Inhoud

http://www.vssd.nl/hlf/wiskunde.html

Een bekend probleem, opgelost door een onbekend wiskundige

1. Het probleem is de trisectie van de hoek, de wiskundige is de Fransman Pierre-Laurent Wantzel, geboren op 5 juni 1814, overleden op 21 mei 1848.
Ik baseer mij daarbij op een artikel in het *Journal de Mathématiques pures et appliquées* uit 1837, getiteld: *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec le règle et le compas*, van de hand van genoemde Wantzel, op dat ogenblik 23 jaar oud en élève-ingénieur des Ponts-et-Chaussées.
Let wel: Galois is reeds 5 jaar tevoren overleden, maar het zal nog tot 1843 duren voordat Liouville het werk van Galois bekend maakt in een zitting van de Académie des Sciences.
Dat men overtuigd was van de onmogelijkheid van de trisectie blijkt wel uit een resolutie van de Academie des Sciences, aangenomen in 1775, 'de ne plus examiner aucune solution de la duplication du cube, de la trisection de l'angle ou de la quadrature, ni aucune machine annoncée comme un mouvement perpétuel'.

2. *Wie was deze Wantzel?* Wij hebben slechts een korte biografie van hem, geschreven door Barré de Saint-Venant (Nouvelles Ann. de Math. Vol. 7 (1848), pag. 321–331) en een necrologie van A. de Lapparent (Ecole Polytechnique, Livre du Centenaire, 1794–1894, Vol. I, pag. 133–135) (Zie ook [1]).
Pierre-Laurent Wantzel werd geboren op 5 juni 1814 te Parijs. Zijn vader, leraar wiskunde aan een handelsschool, was van Duitse afkomst en in 1798 gevlucht naar Frankrijk. Reeds op de lagere school vertoont Wantzel een grote intelligentie, een enorm geheugen en een grote aanleg voor wiskunde. In 1826 wordt hij op aanraden van Bobilier leerling aan de Ecole des Arts et Métiers te Châlons, blijft daar niet lang, bezoekt een particuliere school te Parijs (van Liévijns), leert daar Latijn en Grieks en wordt na 6 maanden toegelaten tot het tweede jaar van het Collège Charlemagne, waar hij niet alleen eerste prijzen behaalt voor Latijn en

Grieks, maar vooral uitblinkt door zijn prestaties op het gebied van de wiskunde.
In 1829, hij is dan 15 jaar oud, corrigeert hij drukproeven van het rekenkundeboek van Reynaud en bewijst daarin een lemma over het worteltrekken. In 1831 behaalt hij in een wedstrijd tussen Parijse Collèges onderling de tweede prijs voor het Latijn en in 1832 de eerste prijs voor wiskunde en natuurkunde. In dat jaar wordt hij toegelaten als eerste zowel tot de Ecole Polytechnique als tot de Ecole Normale, een succes dat nooit eerder behaald was. Hij kiest de Ecole Polytechnique, die hij in 1834 verlaat als leerling ingenieur, belast met bruggen en wegen, een beroep dat hem echter niet bevalt; zijn belangstelling gaat uit naar *het onderwijs in de wiskunde*. In 1837 neemt hij ontslag en wordt in 1838 repetitor aan de Ecole Polytechnique en met ingang van 1843 belast met de toelatingsexamens. Deze functies zijn ook bekleed door onder andere Comte, Bertrand, Bonnet en Leverrier. Zijn lessen zijn briljant, zijn geduld is onuitputtelijk, zijn onpartijdigheid bij de examens spreekwoordelijk. Zijn werkkracht is ongeëvenaard en dit wordt hem op tweeërlei wijze noodlottig. Allereerst hebben gebrek aan slaap, onregelmatige maaltijden, overmatig gebruik van koffie en zelfs opium, zijn gezondheid ondermijnd, anderzijds miste hij het vermogen zich lang op één zaak te concentreren. Op ieder hem gesteld probleem ging hij in en binnen de kortst mogelijke tijd kon men een antwoord van hem verwachten. Zijn eruditie bestreek een uitgebreid gebied: naast wiskunde ook muziek, filosofie en lieteratuur. Had hij langer (en anders?) geleefd, dan zou hij de vele zaken die hij geëntameerd heeft, hebben kunnen uitwerken en tot de voorste gelederen der mathematici hebben kunnen doordringen.
Teleurstellingen zijn hem niet bespaard gebleven: zoals gezegd werd zijn gezondheid ondermijnd en ook werd hij aan het einde van zijn leven ontzet uit zijn functie van examinator, ‘par une mesure profondément regrettable’ schrijft De Lapparent. Na een ziekte van 6 maanden sterft op 21 mei 1848, bijna 34 jaar oud, diep betreurd door zijn vrouw, zijn beide dochters en zijn vele vrienden, ‘... ce géomètre, qui a laissé… une trace lumineuse… semblable à celle que dessinent au ciel les météores aussitôt évanouis qu’entrevus’, aldus De Lapparent.
Het oeuvre van Wantzel toont dat hij de grote problemen niet uit de weg gaat. Hij vereenvoudigt de bewijzen van Abel en Ruffini over de onoplosbaarheid van de vijfde-graadsvergelijking. Hij mengt zich in het conflict tussen Liouville en Lamé inzake het probleem van Fermat en hij bewijst als eerste de onmogelijkheid om een willekeurige hoek met passer en liniaal in drie gelijke delen te verdelen. Andere mathematische bijdragen zijn: artikelen over onmeetbare getallen, differentiaal-vergelijkingen, machtreeksen, minimumproblemen, diameters van krommen. Ook de mechanica en de natuurkunde hadden zijn belangstelling: daarvan getuigen zijn

