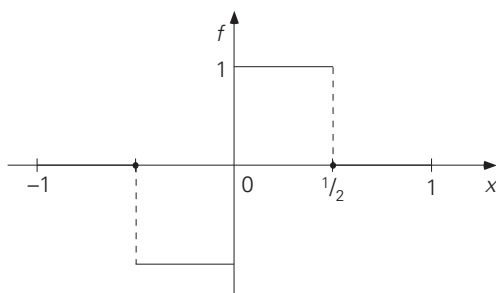
voor $0 \leq x \leq L$, $t > 0$. De beginwaarde u_0 wordt weer aangenomen in de zin van Stelling 8.6.1.

Voorbeeld 8.6.3. Laat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1/2, \\ 0 & 1/2 \leq x < 1. \end{cases}$$

We zetten f zowel even als oneven voort als een $2L$ -periodieke functie ($L = 1$). In beide gevallen berekenen we de Fourier-coëfficiënten.

(i) Oneven voortzetting van $f(x)$ (Fourier-sinusreeks)



Figuur 8.7: Oneven voortzetting van $f(x)$.

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0,$$

voor $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= 2 \int_0^{1/2} \sin(n\pi x) dx = -\frac{2}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_0^{1/2} = \frac{2}{n\pi} - \frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

voor $n = 1, 2, \dots$

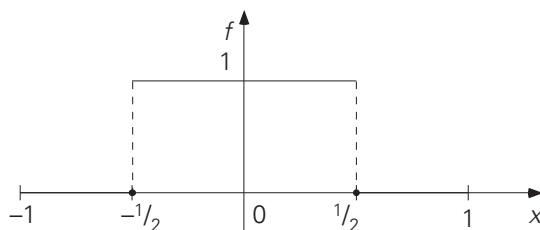
Als $f(x)$ de beginverdeling is van een diffusieprobleem op $[0, 1]$ met homogene randvoorwaarden (zie (8.23)), dan heeft dit als oplossing voor $0 \leq x \leq 1$, $t > 0$,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{n\pi} - \frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right\} e^{-n^2\pi^2 Dt} \sin(n\pi x).$$

Deze reeks convergeert uniform op $[0, 1]$ voor iedere $t > 0$. Op $t = 0$ vinden we volgens Stelling 8.6.1

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ 1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right\} \sin(n\pi x) = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ 1 & 0 < x < 1/2, \\ 1/2 & x = 1/2, \\ 0 & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

(ii) Even voortzetting van $f(x)$ (Fourier-cosinusreeks)



Figuur 8.8: Even voortzetting van $f(x)$.

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx = 1,$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 2 \int_0^{1/2} \cos(n\pi x) dx = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

voor $n = 1, 2, \dots$, en

$$b_n = 0 \quad \forall n \geq 1.$$

Als $f(x)$ de beginverdeling is van een diffusieprobleem op $[0, 1]$ met geïsoleerde randen (zie (8.31)), dan heeft het als oplossing van $0 \leq x \leq 1$, $t > 0$,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{-n^2\pi^2 Dt} \cos(n\pi x).$$

Deze reeks convergeert uniform op $[0, 1]$ voor iedere $t > 0$. Op $t = 0$ vinden we volgens Stelling 8.6.1

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n\pi x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2, \\ 1/2 & x = 1/2, \\ 0 & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Het feit dat voor beide oplossingen in (i) en (ii) geldt dat $\lim_{t \downarrow 0} u(\frac{1}{2}, t) = \frac{1}{2}$ is niet zo verwonderlijk. Voor kleine $t > 0$ kunnen we de randen $x = 0$ en $x = 1$ oneindig ver weg denken ten opzichte van de sprongdiscontinuïteit bij $x = \frac{1}{2}$. Vergelijk het gedrag dan met de gelijkvormigheidsoplossing op $(-\infty, \infty)$ zoals besproken in paragraaf 8.4

□

Opgaven

1. Bepaal de fundamentele oplossing van de convectie-diffusievergelijking met afbraak (reactieterm):

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v \frac{\partial C}{\partial x} - \lambda C, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ C(x, 0) = M\delta(x), \end{cases}$$

met $D > 0$, $v \geq 0$, $\lambda \geq 0$.

