

6

Halve regelmaat met sterren (hogere orde uniforme veelvlakken, UH's)

6.1. Inleiding

Aan het eind van het vorige hoofdstuk hebben we ons afgevraagd of het introduceren van stervormige regelmatige veelhoeken en veelvlakshoeken ook leidt tot een uitbreiding van de Archimedische of uniforme lichamen met hogere-orde veelvlakken, zoals dat bij de Platonische het geval bleek. Welnu, dit is overduidelijk het geval. Bij de vijf Platonische lichamen kwamen er een viertal bij door deze uitbreiding; het oorspronkelijke aantal van 13 Archimedische veelvlakken (afgezien van de reeksen prisma's) wordt echter aangevuld met tenminste 53 nieuwe. Hetzelfde geldt dan uiteraard voor de veelvlakken van de tweede soort, de duaal toegevoegde.

Deze nieuwe veelvlakken kunnen op diverse manieren ontstaan gedacht worden:

- door het vervangen van zijvlakken (vijf- of meer-hoeken) door in- of omgeschreven sterren,
- door vier- of meertallige hoekpunten tot stervormige veelvlakshoeken te transformeren,
- door hogere-orde veelvlakken zoals de vier Poinsoet-lichamen, maar ook de op voorgaande manieren ontstane halregelmatige, af te knotten op de hoekpunten,
- enz.

Mogelijkheden genoeg, temeer daar we nu naast vijfhoekige sterren ook onder andere achtpuntige en tienpuntige tegenkomen. De resulterende verzameling is veel te groot om haar geheel in dit boekje weer te geven; daarom zullen slechts een paar grepen gedaan worden. Maar alvorens op de gekozen voorbeelden in te gaan zullen we, evenals bij de 'gewone' Archimedische lichamen, een poging wagen om na te gaan welke hogere-orde variëteiten er bestaan.

6.2. Analyse

Analyse van de mogelijke uniforme hogere-orde veelvlakken (UH's) verloopt in principe analoog als bij de regelmatige hogere-orde lichamen (§ 5.2). Nu echter moeten we bedenken dat er in elk der identieke hoekpunten veelvlakken van verschillende soort

samenkomen. Stel dat er per hoekpunt m_1 vlakken van de soort $\{n_1/a_1\}$ (regelmatige n_1 -hoeken van de orde a_1), m_2 van de soort $\{n_2/a_2\}$ etc. samenkomen. Deze vlakken vormen samen in het hoekpunt een m -vlakshoek van de orde b (dus $m = \sum m_i$). De totale aantallen zijvlakken worden weergegeven door resp. Z_1, Z_2, Z_3 etc., met als som $Z = \sum Z_i$, het aantal ribben door R , het aantal hoekpunten door H .

Aangezien in elk hoekpunt m_i zijvlakken van de vorm $\{n_i/a_i\}$ samenkomen, is dit, over alle hoekpunten gesommeerd, $H \cdot m_i$. Hierbij is elk zijvlak n_i maal geteld, dus $Z_i = H \cdot (m_i/n_i)$ of $Z_i \cdot n_i = H \cdot m_i$. Gesommeerd over alle soorten zijvlakken geeft dit $\sum Z_i \cdot n_i = H \cdot m$, wat tevens gelijk is aan $2 \cdot R$. Dus:

$$\sum Z_i \cdot n_i = H \cdot \sum m_i = 2 \cdot R$$

Gecombineerd met de uitgebreide stelling van Euler:

$$b \cdot H + \sum a_i \cdot Z_i = R + 2 \cdot c$$

vinden we de relatie:

$$\frac{2c}{H} = \sum \frac{m_i}{n_i/a_i} - \frac{\sum m_i}{2} + b$$

Nu komen in principe grote aantallen combinaties van waarden voor n_i, a_i, m_i en b in aanmerking om gesubstitueerd te worden in deze vergelijking teneinde mogelijke waarden voor H en c , en daarnaast de bijbehorende Z_i 's te vinden. Zelfs met dezelfde beperkingen als die in Hoofdstuk 3 bij de gewone Archimedische veelvlakken zijn gehanteerd, blijft het aantal mogelijkheden zeer groot. Als uit zo'n combinatie een gebroken waarde voor H/c gevonden wordt, zou dit, door de waarde van c , de orde van het veelvlak, aan te passen, toch steeds in principe tot een geheel getal voor H kunnen leiden.

Veel van deze gevallen blijken echter niet tot een bestaanbaar veelvlak te voeren. Evenals voor de regelmatige hogere-orde veelvlakken, kan bewezen worden dat de halfregelmatige een zekere relatie moeten hebben tot exemplaren van de eerste orde, namelijk dat zo'n exemplaar er de kern van moet uitmaken, terwijl de hoekpunten, eventueel na transformatie, moeten samenvallen met die van eenzelfde of een ander exemplaar.

Als gevolg van deze wetmatigheid komen we voor het aantal hoekpunten H uitsluitend waarden tegen die we ook in de tabel in § 3.2 zagen; bovendien bestaan, evenals bij de eerste-orde lichamen, de zijvlakken uit 3- 4- 5- 6- 8- of 10-hoeken.