artikelen over de uitstroming van lucht, de rotatie van een vloeibaar lichaam, elastische staven en over de temperatuurverdeling binnen een cilinder (voor een complete bibliografie zie het genoemde artikel van Barré de Saint-Venant).

3. Reeds in de Oudheid kende men de volgende problemen.

1. Het *Delische* probleem: is het mogelijk om met behulp van passer en liniaal de ribbe van een kubus te construeren waarvan de inhoud 2 maal zo groot is als die van een gegeven kubus?
2. *Trisectie*probleem: Kan men met behulp van passer en liniaal een gegeven hoek in drie gelijke delen verdelen?
3. *Quadratuur van de cirkel*: Kan men met behulp van passer en liniaal een vierkant construeren waarvan de oppervlakte even groot is als die van een gegeven cirkel?
4. Welke *regelmatige veelhoeken* kan men met passer en liniaal construeren?

Men kan deze problemen en het onderzoek naar hun eventuele oplossing formaliseren door precies af te spreken wat men bedoelt met de uitdrukking 'met behulp van passer en liniaal'.

Wij gaan daarbij uit van een puntverzameling V_0 in het platte vlak die minstens twee punten bevat en laten nu de volgende *operaties* toe (*constructiepostulaten*).

1. Trek door twee punten van V_0 een rechte lijn.
2. Construeer een cirkel met als middelpunt een punt van V_0 en als straal de afstand van dat punt tot een ander punt van V_0.

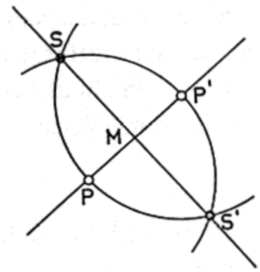
Wij geven nu de volgende definitie.

Een punt S heet in *één stap construeerbaar* uit V_0 indien S het snijpunt is van twee lijnen of van twee cirkels of van een lijn en een cirkel, zoals bedoeld in 1 en 2. Een punt S_n heet *construeerbaar* uit V_0 indien er een eindig aantal punten $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{n-1}$ is, zodanig dat S_{i+1} *in één stap* construeerbaar is uit $V_0 \cup \{S_1, S_2, S_3, S_i\}$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$).

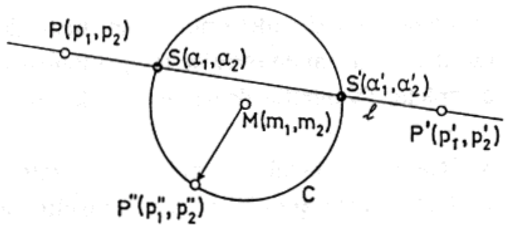
Voorbeeld

Als $V_0 = \{P, P'\}$, dan is het midden M van het lijnstuk PP' construeerbaar uit V_0. (Zie afbeelding 1). Op zeer natuurlijke wijze wordt nu de verbinding met de algebra gelegd.