2. Bepaal de Fourier-reeks van de volgende functies.

$$(a) f(x) = \begin{cases} -l - x, & -l \leq x < 0, \\ l - x, & 0 \leq x < l, \end{cases} \quad f(x+2l) = f(x)$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0, \\ 1-x, & 0 \leq x < 1, \end{cases} \quad f(x+2) = f(x)$$

3. Bepaal de Fourier-reeks van de volgende functies door even of oneven periodieke voortzetting.

$$(a) f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2, \end{cases} \quad \text{sinusreeks, periode 4}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \pi, \\ 0, & \pi \leq x < 2\pi, \end{cases} \quad \text{cosinusreeks, periode } 4\pi$$

4. Bepaal de oplossing $u(x, t)$ van het diffusieprobleem in een staaf van lengte l met geïsoleerde uiteinden voor de volgende beginverdelingen.

$$(a) u_0(x) = x, \quad 0 \leq x \leq l$$

$$(b) u_0(x) = \sin(\pi x/l), \quad 0 \leq x \leq l$$

5. Bepaal de oplossing $u(x, t)$ voor het diffusieprobleem met homogene randvoorwaarden op het gebied $0 < x < 2$, als

$$u_0(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

6. Laat $D > 0$ een positieve constante zijn in het diffusieprobleem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{voor } 0 < x < 1, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0 & \text{voor } t > 0, \\ u(x, 0) = e^x & \text{voor } 0 < x < 1. \end{cases}$$

- (a) Bepaal de oplossing $u = u(x, t)$ in termen van een Fourier-reeks.

- (b) Bepaal $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$.

7. Laat $D > 0$ een positieve constante zijn in het diffusieprobleem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{voor } 0 < x < 1, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0 & \text{voor } t > 0, \\ u(x, 0) = x(1 - x) & \text{voor } 0 < x < 1. \end{cases}$$

(a) Bepaal de oplossing $u = u(x, t)$ in termen van een Fourier-reeks.

(b) Bepaal $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$.

8. Beschouw het reactie-diffusieprobleem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ku, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = 1, & x > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

waarin D en k constanten zijn met $D > 0$ en $-\infty < k < \infty$.

(a) Bepaal m zodat door de transformatie $u(x, t) = e^{mt}v(x, t)$ de reactie-diffusievergelijking voor u overgaat in

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{met} \quad v(x, 0) = 1, \quad v(0, t) = 0.$$

(b) Bepaal van dit probleem de gelijkvormigheidsoplossing. Dat wil zeggen, zoek een oplossing van de vorm

$$v(x, t) = f(\eta) \quad \text{met} \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{t}}.$$

(c) Bepaal voor vaste $x > 0$ de limiet $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$. Onderscheid de gevallen $k \leq 0$ en $k > 0$.

Hoofdstuk 11

Enkele niet-lineaire vergelijkingen

11.1 De poreuze-mediavergelijking

We zagen in paragraaf 8.4 dat de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$(L) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{voor } -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = M\delta(x) & \text{voor } -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

wordt gegeven door

$$u(x, t) = \frac{M}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad \text{voor } -\infty < x < \infty, t > 0. \quad (11.1)$$

We noemen deze uitdrukking de fundamentele oplossing van de diffusievergelijking met constante diffusiecoëfficiënt $D > 0$. In deze paragraaf onderzoeken we een niet-lineaire versie van Probleem (L), namelijk

$$(NL) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} & \text{voor } -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = M\delta(x) & \text{voor } -\infty < x < \infty, \\ u \geq 0, \end{cases} \quad (11.2)$$

waarin $m > 1$ een constante is. Omdat vergelijking (11.2) de stroming van een isentroop gas met dichtheid u in een poreus gesteente beschrijft (zie bijvoorbeeld Muskat [13]) spreken we van de *poreuze-mediavergelijking*. Deze vergelijking treedt echter in meer modellen op: bijvoorbeeld als de warmtegeleidingscoëfficiënt van de temperatuur afhangt volgens $\kappa(T) \propto T^{m-1}$ (zie de afleiding van vergelijking (7.17)) of in een model van warmtetransport ten gevolge

van straling in geïoniseerde gassen (Zel'dovich & Raizer [24]). Verder is vergelijking (11.2) vanuit wiskundig standpunt een interessante modelvergelijking voor niet-lineaire diffusie omdat de diffusiecoëfficiënt $D(u) = mu^{m-1}$ de eigenschap heeft dat $D(u) > 0$ als $u > 0$ terwijl $D(0) = 0$. We zeggen dat het diffusieproces *degenereert* als $u \downarrow 0$. We zullen aan de oplossing van Probleem (NL) zien dat deze degeneratie het kwalitatieve gedrag drastisch beïnvloed.