In het vervolg van dit hoofdstuk zullen we een aantal voorbeelden bekijken, gekozen uit de lange reeks mogelijkheden, en daarbij de indeling aanhouden zoals in § 6.1 gegeven. Hierbij zullen vooral de hogere-orde Archimedische lichamen van de eerste soort aan de orde komen, maar ook, af en toe, die van de tweede soort.

6.3. Stervorming van zijvlakken

Allereerst een voorbeeld uit de wereld van de prisma's. Het achzijdige rechte prisma (4 4 8) kan getransformeerd worden in een hogere-orde prisma door in de achthoeken derde-orde achtpuntige sterren te beschrijven; de hoogte verandert uiteraard. Zo ontstaat de (4 4 8₃) die in figuur 6.1 getekend is. Hoe groot is nu de orde van dit veelvlak? Wel, we gebruiken de analyse uit 6.2 en vinden met $H = 16$, $n_1 = 8$, $n_2 = 4$, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $Z_1 = 2$, $Z_2 = 8$, dat $R = 24$ en $c = 3$; de orde is dus 3. Begrijpelijk: vanuit een punt in het midden passeert een lijn naar buiten die de achtpuntige ster snijdt, alleen de kern van {8₃}, en een horizontale lijn snijdt drie vierkanten.

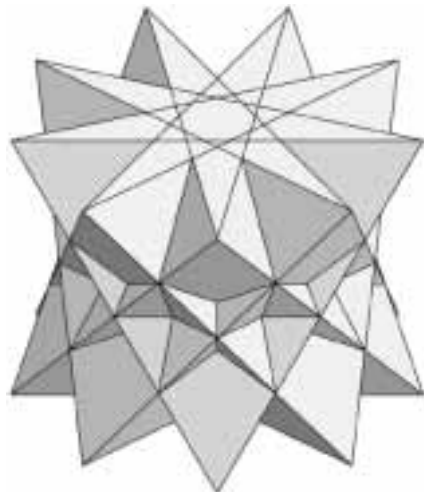
Op een wat omslachtiger doch wellicht doorzichtiger manier bereiken we hetzelfde resultaat: De hoekpunten van de 3e orde achtster vormen hoeken van 45° (zie de behandeling in § 5.1):

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{8 - 3 \cdot 2}{8} \cdot 360^\circ = 45^\circ$$

De som van de hoeken in een hoekpunt van (4 4 8₃) is dus $90^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 225^\circ$, en het hoektekort is $360^\circ - 225^\circ = 135^\circ$. De som van de hoektekorten op alle hoekpunten bedraagt $H \cdot 135^\circ$ en dit moet een geheel veelvoud van 720° zijn, dus $c \cdot 720^\circ$, waarbij c de orde van het veelvlak voorstelt oftewel het aantal malen dat de bol door het veelvlak 'bedekt' wordt. In dit geval blijkt de kleinst mogelijke waarde $c = 3$ te bedragen met $H = 16$, hetgeen tevens de juiste waarden zijn want ook voor de verwante (8 4 4) is $H = 16$. Uit Euler en de andere relaties volgen de waarden van de Z 's en R .



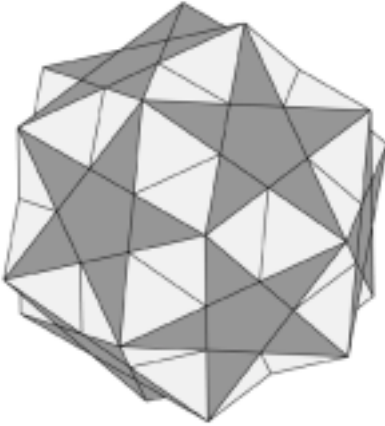
Figuur 6.1. Prisma (4 4 8₃).



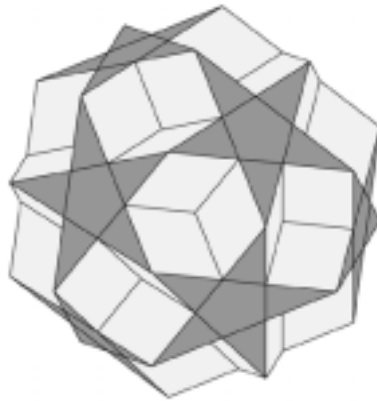
Figuur 6.2. Antiprisma (3 3 3 9₄).

Een soortgelijk voorbeeld is het ontstaan uit de (3 3 3 9) van de (3 3 3 9₄), weergegeven in figuur 6.2.

Ook heel eenvoudig is de vervanging van de vijfhoeken in de regelmatige dodekaeder door pentagrammen $\{5_2\}$. Tussen de aansluitingen der drie, nu scherpe, hoeken, ontstaan ‘gaten’ die worden opgevuld door gelijkzijdige driehoeken. Het resultaat is $(3\ 5_2\ 3\ 5_2\ 3\ 5_2)$, uiteraard met 20 hoekpunten, voorts 12 pentagrammen, 20 driehoeken en 60 ribben (figuur 6.3). De orde van dit veelvlak blijkt, volgens de formule, $c = 2$ te bedragen.



Figuur 6.3. $(3\ 5_2\ 3\ 5_2\ 3\ 5_2)$.