Wanneer men namelijk in het platte vlak een coördinatenstelsel aanbrengt, dan kan men de coördinaten van de geconstrueerde punten uitdrukken in de coördinaten van de punten die tot V_0 behoren. We zullen daarbij de verzameling, bestaande uit de punten van V_0 èn alle, in één stap uit V_0 construeerbare punten, V_1 noemen. Evenzo zal V_2 bestaan uit alle punten van V_1 èn de daaruit in één stap geconstrueerde punten etc. Het is nu een eenvoudige zaak om de juistheid aan te



Afbeelding 1.



Afbeelding 2.

tonen van de volgende stelling:
De coördinaten van een punt S, behorende tot V_{i+1} (i = 0, 1, 2, …), voldoen aan een vergelijking met als coëfficiënten rationale uitdrukkingen in de coëfficiënten van punten van V_i. Deze vergelijking is van de eerste of van de tweede graad.

Bewijs
We onderscheiden drie gevallen:
a. S is het snijpunt van twee lijnen;
b. S is een snijpunt van een lijn en een cirkel;
c. S is een snijpunt van twee cirkels.
We geven het bewijs voor het geval b (a en c gaan analoog). Laat S een snijpunt zijn van de lijn l gaande door de punten $P(p_1,p_2)$ en $P'(p_1',p_2')$ met de cirkel C die tot middelpunt heeft M (m_1,m_2) en gaat door $P''(p_1'',p_2'')$. Hierbij behoren P, P', M en P'' tot V_i (zie afbeelding 2). Er geldt dan:

$$l \ldots \frac{x-p_1}{p_1'-p_1} = \frac{y-p_2}{p_2'-p_2}$$

$$C \ldots (x-m_1)^2 + (y-m_2)^2 = (p_1''-m_1)^2 + (p_2''-m_2)^2$$

en dus voldoet de x-coördinaat van S aan de vierkantsvergelijking:

$$(x-m_1)^2 + \left(\frac{p_2'-p_2}{p_1'-p_1}(x-p_1)+p_2\right)^2 = (p_1''-m_1)^2 + (p_2''-m_2)^2$$

die we schrijven als

$$x^2 + Ax + B = 0$$

waarbij A en B rationale uitdrukkingen zijn in p_1, p_2, p_1', p_2', p_1'', p_2'', m_1, m_2.
Een analoge redenering geldt voor de y-coördinaat van S.
We merken hierbij op dat Wantzel niet spreekt over coördinaten, maar over elementen van rechthoekige driehoeken en over ‘lignes trigonométriques des

angles'. Zijn conclusie (die hij overigens niet met berekening adstrueert) is echter gelijkwaardig: 'Ainsi l'inconnue principale du problème s'obtiendra par la résolution d'une série d'équations du second degré dont les coëfficients seront fonctions rationelles des données de la question et des racines des équations précédentes'.

Dat wil zeggen: indien een punt S_n geconstrueerd kan worden vanuit V_0 via de punten $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$, dan vinden we de x-coördinaat van S_n door achtereenvolgens op te lossen de vierkantsvergelijkingen:

(1)	$x^2 + A_0 x + B_0 = 0$	(met wortels α_1 en α_1')
(2)	$x^2 + A_1 x + B_1 = 0$	(met wortels α_2 en α_2')
(3)	$x^2 + A_2 x + B_2 = 0$	(met wortels α_3 en α_3')
…	....	....
(n)	$x^2 + A_{n-1} x + B_{n-1} = 0$	(met wortels α_n en α_n')

Hierin hangen A_0 en B_0 rationaal af van de coördinaten van de punten van V_0; A_1 en B_1 hangen rationaal af van α_1 en α_1' en de coördinaten van de punten van V_0 enz. Anders gezegd: indien we het lichaam, voortgebracht door de coördinaten van V_0, voorstellen door K, dan geldt: $A_0, B_0 \in K$ (om de gedachten te bepalen: als $V_0 = \{(0,0), (0,1)\}$, dan $K = Q$).

Verder geldt $A_1, B_1 \in K(\alpha_1)$ of $A_1, B_1 \in K(\alpha_1')$;

dus $A_1, B_1 \in K(x_1)$ met $x_1 = \alpha_1$ of $x_1 = \alpha_1'$;

$A_2, B_2 \in K(x_1, x_2)$ met $x_1 = \alpha_1$ of $x_1 = \alpha_1'$ en $x_2 = \alpha_2$ of $x_2 = \alpha_2'$, enz.