Belangrijk in de constructie van de oplossing van Probleem (NL) is de observatie dat massabehoud moet gelden:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) dx = M \quad \text{voor alle } t > 0. \quad (11.3)$$

Om Probleem (NL) aan te pakken maken we een gelijkvormigheidstransformatie: we schrijven

$$u(x, t) = t^\alpha f(\eta) \quad \text{met} \quad \eta = \frac{x}{t^\beta}, \quad (11.4)$$

waarin de constanten α en β en de functie f uit (11.2), (11.3) moeten worden bepaald. Substitutie van (11.4) in (11.3) geeft

$$t^{\alpha+\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta) d\eta = M \quad \text{voor alle } t > 0. \quad (11.5)$$

Dit impliceert

$$\alpha + \beta = 0 \quad (11.6)$$

en

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta) d\eta = M. \quad (11.7)$$

Substitutie van (11.4) in vergelijking (11.2) geeft

$$\alpha t^{\alpha-1} f - \beta t^{\alpha-1} \eta f' = t^{\alpha m - 2\beta} (f^m)'', \quad (11.8)$$

waarin de accenten differentiatie naar η aangeven. Gebruiken we hierin (11.6) dan ontstaat

$$\alpha t^{\alpha-1} (f + \eta f') = t^{\alpha m + 2\alpha} (f^m)'', \quad (11.9)$$

voor alle $t > 0$ en voor alle $-\infty < \eta < \infty$. Dit betekent dat

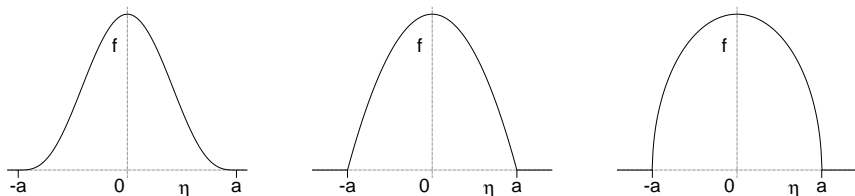
$$\alpha - 1 = \alpha m + 2\alpha \quad \text{of} \quad \alpha = \frac{-1}{m+1} \quad (11.10)$$

en

$$(f^m)'' + \frac{1}{m+1} (\eta f)' = 0, \quad (11.11)$$

voor $-\infty < \eta < \infty$. We zoeken van deze vergelijking de oplossing die aan (11.7) voldoet. Omdat $f(\pm\infty) = 0$, geeft integratie

$$(f^m)' + \frac{1}{m+1} \eta f = 0 \quad (11.12)$$



Figuur 11.1: Gelijkvormigheidsprofiel (11.15) voor $1 < m < 2$ (links), $m = 2$ (midden) en $m > 2$ (rechts).

of

$$f \left\{ m f^{m-2} f' + \frac{1}{m+1} \eta \right\} = 0 \quad (11.13)$$

voor $-\infty < \eta < \infty$. Dit betekent

$$\begin{cases} f = 0, \\ m f^{m-2} f' + \frac{1}{m+1} \eta = 0 \quad \text{als } f > 0. \end{cases} \quad (11.14)$$

Deze uitdrukking kunnen we verder integreren. Als resultaat vinden we voor f (zie ook figuur 11.1)

$$f(\eta) = \left(f^{m-1}(0) - \frac{(m-1)\eta^2}{2m(m+1)} \right)_+^{\frac{1}{m-1}} \quad \text{voor } -\infty < \eta < \infty. \quad (11.15)$$

Hierin gebruiken we de notatie $(s)_+ = \max\{s, 0\}$. De constante $f(0)$ wordt bepaald uit de massa conditie (11.7), zie Barenblatt [1] en Pattle [14]. De punten $\eta = \pm a$ waar f nul wordt vinden we uit (11.15):

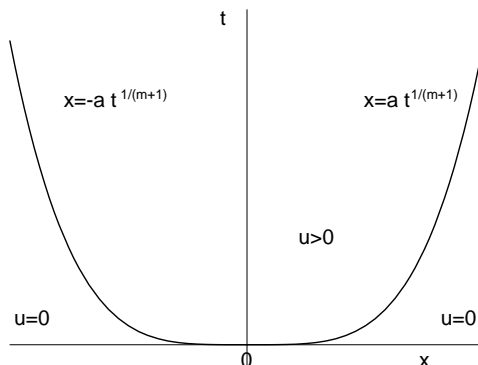
$$a = \sqrt{\frac{2m(m+1)f^{m-1}(0)}{m-1}}. \quad (11.16)$$