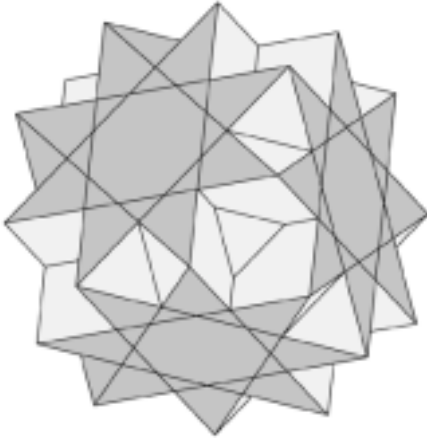


Figuur 6.4. $(5\ 5_2\ 5\ 5_2)$.

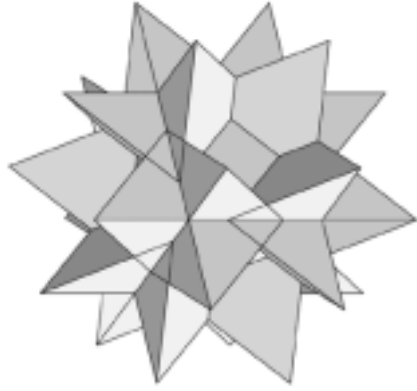
Een volgend voorbeeld in deze serie is de $(5\ 5_2\ 5\ 5_2)$, die ontstaat door in de $(3\ 5\ 3\ 5)$ de vijfhoeken te vervangen door $\{5_2\}$ pentagrammen. De driehoeken verdwijnen, en er verschijnen 12 nieuwe vijfhoeken (zie figuur 6.4). Uit de formule in 6.2 volgt dat, met $H = 30$, de orde $c = 3$ bedraagt.

Ten slotte bezien we een tweetal UH's die afgeleid kunnen worden van de $(3\ 8\ 8)$, namelijk de $(3\ 8_3\ 4\ 8_3)$ en de $(3\ 8_3\ 8_3)$, die respectievelijk ontstaan door 3e orde achthoeken in en om de achthoeken van de $(3\ 8\ 8)$ te beschrijven. In beide gevallen blijft het aantal hoekpunten $H = 24$. Bij de $(3\ 8_3\ 4\ 8_3)$ worden, naast de acht driehoeken en de zes achthoeken nog zes vierkanten gevormd (figuur 6.5). De $(3\ 8_3\ 8_3)$ bestaat uit acht driehoeken en zes derde-orde achthoeken (figuur 6.6).

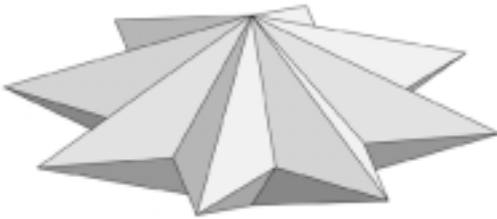
Elk der hierboven beschreven UH's heeft een duaal toegevoegd, tweede-soort veelvlak, een UH2 naast een UH1, dat, evenals in hoofdstuk 4 beschreven, ontstaan gedacht kan worden door het aanbrengen in de hoekpunten van raakvlakken aan de omgeschreven bol. De zijvlakken van deze UH2's zijn niet-regelmatige 3-, 4- of 6-hoeken. Anders dan bij de U2's is hun vorm, door de diverse onderlinge snijdingen, in de afbeelding van het veelvlak niet gemakkelijk te herkennen. De bij bovengenoemde UH1's behorende UH2's zijn weergegeven in figuur 6.7 tot en met 6.10.



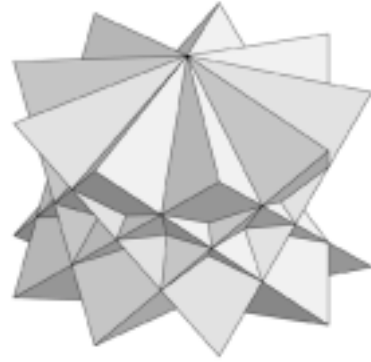
Figuur 6.5. $(3\ 8_3\ 4\ 8_3)$.



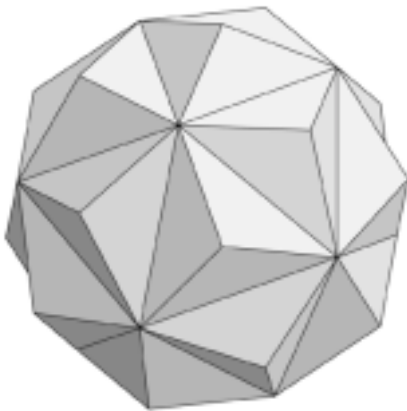
Figuur 6.6. $(3\ 8_3\ 8_3)$.



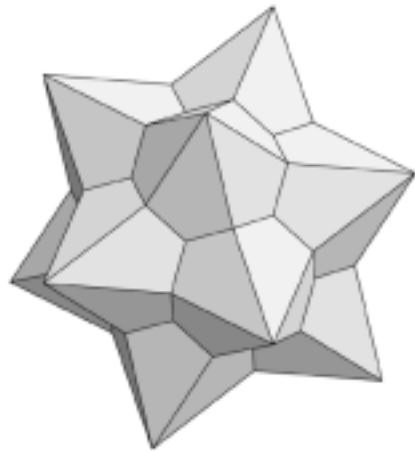
Figuur 6.7. $((4\ 4\ 8_3))$.