We kunnen ons daarbij beperken tot irreducibele vierkantsvergelijkingen. Immers, wanneer de vergelijking met rangnummer m reducibel is, d.w.z. wortels heeft die behoren tot $K_{m-1} = K(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$ met zekere keuzen voor $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, dan betekent dat dat de wortels α_m en α_m' van deze vergelijking rationaal afhangen van de elementen van K_{m-1} en men ziet eenvoudig in dat de bijbehorende punten dan met passer en liniaal te construeren zijn. In feite gaat het dan om constructies van lijnstukken van de gedaante $a \pm b$, $a \cdot b$ en $a \cdot b / c$, uit gegeven lijnstukken a, b en c.

In het vervolg van het betoog zullen we voordeel hebben van de volgende opmerking:

Uit $x^2 + ax + b = 0$, dus $x^2 = -ax - b$, waarbij a en b tot een lichaam K behoren, volgt:

$$x^3 = (a^2 - b)x + ab = a_3 x + b_3 \qquad (a_3, b_3 \in K)$$
$$x^4 = a_4 x + b_4 \qquad (a_4, b_4 \in K), \text{ enz.}$$

Dus een rationale uitdrukking van de gedaante:

$$R = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0} \qquad (a_i, b_j \in K)$$

is te herleiden tot

$$R = \frac{Ax + B}{Cx + D} \qquad (A, B, C, D \in K).$$

Schrijven we nu, met nader te bepalen P en Q $\in$ K:

$$R = \frac{(Ax + B)(Px + Q)}{(Cx + D)(Px + Q)}$$

dan vinden we:

$$R = \frac{A_1x + B_1}{(P(D - aC) + QC)x + DQ - PCb}.$$

Als we nu kiezen: P = C en Q = aC – D, dan vinden we dat R te schrijven is in de gedaante

$$R = A'x + B' \qquad (A', B' \in K).$$

Voor de genoemde vierkantsvergelijkingen betekent dit:

$$x^2 + A_0x + B_0 = 0, \tag{1}$$

met $A_0, B_0 \in K$.

$$x^2 + A_1x + B_1 = 0 \tag{2}$$

met $\quad A_1 = A_1(x_1) = a_{11}x_1 + a_{10}$

$\quad B_1 = B_1(x_1) = b_{11}x_1 + b_{10}$

waarbij $a_{ij}, b_{ij} \in K$ en x_1 een wortel van (1)

$$x^2 + A_2x + B_2 = 0 \tag{3}$$

met $\quad A_2 = A_2(x_1,x_2) = a_{21}(x_1)x_2 + a_{20}(x_1)$

$\quad B_2 = B_2(x_1,x_2) = b_{21}(x_1)x_2 + b_{20}(x_1)$

waarbij $a_{ij}(x_1)$ en $b_{ij}(x_1)$ behoren tot de ring $K[x_1]$ van de veeltermen in x_1 met coëfficiënten in K en x_2 een wortel is van (2). Bij gegeven (1) zijn er 2 mogelijkheden voor x_1, dus 2 mogelijkheden voor (2) en dus 4 mogelijkheden voor x_2, 8 mogelijkheden voor x_3, enz.
Algemeen: indien

$$x^2 + A_{n-1}x + B_{n-1} = 0 \tag{n}$$

dan zijn er 2^{n-1} mogelijkheden voor (n) en 2^n mogelijkheden voor de wortels x_n van (n). De 4 mogelijke wortels x_2 van (2) voldoen aan:

$$P_4(x) := (x^2 + A_1(\alpha_1)x + B_1(\alpha_1))\cdot(x^2 + A_1(\alpha_1')x + B_1(\alpha_1')) = 0.$$