Uitgedrukt in de oorspronkelijke variabelen u , x en t (zie (11.4)) krijgen we

$$u(x, t) = t^{-\frac{1}{m+1}} f(0) \left(1 - \left(\frac{x}{at^{\frac{1}{m+1}}} \right)^2 \right)_+^{\frac{1}{m-1}}, \quad (11.17)$$

voor $-\infty < x < \infty$ en $t > 0$. Merk op dat deze oplossing twee fronten heeft die het gebied waar $u > 0$ scheiden van de gebieden waar $u = 0$ (figuur 11.2). Zij worden gegeven door $x = \pm at^{\frac{1}{m+1}}$. Het bestaan van dergelijke fronten wordt veroorzaakt door het gedegenereerde karakter van vergelijking (11.2).

Er is in de afgelopen vijftig jaar veel theorie over de poreuze-mediavergelijking ontwikkeld. Deze theorie heeft betrekking op kwesties zoals existentie



Figuur 11.2: Fundamentele oplossing met fronten.

en eenduidigheid voor het algemene beginwaarde probleem, het asymptotisch gedrag van oplossingen als $t \rightarrow \infty$, het asymptotisch gedrag van de fronten als $t \rightarrow \infty$, gladheid (differentieerbaarheid) van de fronten, enz. Een duidelijk overzicht van de resultaten wordt gegeven door Vázquez [22].

11.2 De Burgers-vergelijking

Als eenvoudig model voor turbulentie formuleerde Burgers [3] de vergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{voor } -\infty < x < \infty, t > 0, \quad (11.18)$$

Dit is een vergelijking met lineaire diffusie en niet-lineaire convectie. In (11.18) is u een maat voor de vloeistofsnelheid en $\nu > 0$ de kinematische viscositeit. We onderzoeken hier twee verschillende oplossingen van vergelijking (11.18), namelijk lopende golven en de fundamentele oplossing.

11.2.1 Lopende golven

Laat $u_l, u_r \in \mathbb{R}$ twee constanten zijn. We zoeken hier oplossingen van (11.18) die voldoen aan

$$u(-\infty, t) = u_l \quad \text{en} \quad u(+\infty, t) = u_r \quad \forall t > 0, \quad (11.19)$$

en de vorm van lopende golven hebben:

$$u(x, t) = f(\eta) \quad \text{met} \quad \eta = x - ct. \quad (11.20)$$

Hier is $c \in \mathbb{R}$ de golfsnelheid en $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ het golfprofiel. Beide zijn onbekend en moeten uit de vergelijking en randwaarden worden bepaald. Substitutie van (11.20) in (11.18) en (11.19) levert voor f het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} -cf' + \left(\frac{f^2}{2}\right)' = \nu f'' & \text{voor } -\infty < \eta < \infty, \\ f(-\infty) = u_l, \quad f(+\infty) = u_r. \end{cases} \quad (11.21)$$

Integratie van vergelijking (11.21) geeft

$$-cf + \frac{f^2}{2} = \nu f' + A \quad \text{voor } -\infty < \eta < \infty. \quad (11.22)$$

De integratieconstante A en de golfsnelheid c worden bepaald uit de randcondities (11.19). We krijgen

$$\begin{aligned} \eta \rightarrow \infty &\Rightarrow -cu_r + \frac{u_r^2}{2} = A, \\ \eta \rightarrow -\infty &\Rightarrow -cu_l + \frac{u_l^2}{2} = A. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$c = \frac{1}{2}(u_l + u_r) \quad \text{en} \quad A = -\frac{u_l u_r}{2}.$$

Voor f ontstaat de eerste-orde vergelijking

$$2\nu f' = (f - u_l)(f - u_r) \quad \text{voor } -\infty < \eta < \infty.$$

Hieruit concluderen we het volgende:

$$\begin{aligned} u_l < u_r, \quad f \in (u_l, u_r) &\Rightarrow f' < 0, \\ u_r < u_l, \quad f \in (u_r, u_l) &\Rightarrow f' < 0. \end{aligned}$$

Dus, als $u_l < u_r$ is er geen lopende golf mogelijk, als $u_r < u_l$ wel. De lopende golf wordt gevonden met de methode van scheiden van variabelen. Na integratie vinden we