Figuur 6.8. $((3\ 3\ 3\ 9_4))$.



Figuur 6.9. $((3\ 5_2\ 3\ 5_2\ 3\ 5_2))$.



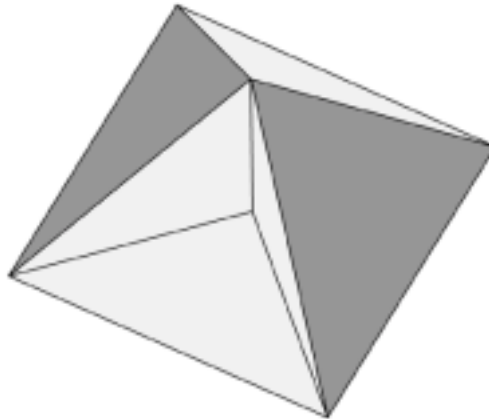
Figuur 6.10. $((5\ 5_2\ 5\ 5_2))$.

6.4. Stervorming in hoekpunten

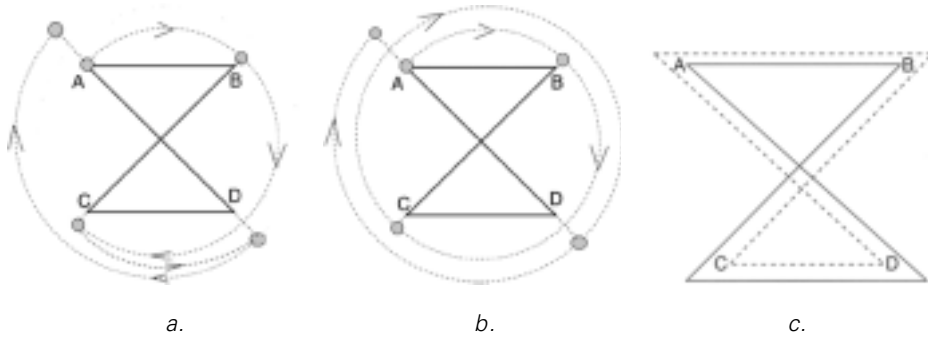
Evenals in een UH zijvlakken tot sterren kunnen worden getransformeerd, kunnen ook de veelvlakshoeken in de hoekpunten vervangen worden door hogere-orde veelvlakshoeken. Bij een regelmatige veelvlakshoek gaat dit op z'n eenvoudigst; bijvoorbeeld de transformatie van een eerste- naar een tweede-orde vijfvlakshoek, die de regelmatige icosaeeder omzet in de grote icosaeeder.

Bij de uniforme veelvlakken hebben we echter nooit met regelmatige veelvlakshoeken te maken; stervorming in de hoekpunten zal dus tot geheel andere situaties leiden. Dit wordt al direct gedemonstreerd door de mogelijkheden tot stervorming in een viervlakshoek. Terwijl een regelmatige vierhoek of een een regelmatige viervlakshoek nooit tot regelmatige stervorming aanleiding kunnen geven, kan dit wel als we de eis van regelmatigheid loslaten: elke vierhoek, inclusief het vierkant, kan met gebruik van de diagonalen omgezet worden in een 'stervormige' vierhoek.

Zolang we kijken naar uniforme veelvlakken van de eerste soort en hun transformaties naar hogere-orde exemplaren, komen we het omvormen van vierhoeken in sterren niet tegen, maar wel dat van viervlakshoeken naar hogere ordes. Het allereerste voorbeeld betreft zelfs een Platonisch lichaam: de oktaeder. Wordt daarin de viervlakshoek vervangen door een een hogere-orde viervlakshoek, zoals schematisch weergegeven in figuur 6.11, dan verandert de $(3\ 3\ 3\ 3)$ in een $(3\ 4\ 3\ 4)_2$. Hoekpunten, ribben en vier van de acht zijvlakken blijven op hun plaats, terwijl vier driehoeken verdwijnen en vier nieuwe vierkanten verschijnen. De index 2 in de notatie geeft voorlopig aan dat de veelvlakshoeken in de hoekpunten van de 2e orde zijn ten gevolge van de stervorming, in analogie met de in § 5.2 ingevoerde nomenclatuur.



Figuur 6.11. $(3\ 4\ 3\ 4)_2$.



Figuur 6.12. Rondgang om hoekpunt.