Indien we het linkerlid schrijven als een veelterm in x, dan zien we dat de coëfficiënten *symmetrisch* zijn in de wortels α_1 en α_1' van de vergelijking

$$x^2 + A_0x + B_0 = 0 \qquad (A_0, B_0 \in K)$$

en dus behoren de coëfficiënten van $P_4(x)$ ook tot K.
Stellen we de wortels van $P_4(x) = 0$ respectievelijk α_{11}, α_{12} en α_{11}', α_{12}', dan voldoen de 8 mogelijke wortels van (3) aan:

$$\begin{aligned}P_8(x) := [&(x^2 + A_2(\alpha_1,\alpha_{11})x + B_2(\alpha_1,\alpha_{11}))\cdot \\ &\cdot(x^2 + A_2(\alpha_1,\alpha_{12})x + B_2(\alpha_1,\alpha_{12}))\cdot \\ &\cdot[(x^2 + A_2(\alpha_1',\alpha_{11}')x + B_2(\alpha_1',\alpha_{11}'))\cdot \\ &\cdot(x^2 + A_2(\alpha_1',\alpha_{12}')x + B_2(\alpha_1',\alpha_{12}'))] = 0.\end{aligned}$$

De coëfficiënten van de eerste factor tussen [...] zijn symmetrisch in de wortels α_{11} en α_{12} van de vergelijking

$$x^2 + A_1(\alpha_1)x + B_1(\alpha_1) = 0$$

en dus is deze factor te schrijven als een vierde-graadspolynoom in x met coëfficiënten die zich rationaal laten uitdrukken in $A_1(\alpha_1)$ en $B_1(\alpha_1)$, dat wil zeggen behoren tot $K(\alpha_1)$. Analoog laat de tweede factor tussen [...] zich schrijven als een veelterm met coëfficiënten in $K(\alpha_1')$.
Tenslotte merken we op dat de coëfficiënten van $P_8(x)$ symmetrisch zijn in de wortels α_1 en α_1' van $x^2 + A_0x + B_0 = 0$ en dus behoren tot K, met andere woorden de 8 mogelijke wortels van (3) voldoen aan

$$P_8(x) = 0$$

waarin $P_8(x)$ een polynoom is van de graad 8 met coëfficiënten in K (= het lichaam voortgebracht door de coördinaten van de punten in V_0).
Dit kunnen we generaliseren voor het stelsel tweede-graadsvergelijkingen:

$$x_2 + A_0x + B_0 = 0 \qquad (1)$$

$$x_2 + A_1x + B_1 = 0 \qquad (2)$$

$$x_2 + A_2x + B_2 = 0 \qquad (3)$$

....

$$x_2 + A_{n-2}\mathrm{x} + B_{n-2} = 0 \qquad (n-1)$$

$$x_2 + A_{n-1}\mathrm{x} + B_{n-1} = 0 \qquad (n)$$

waarbij A_i en B_i rationale uitdrukkingen voorstellen in de coördinaten van de punten van V_0 en de grootheden $x_1, x_2,\ldots,x_i$ (x_t staat daarbij voor één van de wortels van de vergelijking (t)), hetgeen we noteren als:

$$A_i = A_i(x_1, x_2,\ldots,x_\mathrm{i})$$

$$B_i = B_i(x_1, x_2, \ldots, x_i).$$

Op grond van het eerder opgemerkte kunnen we zelfs schrijven:

$$A_i = A_{i1}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})x_i + A_{i0}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$$

$$B_i = B_{i1}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})x_i + B_{i0}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$$

waarbij A_{ij} en B_{ij} analoge betekenis hebben.

Op analoge wijze kunnen we dan afleiden dat de 2^n mogelijke wortels van de vergelijking (n) nulpunten zijn van een polynoom $f(x)$ van de graad 2^n met coëfficiënten in K, dus $f(x) \in K[x]$.

4. Vervolgens bewijst Wantzel dat deze polynoom irreducibel is in $K[x]$ en wel aldus. (bij Wantzel is een irreducibele vergelijking gedefinieerd als een vergelijking …qui n'a pas de racines communes avec une équation de degré plus simple et à coefficients rationnels. (Nouv. Ann. de Math. Tome II (1843), p. 118)). Men zien eenvoudig in dat deze definitie gelijkwaardig is met de gebruikelijke definitie van een vergelijking waarvan het linkerlid in Q[x] niet in factoren van lagere graad te ontbinden is).