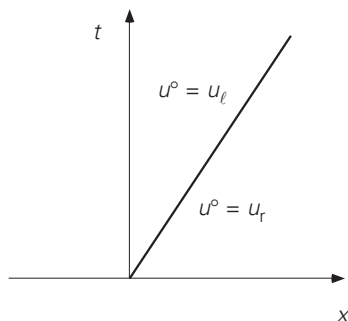
$$f(\eta) = u_r + \frac{u_l - u_r}{1 + \exp(\eta(u_l - u_r)/2\nu)} \quad \text{voor } -\infty < \eta < \infty.$$

Uitgedrukt in de variabelen x , t en u ziet deze oplossing eruit als

$$u(x, t) = u_r + \frac{u_l - u_r}{1 + \exp((x - ct)(u_l - u_r)/2\nu)} \quad \text{voor } -\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

We kunnen nu eenvoudig nagaan wat er gebeurt als de viscositeit verdwijnt, $\nu \downarrow 0$:

$$u^0(x, t) := \lim_{\nu \downarrow 0} u(x, t) = \begin{cases} u_l & x < ct, \\ (u_l + u_r)/2 & x = ct, \\ u_r & x > ct. \end{cases}$$



Figuur 11.3: Lokatie van de schok in de limietoplossing u^0 .

De limiet u^0 heeft een discontinuïteit (een *schok*) langs de kromme

$$x(t) = ct = \frac{u_r + u_l}{2}t.$$

Merk op dat de schoksnelheid dx/dt gelijk is aan de lopende-golfsnelheid, die het gemiddelde is van u_r en u_l .

11.2.2 Fundamentele oplossing

Evenals in paragraaf 11.1 lossen we hier een beginwaardeprobleem op, namelijk

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}u^2 \right) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{voor } -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = M\delta(x) & \text{voor } -\infty < x < \infty. \end{cases} \quad (11.23)$$

We zoeken de oplossing weer via een gelijkvormigheidstransformatie:

$$u(x, t) = t^\alpha \phi(\eta) \quad \text{met} \quad \eta = \frac{x}{t^\beta}. \quad (11.24)$$

De constanten α en β en de functie ϕ moeten uit (11.23) worden bepaald. Substitutie geeft dat

$$\alpha\phi - \beta\eta\phi' + t^{\alpha-\beta+1} \left(\frac{\phi^2}{2} \right)' = \nu t^{1-2\beta} \phi'',$$

voor alle $-\infty < \eta < \infty$ en voor alle $t > 0$. Kiezen we nu

$$-\alpha = \beta = \frac{1}{2},$$

dan ontstaat voor ϕ de gewone differentiaalvergelijking

$$-\phi - \eta\phi' + (\phi^2)' = 2\nu\phi'' \quad \text{voor } -\infty < \eta < \infty. \quad (11.25)$$

In verband met massabehoud stellen we de randcondities

$$\phi(-\infty) = \phi(+\infty) = 0. \quad (11.26)$$

Als een niet-triviale oplossing van (11.25), (11.26) bestaat, dan impliceert deze een oplossing $u = u(x, t)$ van vergelijking (11.23) die voor iedere $t > 0$ voldoet aan

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} t^{-1/2} \phi(xt^{-1/2}) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\eta) d\eta.$$

Met andere woorden de oplossing heeft massabehoud. Vanwege de beginmassa M eisen we

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\eta) d\eta = M. \quad (11.27)$$

Integratie van vergelijking (11.25) geeft

$$-\eta\phi + \phi^2 = 2\nu\phi' + A, \quad \text{voor } -\infty < \eta < \infty.$$

Toepassing van de randwaarden impliceert $A = 0$. Dus we houden een eerste-orde vergelijking in ϕ over,

$$\phi' + \frac{\eta}{2\nu}\phi = \frac{\phi^2}{2\nu} \quad \text{voor } -\infty < \eta < \infty.$$

Deze vergelijking lossen we als volgt op. Eerst vermenigvuldigen we met $\exp(\eta^2/4\nu)$, de zogenaamde integrerende factor. Dit geeft

$$(\exp(\eta^2/4\nu)\phi)' = \frac{\exp(\eta^2/4\nu)}{2\nu}\phi^2.$$

Stellen we nu

$$\psi = \exp(\eta^2/4\nu)\phi,$$

dan ontstaat

$$\psi' = \frac{\exp(-\eta^2/4\nu)}{2\nu}\psi^2,$$

ofwel

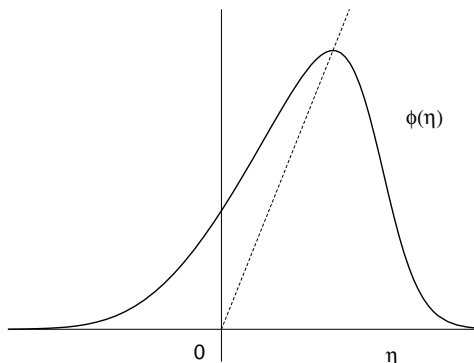
$$-\left(\frac{1}{\psi}\right)' = \frac{\exp(-\eta^2/4\nu)}{2\nu}.$$