Passen we nu op dit veelvlak de formules uit 6.2 toe, dan vinden we, met $m_1 = 2$, $n_1 = 3$, $a_1 = 1$, $m_2 = 2$, $n_2 = 4$, $a_2 = 1$, $m = 4$ en $b = 2$: $H/c = 12/7$. Aangezien uit de strikte verwantschap met de regelmatige oktaeder duidelijk is dat $H = 6$, volgt hieruit dat $m = 7/2$. Deze waarde lijkt op het eerste gezicht, als gebroken getal, vreemd, en bovendien absurd hoog: het aantal malen dat het veelvlak de bol bedekt is gelijk aan de helft van het aantal vlakken! Zouden we voor b de waarde $3/2$ kiezen in plaats van 2, dan vinden we $H/c = 3$, dus $c = 2$, hetgeen meer acceptabel lijkt. Laten we echter de keus van b iets nader bekijken. Het is het aantal malen dat de omgeschreven cirkel doorlopen wordt bij een rondgang langs de veelhoek, dus ABCDA. Gaan we daarbij in B rechtsom, in C en D linksom en in A weer rechtsom (figuur 6.12a), dan worden de bogen AB, BD en CA elk één maal beschreven, doch CD drie maal; de orde wordt dus $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$. Dit klopt dan echter niet meer als we het uitgangsvierkant vervangen door een anders gevormde vierhoek, bijvoorbeeld een smalle rechthoek; bovendien lijkt het wisselen van omlooprichting bij de hoekpunten niet logisch. Als we een rondgang maken waarbij we in C óók rechtsaf slaan (figuur 6.12 b), dan doorlopen we tussen C en D $\frac{3}{4}$ van de cirkel; de orde wordt dan: $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$, wat weer in overeenstemming is met de waarde voor andere stervormingen, en bovendien ook geldig voor afwijkingen van de vierkante vorm. We komen dus toch bij $c = \frac{7}{2}$ terecht. Om deze waarde wat plausibel te maken, volgen we dezelfde gedachtengang als bij de vierhoek: twee van de vier driehoeken bedekken de bol elk voor $1/8$, de andere twee niet voor $1/8$ maar voor de rest van de bol, dus elk $7/8$. Samen met de drie halve bollen voor elk van de vierkanten levert dit inderdaad $m = 7/2$!

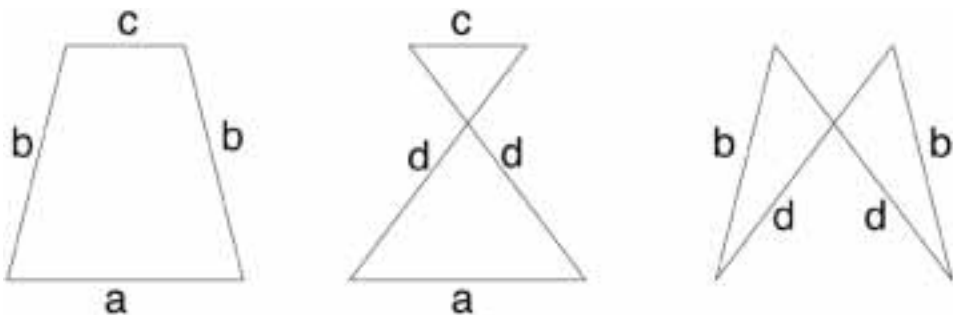
Een bijzonderheid van de $(3\ 4\ 3\ 4)_2$ is dat van dit veelvlak geen buiten- of binnenkant is te definiëren. Maken we een tocht over het oppervlak rondom een van de hoekpunten (figuur 6.12c) dan komen we van de buitenzijde in de binnenzijde terecht. Dit is op zichzelf nog niets bijzonders, maar als we bedenken dat dit bij de andere hoekpunten ook het geval is, dan wordt duidelijk dat dit veelvlak geen buiten- of binnenzijde kent; met andere woorden: het is een Möbius-oppervlak, analoog aan dat van een strook papier waarvan het ene uiteinde na een draaiing van 180° op het andere geplakt is.

Analoog aan het ontstaan van de $(3\ 4\ 3\ 4)_2$ door ‘stervorming’ van de viervlakshoeken

kan uit ieder uniform veelvlak U1 met viervlakshoeken, een UH2 gevormd worden, of zelfs twee, want als de viervlakshoek niet regelmatig is kunnen de diagonalen op twee manieren met twee overstaande zijden gecombineerd worden (figuur 6.13)



Sterren, © 1948 M.C. Escher / Cordon Art – Baarn – Holland.



Figuur 6.13. Vorming van $(a d c d)_2$ en $(b d b d)_2$ uit $(a b c b)$.

Zo geeft de $(3 4 3 4)$ aanleiding tot de vorming van $(3 6 3 6)_2$ en van $(4 6 4 6)_2$, zoals in figuur 6.14 en 6.15 aangegeven.



Figuur 6.14. $(3\ 6\ 3\ 6)_2$.

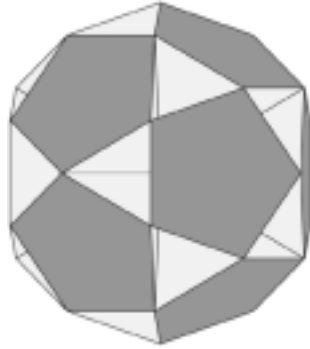


Figuur 6.15. $(4\ 6\ 4\ 6)_2$.

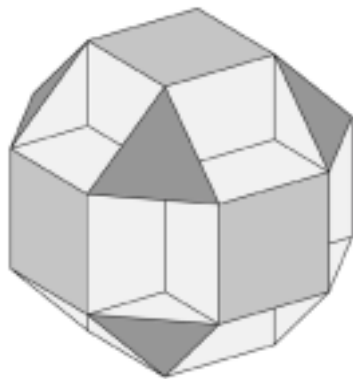
Eveneens ontstaan uit de $(3\ 5\ 3\ 5)$ zowel de $(3\ 10\ 3\ 10)_2$ als de $(5\ 10\ 5\ 10)_2$ (zie figuur 6.16 en 6.17).