Onderstel – zegt hij – dat een polynoom $F(x) \in K[x]$ een nulpunt β_n gemeen heeft met $f(x)$, dan voldoet β_n aan

$$x^2 + A_{\mathrm{n}-1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1})x + \beta_{n-1}(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}) = 0,$$

met een zekere keuze β_i voor de wortels van (1), (2),…, (n–1). De betrekking $F(\beta_n) = 0$ kan dan op grond van de 'opmerking' op de vorige bladzijde geschreven worden in de gedaante:

$$A_{n-1}{}^*(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1})\beta_n + B_{n-1}{}^*(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}) = 0.$$

Maar dan moet gelden:

$$A_{n-1}{}^*(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}) = 0 \text{ èn } B_{n-1}{}^*(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}) = 0$$

daar anders $\beta_n \in K_{n-1}$ en dus de vergelijking met rangnummer n, reducibel zou zijn in $K_{n-1}[x]$.

Op analoge wijze kunnen we dan schrijven:

$$A_{n-2}{}^*(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-2})\beta_{n-1} + B_{n-2}{}^*(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-2}) = 0$$

en daaruit concluderen:

$$A_{n-2}{}^*(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-2}) = 0 \text{ èn } B_{n-2}{}^*(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-2}) = 0$$

Zo teruggaande komen we op:

$$A^*\beta_1 + B^* = 0 \quad \text{met } A^* = 0 \text{ en } B^* = 0.$$

Nemen we nu een andere wortel, zeg β_n' van (n), die tot stand gekomen is via de keuzen $\beta_1',\beta_2',\ldots,\beta_{n-1}'$ voor de wortels van de vergelijkingen (1), (2),…, (n) en vullen we die in plaats van β_1 enz. in $A^*\beta_1 + B^* = 0$ enz., dan vinden we, weer 'opstijgende', uiteindelijk: $F(\beta_n') = 0$, dat wil zeggen ook β_n' is een wortel van $F(x) = 0$. Op deze wijze kunnen we aantonen dat alle wortels van $f(x) = 0$ ook voldoen aan $F(x) = 0$, maar dat betekent dat $f(x)$ irreducibel is in $K[x]$.
Dit leidt tot de volgende

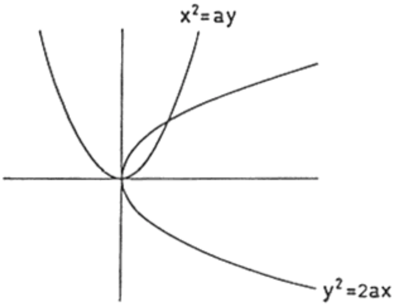
Conclusie

Indien een punt met behulp van passer en liniaal te construeren is uit een puntverzameling V_0, dan voldoet de x- (resp. y-) coördinaat van dat punt aan een *irreducibele* vergelijking van de graad 2^n ($n \in \mathbb{N}$) met coëfficiënten die behoren tot het lichaam voortgebracht door de coördinaten van de punten van V_0.

5. Het gevolg hiervan – aldus Wantzel – is 'dat ieder probleem dat leidt tot een irreducibele vergelijking waarvan de graad geen macht van twee is, niet opgelost kan worden met passer en liniaal'. Daarvan geeft hij dan de volgende voorbeelden.
De verdubbeling van de kubus met zijde a, leidt tot de vergelijking $x^3 - 2a^3 = 0$. Zonder meer merkt Wantzel hier over op dat deze altijd irreducibel is en dus geen wortel heeft die rationaal van a afhangt.
Het probleem van de twee middenevenredigen. Hieronder wordt verstaan het bepalen van getallen x en y die bij gegeven a en b voldoen aan $a : x = x : y = y : b$. Hieruit leidt men dan af: $x^2 = ay$; $y^2 = bx$ en dus $x^4 = a^2y^2 = a^2bx$, waaruit volgt, indien $x \neq 0$, $x^3 - a^2b = 0$. Van deze laatste vergelijking vermeldt Wantzel de irreducibiliteit voor het geval dat de verhouding $b : a$ 'geen derdemacht is'. Hij bedoelt daarmee geen derdemacht in het lichaam voortgebracht door a en b. Hierbij zij opgemerkt dat dit probleem nauw samenhangt met het voorgaande. Hippocrates van Chios (± 450 voor Chr.) herleidde namelijk het probleem van de verdubbeling van de kubus hiertoe. Stelt men immers $b = 2a$, dan volgt uit de dubbele evenredigheid: $x^3 = 2a^3$. In 'moderne' bewoordingen gezegd, loste Hippocrates het probleem van de verdubbeling van de kubus op door het van 0 verschillende snijpunt te bepalen van de parabool met vergelijking $x^2 = 2ay$ en de parabool met vergelijking $y^2 = 2ax$ (zie afbeelding 3).
De trisectie van de hoek. Uitgaande van de eenvoudig af te leiden formule