Directe integratie geeft

$$\psi(\eta) = \left(K - \frac{1}{2\nu} \int_0^\eta \exp(-s^2/4\nu) ds\right)^{-1},$$

waarin K een integratieconstante is. Voor ϕ volgt dan

$$\phi(\eta) = \exp(-\eta^2/4\nu) \left/ \left(K - \frac{1}{2\nu} \int_0^\eta \exp(-s^2/4\nu) ds\right) \right.,$$



Figuur 11.4: De gelijkvormigheidsoplossing ϕ .

of

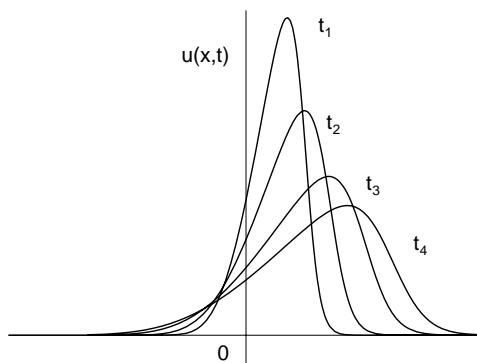
$$\phi(\eta) = \exp(-\eta^2/4\nu) \left/ \left(K + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \int_{\frac{\eta}{2\sqrt{\nu}}}^{\infty} \exp(-s^2) ds \right) \right., \quad (11.28)$$

na een geschikte herdefinitie van K . Deze constante wordt nu bepaald uit conditie (11.27). Er volgt

$$K = \frac{(\pi/\nu)^{1/2}}{\exp(M/2\nu) - 1}.$$

De oplossing $\phi = \phi(\eta)$ is geschetst in figuur 11.4.

De corresponderende fundamentele oplossing $u(x, t) = t^{-1/2}\phi(x/t^{1/2})$ is weergegeven in figuur 11.5 voor enkele opeenvolgende tijdstippen.



Figuur 11.5: De fundamentele oplossing op enkele achtereenvolgende tijdstippen.

Het is ook mogelijk van deze oplossing de limiet $\nu \downarrow 0$ te bepalen. Het resultaat is

$$u^0(x, t) := \lim_{\nu \downarrow 0} u(x, t) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \frac{x}{t} & 0 < x < \sqrt{2Mt}, \\ 0 & x > \sqrt{2Mt}. \end{cases} \quad (11.29)$$

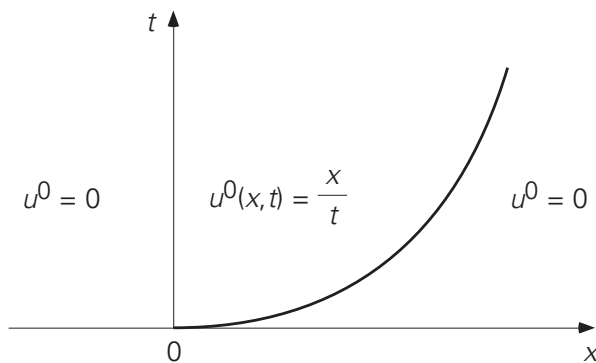
Deze limietoplossing heeft ook een schok, die zich beweegt langs de kromme

$$x(t) = \sqrt{2Mt}$$

(zie figuur 11.6) met snelheid

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{M}{2t}} = \frac{u^0(x(t) + 0, t) + u^0(x(t) - 0, t)}{2}.$$

Merk op dat de schoksnelheid weer de gemiddelde waarde van u^0 is. Dit is niet alleen waar voor de hier besproken voorbeelden, maar dit is een algemene eigenschap van oplossingen van de Burgers-vergelijking zonder viscositeit ($\nu = 0$). Hier is veel literatuur over, zie bijvoorbeeld Lax [10], Leveque [11], Wesseling [23] of Van Duijn [7].



Figuur 11.6: Lokatie van de schok in de limietoplossing u^0 .