Figuur 6.16. $(3\ 10\ 3\ 10)_2$.



Figuur 6.17. $(5\ 10\ 5\ 10)_2$.

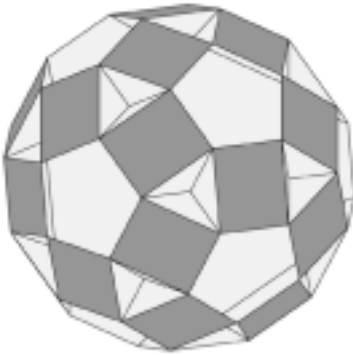


Figuur 6.18. $(3\ 8\ 4\ 8)_2$.

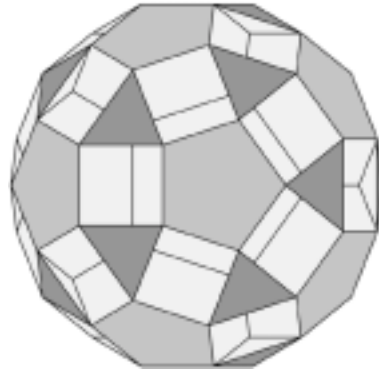


Figuur 6.19. $(4\ 8\ 4\ 8)_2$.

De $(3\ 4\ 4\ 4)$ levert de $(3\ 8\ 4\ 8)_2$ en de $(4\ 8\ 4\ 8)_2$ (zie figuur 6.18 en 6.19); de $(3\ 4\ 5\ 4)$ de $(4\ 10\ 4\ 10)_2$ en de $(3\ 10\ 5\ 10)_2$ (zie figuur 6.20 en 6.21).



Figuur 6.20. $(4\ 10\ 4\ 10)_2$.



Figuur 6.21. $(3\ 10\ 5\ 10)_2$.

In al deze gevallen moet de orde b van de stervormige viervlakshoek, evenals bij het eerder besproken exemplaar, op 2 gesteld worden. De tabel geeft verdere bijzonderheden van de hier genoemde UH2's.

Sommige hebben, evenals de $(3\ 4\ 3\ 4)_2$, slechts een enkele zijde (Möbius), sommige zijn 'gewoon' dubbelzijdig. Dit hangt onder andere af van de pariteit der diverse zijvlakken. Zo blijkt bijvoorbeeld bij de $(3\ 8\ 4\ 8)_2$ dat, als we de vierkanten als 'buiten' definiëren, we tegen de 'binnenkant' van de driehoeken aankijken. Bij de verwante $(4\ 8\ 4\ 8)_2$ is het daarentegen niet mogelijk alle vierkanten als 'buiten' te beschouwen: twee aan een hoekpunt grenzende vierkanten zijn tegengesteld wat 'buiten' en 'binnen' betreft en het veelvlak is derhalve eenzijdig.

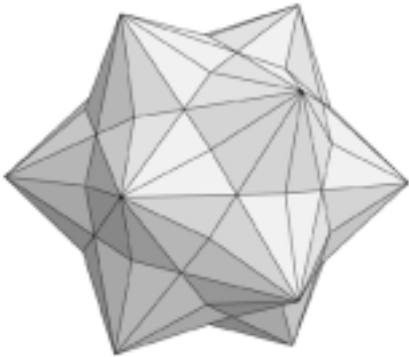
Zoals de schematische voorstellingen van de viervlakshoeken aangeven, gaan in een aantal gevallen de diagonaalvlakken door het middelpunt; hierbij is dus de vorming van een duale tweede-soort niet mogelijk. Bij andere, zoals de $(4\ 8\ 4\ 8)_2$, de $(4\ 10\ 4\ 10)_2$ en de $(3\ 10\ 5\ 10)_2$ kan dat wel; deze UH2's zijn weergegeven in figuur 6.22 tot en met 6.24.

De zijvlakken van deze soort UH2's zijn uiteraard niet convex; ze hebben soms de gedaante van de in figuur 6.13 aangegeven doorsnijdingen van veelvlakshoeken, soms zijn ze pijlvormig (vierhoek met inspringende hoek).

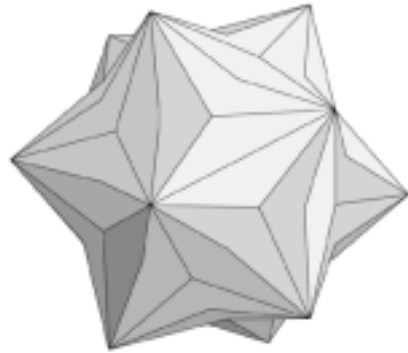
Ten slotte in het kader van stervorming in hoekpunten nog enkele speciale gevallen: Ook de in de vorige paragraaf besproken UH1's kunnen zich voor dit doel lenen. Zo vormt de $(3\ 8_3\ 4\ 8_3)$ de $(3\ 4\ 4\ 4)_2$ (figuur 6.25). Ook de $(3\ 5_2\ 3\ 5_2\ 3\ 5_2)$ kan door stervorming van de zesvlakshoek een nieuwe UH1 opleveren: de $(5\ 5_2\ 5\ 5_2\ 5\ 5_2)_2$, die in figuur 6.26 is weergegeven, trouwens ook de niet getoonde $(3\ 5\ 3\ 5\ 3\ 5)_2$.