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha,$$

vindt men door te stellen $\cos 3\alpha = a$ en $\cos \alpha = x$, dat bij gegeven hoek α met $\cos \alpha = a$, geldt voor $x = \cos \frac{1}{3}\alpha$:



Afbeelding 3.

$$4x^3 - 3x - a = 0.$$

Hierover merkt Wantzel op dat deze vergelijking irreducibel is indien deze geen wortel heeft die rationaal afhangt van a en dat dit geval (namelijk wel een in a rationale wortel) zich voordoet indien a algebraïsch is. (Deze passage behoeft enige toelichting. Wantzel schrijft: ‘cette équation est irréducible si elle n’a pas de racine qui soit une fonction rationelle de a et c’est ce qui arrive tant que a reste algébrique: ainsi le problème ne peut être résolu en général avec le règle et le compas’. Hiermee is dus gezegd: indien de vergelijking géén wortel heeft die rationaal afhangt van a, dan is de vergelijking irreducibel.)

Noodzakelijk voor reducibiliteit is dus het bestaan van een wortel die rationaal afhangt van a. In dit geval is echter a algebraïsch. Dus voor niet-algebraïsche a is de vergelijking zeker irreducibel (en voor algebraïsche a kan men op grond van het bovenstaande nog geen uitspraak doen). Wantzel merkt op grond hiervan op dat het probleem dus ‘in het algemeen’ niet met passer en liniaal oplosbaar is).

Men kan gemakkelijk een voorbeeld geven waarin de genoemde vergelijking irreducibel is.

Stelt men namelijk $3\alpha = 60°$, dus $\cos 3\alpha = a = 1/2$, dan gaat het om de vergelijking

$$8x^3 - 6x - 1 = 0,$$

die door de substitutie $y = 2x$ overgaat in $y^3 - 3y - 1 = 0$.

Welke vergelijking (volgens een stelling van Gauss) irreducibel is in $Q[x]$ omdat het linkerlid reeds in $Z[x]$ geen lineaire factor bezit.

Hiermede is *voor het eerst* onomstotelijk de onmogelijkheid van de trisectie van een hoek ‘in het algemeen’ bewezen. Bescheiden, maar niet zonder gepaste trots, voegt Wantzel toe: ‘Il nous semble qu’il n’avait pas encore été démontré rigoureusement que ces problèmes, si célèbres chez les anciens, ne fussent pas susceptibles d’une solution par les constructions géométriques auxquelles ils s'attachent particulièrement'.

De verdeling van de cirkel in gelijke delen is de laatste toepassing die Wantzel geeft. Gauss had reeds in zijn *Disquisitiones Arithmeticae* aangetoond dat voor een priemgetal m het linkerlid van de cirkeldelingsvergelijking $x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0$ irreducibel is. Wantzel kan dan onmiddellijk constateren dat een regelmatige m-hoek (m priem) slechts dan met passer en liniaal te construeren is indien m de gedaante $2^n + 1$ heeft (zie [2, Sectio VII, i.h.b. Cap. 365]).
Algemener nu beschouwt Wantzel het geval dat m de gedaante a^α heeft (a priem) en merkt op dat de vergelijking van de primitieve wortels van $(x^a)^\alpha - 1 = 0$, nl.

