

Analyse van differentiaalvergelijkingen

C.J. van Duijn en M.J. de Neef

© VSSD

Eerste druk 1995, tweede druk 2001

DUP Blue Print is een imprint van:

Delft University Press

P.O. Box 98, 2600 MG Delft, The Netherlands

tel. +31 15 27 85678, telefax +31 15 27 85706, e-mail info@library.tudelft.nl

internet: <http://www.library.tudelft.nl/dup>

Uitgegeven in opdracht van:

Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft

Poortlandplein 6, 2628 BM Delft, The Netherlands

tel. +31 15 27 82124, telefax +31 15 27 87585, e-mail: hlf@vssd.nl

internet: <http://www.vssd.nl/hlf>

URL over dit boek: **<http://www.vssd.nl/hlf/a007.htm>**

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photo-copying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

Printed in The Netherlands.

ISBN 90-407-1265-4

NUGI 811

Trefw:: differentiaalvergelijkingen

Voorwoord

Het modelleren van verschijnselen uit de technische wetenschappen en natuurkunde komt dikwijls neer op het combineren van constitutieve- en balansvergelijkingen, en daarmee op een formulering in termen van differentiaalvergelijkingen. Afhankelijk van de aard van het probleem krijgen we te maken met (stelsels) gewone of partiële differentiaalvergelijkingen en met nevencondities in de vorm van begin- en/of randwaarden.

In deze tweede editie richten we ons op tweedejaars studenten Wiskunde en Natuurkunde in de nieuwe bachelor's structuur. De behandelde stof veronderstelt een eerstejaars calculus achtergrond en enige elementaire lineaire algebra. Voor zover abstracte begrippen aan de orde komen, is gekozen voor een vorm waarbij wiskundigen én natuurkundigen zich thuis voelen: hier en daar wordt een bewijs uitgewerkt en naar de wat abstracte literatuur verwezen zonder de begripsopbouw voor de natuurkundigen te veel te verstoren.

Natuurlijk ligt bij een inleidende cursus als deze de nadruk op elementaire en werkbare technieken die de studenten in de latere fase van hun studie nodig hebben. Daarnaast hebben we getracht ook enkele moderne ontwikkelingen te laten doorklinken. Met name het 'klassieke' standpunt dat iedere differentiaalvergelijking exact oplosbaar is in termen van een min of meer expliciete uitdrukking (de zogenaamde analytische oplossing), ondervindt concurrentie van de filosofie van het kwalitatief redeneren. Immers, dikwijls kan nuttige informatie uit een differentiaalvergelijking worden verkregen, bijvoorbeeld over stabiliteit van evenwichten, zonder de oplossing zelf te kennen. Om dit te ondersteunen behandelen we uitvoerig de fasevlakanalyse voor gewone differentiaalvergelijkingen en vergelijkingsprincipes voor partiële differentiaalvergelijkingen. Tevens worden een tweetal voorbeelden van niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen behandeld, waaronder de vergelijking van Burgers.

De stof wordt in drie delen gepresenteerd. In deel I wordt vrij uitvoerig ingegaan op de theorie en toepassingen van beginwaardeproblemen voor gewone differentiaalvergelijkingen. We behandelen de existentie- en eenduidigheidsresultaten, de fasevlak- en stabiliteitsanalyse en we geven de gebruikelijke rekenregels voor eerste- en tweede-orde vergelijkingen.

In deel II behandelen we enkele belangrijke eigenwaardeproblemen uit de quantummechanica, zoals de harmonische oscillator en het waterstofatoom, en we geven een aantal speciale functies als resultaat van machtrekssubstitutie. Tevens worden functies van Green en enkele aspecten van de Sturm-Liouville-theorie behandeld.

Als laatste, in deel III, behandelen we partiële differentiaalvergelijkingen. We bespreken vergelijkingsprincipes en eenduidigheidsresultaten en geven ruim aandacht aan gelijkvormigheidsoplossingen voor diffusievergelijkingen, omdat deze een belangrijke rol spelen binnen het vakgebied der Fysische Transportverschijnselen. Natuurlijk komt ook aan de orde de methode van scheiden van variabelen met daaraan gekoppeld de Fourier-reeksen voor de diffusie-, de Laplace- en de golfvergelijking. Tevens behandelen we functies van Green voor de Laplace-vergelijking en de methode van D'Alembert voor de golfvergelijking. Ten slotte construeren we de fundamentele oplossing van de niet-lineaire poreuze-mediavergelijking en van de Burgers-vergelijking.