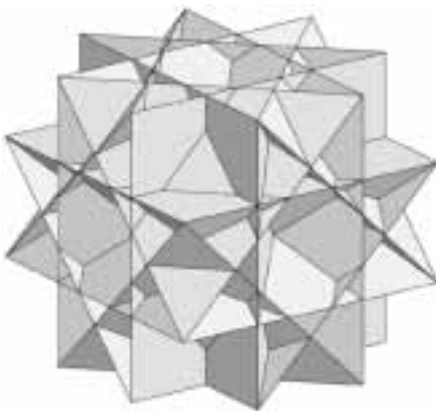
Figuur 6.22. $((4\ 8\ 4)_2)$.



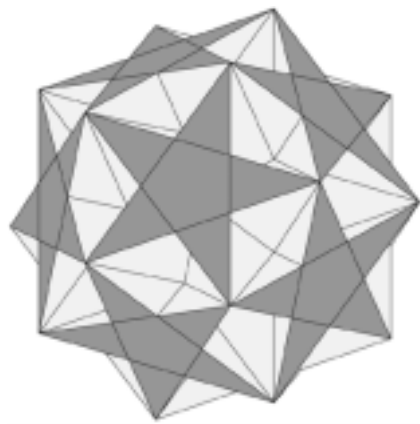
Figuur 6.23. $((4\ 10\ 4)_2)$.



Figuur 6.24. $((3\ 10\ 5)_2)$.



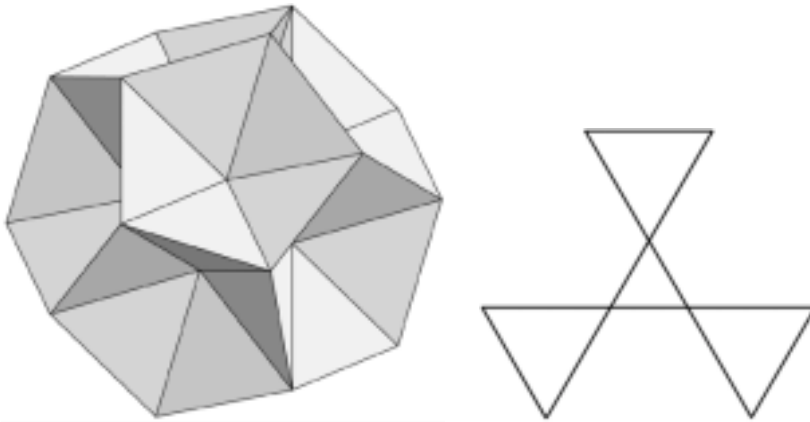
Figuur 6.25. $(3\ 4\ 4)_2$.



Figuur 6.26. $(5\ 5_2\ 5\ 5_2\ 5\ 5_2)_2$.

Het laatste voorbeeld hoort eigenlijk niet thuis in dit hoofdstuk, maar is interessant genoeg om toch, terzijde, te worden genoemd. Het betreft een veelvlak van de gedaante

$(6_2 6_2 6_2 6_2 6_2 6_2)_2$. Dit is niet een uniform veelvlak, want de zijvlakken zijn geen regelmatige veelhoeken. Ze zijn, met het veelvlak, getoond in figuur 6.27. Het veelvlak lijkt sterk op een regelmatige dodekaeder waarin de vijfhoeken vervangen zijn door naar binnen gekeerde piramides met gelijkzijdige driehoeken; deze driehoeken staan echter niet op zichzelf, maar vormen drie aan drie, via verlengde ribben, een tweede-orde zeshoek. De merkwaardigste eigenschap van dit veelvlak is dat het, na duale transformatie, aan zichzelf gelijk blijft; het bestaat immers uit tweede-orde zeshoeken, die tweede-orde zesvlakshoeken vormen! Het is verrassend dat er, naast het regelmatig viervlak dat deze eigenschap ook bezit, nog (minstens) een ander veelvlak met identieke omkering bestaat!



Figuur 6.27. $(6_2 6_2 6_2 6_2 6_2 6_2)_2$ met een zijvlak.

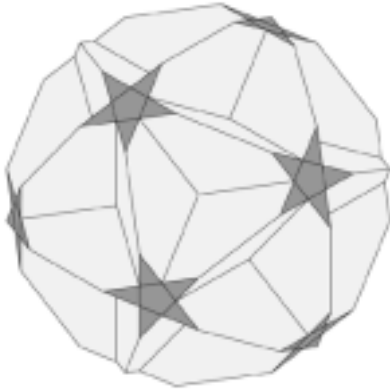
6.5. Afknotting van hoekpunten

Van de derde der in 6.1 genoemde mogelijkheden komen hier een tweetal voorbeelden, en wel de twee meest voor de hand liggende. Afknotting van twee der Poincaré-lichamen leidt tot UH's, namelijk bij de grote dodekaeder en bij de grote ikosaeder. In beide gevallen zijn de hoekpunten vijftallig en van de tweede orde; afknotting levert dus $\{5_2\}$ vlakken.