$$\frac{x^{a^\alpha} - 1}{x^{a^{\alpha-1}} - 1} = 0.$$

irreducibel is. Hij bewijst dat niet, maar zegt slechts dat het bewijs te geven is door in het bewijs van Gauss van de irreducibiliteit van $x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x^2 + x + 1$ kleine wijzigingen aan te brengen. Zijn conclusie is dan dat een noodzakelijke voorwaarde voor de verdeling van de cirkel in a^α gelijke delen (a priem) is, dat de graad van de bijbehorende cirkeldelingsvergelijking te weten $a^\alpha - a^{\alpha-1} = 0$, dus $(a - 1)a^{\alpha-1} = 0$ een macht is van 2. Wantzel merkt dan op dat zowel $(a - 1)$ als $a^{\alpha-1}$ een macht van 2 moeten zijn en dat dus $a = 2$. De andere mogelijkheid noemt hij niet expliciet, maar hij gebruikt die wel in zijn slotconclusie. Dit is immers het geval dat $a = 2^n + 1$ en tevens $\alpha = 1$. De genoemde slotconclusie luidt dan dat "de verdeling van de cirkel in N delen (sic!) met behulp van passer en liniaal slechts dan uitgevoerd kan worden indien de van 2 verschillende priemfactoren van N de gedaante $2^n + 1$ hebben en slechts in de eerste macht voorkomen".
Met nadruk vermeldt hij dan dat dit aangekondigd is door Gauss aan het einde van zijn verhandeling, maar dat deze laatste daarvan geen bewijs heeft gegeven. Ik laat de bewuste passage in de *Disquisitiones Arithmeticae* hier volgen. Ik vermoed namelijk dat de hierboven aangehaalde uitlating van Wantzel dat hij het eerste bewijs heeft gegeven van de onmogelijkheid van de trisectie van de hoek – blijkens zijn woordkeuze – nauw aansluit bij de opmerking van Gauss en wellicht bedoeld is als een reactie daarop. De bedoelde passus bij Gauss – inderdaad ook bij hem in hoofdletters afgedrukt – luidt als volgt:
OMNI RIGORE DEMONSTRARE POSSUMUS, HAS AEQUATIONES ELEVATAS NULLO MODO NEC EVITARI NEC AD INFERIORES REDUCI POSSE…
in vertaling:
WIJ KUNNEN IN ALLE STRENGHEID AANTONEN DAT DEZE HOGERE-MACHTSVERGELIJKINGEN OP GEEN ENKELE WIJZE VERMEDEN KUNNEN WORDEN EN OOK NIET HERLEID KUNNEN WORDEN TOT VERGELIJKINGEN VAN LAGERE GRAAD…
'ware het niet – zo gaat het citaat verder – dat de grenzen van dit werk dit bewijs

niet toelaten; toch menen wij ervoor te moeten waarschuwen dat niemand andere verdelingen dan die welke ons werk suggereert nl. verdelingen in 7, 11, 13, 19 etc. delen, verwacht terug te kunnen brengen tot meetkundige constructies en zijn tijd op nutteloze wijze doorbrengt'.

Over de quadratuur van de cirkel rept Wantzel met geen enkel woord. Dit is echter niet zo verbazingwekkend: eerst in 1882 zal Carl Lindemann (1852–1939) voor het eerst de transcedentie van π aantonen. (Zie bijv. [4]).

6. Eén vraag resteert natuurlijk. Wantzel spreekt steeds over noodzakelijke voorwaarden. Doet hij nog een uitspraak over voldoende voorwaarden? Het laatste hoofdstuk van zijn verhandeling is daaraan gewijd, maar begrijpelijkerwijs komt hij daar niet geheel uit. Het probleem is of men bij en gegeven vergelijking van de graad 2^n kan constateren of deze irreducibel is en of men daarbij een stel tweedegraadsvergelijkingen kan vinden van het type dat wij hierboven beschouwden.
Om dit laatste na te gaan stelt hij een stel tweede-graadsvergelijkingen met onbekende coëfficiënten op, leidt daaruit de bedoelde vergelijking van de graad 2^n af en vergelijkt de coëfficiënten daarvan met die van de gegeven vergelijking van de graad 2^n. Voor het geval $n = 2$ geeft hij hiervan een voorbeeld. Met betrekking tot het onderzoek naar de irreducibiliteit onderscheidt hij een aantal gevallen zonder een algemene regel te kunnen geven en besluit dan met:
'Ces procédés sont d'une application pénible en général, mais on peut les simplifier et obtenir des résultats plus précis dans certains cas très étendus, que nous étudierons spécialement.' (Zie bijv. Nouv. Ann. de Math. Tome III (1843), p. 325–329 en Tome IV (1845), p. 57–65).

Bibliografie

1. F. Cajori, Piere Laurent Wantzel, Bull. Amer. Math. Soc. 24, 1918, pp. 339–347.
2. C.F. Gauss, Disquisitiones arithmeticae, Leipzig, 1801. (Engelse vertaling: C.F. Gauss, Disquisitiones arithmeticae, translated into English by A.A. Clarke, S.J., Revised, by Waterhouse, Greither, Grootendorst, Springer Verlag, 1986.
3. I. Stewart, Galois theory, Chapman and Hall, London, 1973.