Oktober 2001,

C.J. van Duijn
TU Eindhoven

M.J. de Neef
TU Delft

Inhoud

I	Beginwaardeproblemen voor gewone differentiaalvergelijkingen	15
1	Fundamentele aspecten van beginwaardeproblemen	17
1.1	Inleiding	17
1.2	Voorbeelden	20
1.3	Existentie en eenduidigheid	24
1.4	Oplossingen als banen in het fasevlak	35
1.5	Enkele expliciete methoden	40
1.5.1	Vergelijkingen van de vorm: $u' + p(t)F(u) = 0$	41
1.5.2	Vergelijkingen van de vorm: $u' + p(t)u = r(t)$	41
1.5.3	Vergelijkingen van de vorm: $u' + p(t)u = r(t)u^k$, $k \in \mathbb{Z}$ ($k \neq 1$)	42
1.5.4	Exacte differentiaalvergelijkingen	43
1.5.5	Vergelijkingen van de vorm: $u'' = F(t, u')$	44
1.5.6	Vergelijkingen van de vorm: $u'' = F(u, u')$	45
1.5.7	Vergelijkingen van de vorm: $u'' = F(u)$	46
2	Tweede-orde lineaire differentiaalvergelijkingen	51
2.1	Inleiding	51
2.2	Structuur van de oplossing	53
2.3	Expliciete rekenmethoden	59
2.3.1	Reductie van de orde	59
2.3.2	Homogene vergelijking met constante coëfficiënten	61
2.3.3	Inhomogene vergelijking	62
2.3.4	Particuliere oplossingen voor bijzondere brontermen	63
2.3.5	Methode van variatie van constanten	67
2.4	Oplossingen als banen in het fasevlak	68
3	Stabiliteit van evenwichten van niet-lineaire autonome stelsels	81
3.1	Inleiding en definitie stabiliteit	81
3.2	Linearisering rond een evenwicht	83
3.3	Liapunov-functies	89

A	Existentie door middel van de expliciete Euler-methode	99
II	Eigenwaardeproblemen en bijzondere functies	107
4	Eigenwaardeproblemen in de quantummechanica	109
4.1	Inleiding	109
4.2	Deeltje in oneindig diepe potentiaalput	111
4.3	Deeltje in eindig diepe potentiaalput	112
4.4	De harmonische oscillator	114
4.5	Het waterstofatoom	118
5	Methode van machtrekssubstitutie	131
5.1	Machtreksooplossing rond een normaal punt	131
5.2	De Euler-vergelijking	134
5.3	Machtreksooplossing nabij een regulier-singulier punt	135
5.4	De Bessel-vergelijking	138
6	Tweede-orde randwaardeproblemen	147
6.1	Inleiding	147
6.2	Sturm-Liouville-problemen	149
6.3	Functies van Green	154
III	Partiële Differentiaalvergelijkingen	161
7	Formulering en achtergrond van de problemen	163
8	De diffusievergelijking	169
8.1	Eenduidigheid	169
8.2	Gelijkvormigheidsoplossing op $(0, \infty)$	171
8.3	Gelijkvormigheidsoplossing op $(-\infty, \infty)$	174
8.4	Algemeen beginwaardeprobleem op $(-\infty, \infty)$	175
8.5	Randwaardeprobleem op $(0, L)$	178
8.6	Fourier-reeksen met sinus- en cosinustermen	183
9	De Laplace-vergelijking	193
9.1	Eenduidigheid, fundamentele oplossing en functies van Green . . .	193
9.2	Laplace-vergelijking in een strook in \mathbb{R}^2	198
9.3	Laplace-vergelijking op een taartpunt in \mathbb{R}^2	200
10	Golfvergelijking	205
10.1	Energierelatie, eenduidigheid	205
10.2	Randwaardeprobleem op $(0, L)$	206

10.3	Beginwaardeprobleem op $(-\infty, \infty)$	209
11	Enkele niet-lineaire vergelijkingen	215
11.1	De poreuze-mediavergelijking	215
11.2	De Burgers-vergelijking	218
11.2.1	Lopende golven	218
11.2.2	Fundamentele oplossing	220