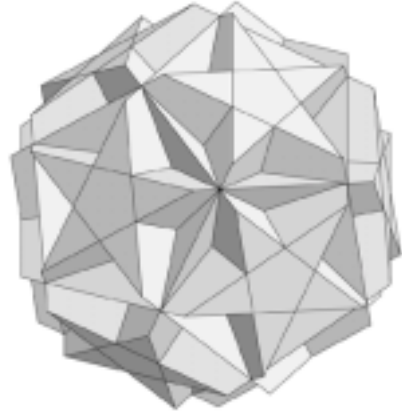
Uit de grote dodekaeder $\{5, 5_2\}$ of $(5 5 5 5)_2$ ontstaat de $(5_2 10 10)$, die afgebeeld is in figuur 6.28. Het lichaam heeft 60 hoekpunten, 12 5_2 - en 12 10-vlakken, en 90 ribben. De orde van het veelvlak is, evenals bij de $\{5, 5_2\}$, $c = 3$.

Afknotting van de grote ikosaeder levert de $(5_2 6 6)$ (zie figuur 6.29). Deze is opgebouwd uit 12 pentagrammen $\{5_2\}$ en 20 zeshoeken, en heeft eveneens 60 hoekpunten en 90 ribben. De orde bedraagt, evenals bij de $\{3 5_2\}$, $c = 7$.

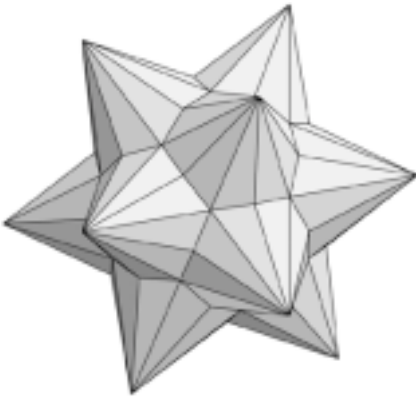
Beide UH1's hebben een UH2 naast zich; de $((5_2 10 10))$ en de $((5_2 6 6))$ zijn respectievelijk weergegeven in figuur 6.30 en figuur 6.31.



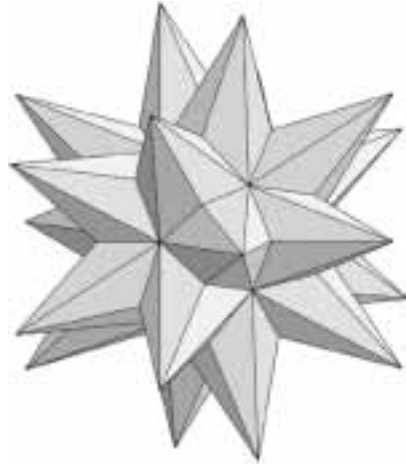
Figuur 6.28. Afgeknot groot dodekaeder $(5_2 10 10)$.



Figuur 6.29. Afgeknot groot ikosaeder $(5_2 6 6)$.



Figuur 6.30. $((5_2 10 10))$.



Figuur 6.31. $((5_2 6 6))$.

In onderstaande tabel zijn de tot dusver besproken UH1's samengevat.

notatie	$\{n_a\}_1$ $\{n_a\}_2$ $\{n_a\}_3$	m_1 m_2 m_3	m b	H/c	H c	Z_1 Z_2 Z_3	Z	R
(4 4 8 ₃)	{4} {8 ₃ }	2 1	3 1	16/3	16 3	8 2	10	24
(3 3 3 9 ₄)	{3} {9 ₄ }	3 1	4 1	9/2	18 4	18 2	20	36
(3 5 ₂ 3 5 ₂ 3 5 ₂)	{3} {5 ₂ }	3 3	6 1	10	20 2	20 12	32	60
(5 5 ₂ 5 5 ₂)	{5} {5 ₂ }	2 2	4 1	10	30 3	12 12	24	60
(3 8 ₃ 4 8 ₃)	{3} {4} {8 ₃ }	1 1 2	4 1	6	24 4	8 6 6	20	48
(3 8 ₃ 8 ₃)	{3} {8 ₃ }	1 2	3 1	24/7	24 7	8 6	14	36
(3 4 3 4) ₂	{3} {4}	2 2	4 2	12/7	6 7/2	4 3	7	12
(3 6 3 6) ₂	{3} {6}	2 2	4 2	2	12 6	8 4	12	24
(4 6 4 6) ₂	{4} {6}	2 2	4 2	12/5	12 5	6 4	10	24
(3 10 3 10) ₂	{3} {10}	2 2	4 2	30/13	30 13	20 6	26	60
(5 10 5 10) ₂	{5} {10}	2 2	4 2	10/3	30 9	12 6	18	60
(3 8 4 8) ₂	{3} {4} {8}	1 1 2	4 2	12/5	24 10	8 6 6	20	48
(4 8 4 8) ₂	{4} {8}	2 2	4 2	8/3	24 9	12 6	18	48
(4 10 4 10) ₂	{4} {10}	2 2	4 2	20/7	60 21	30 12	42	120
(3 10 5 10) ₂	{3} {5} {10}	1 1 2	4 2	30/11	60 22	20 12 12	44	120
(3 4 4 4) ₂	{3} {4}	1 3	4 2	24/13	24 13	8 18	26	48
(5 ₂ 5 5 ₂ 5) ₂	{5} {5 ₂ }	3 3	6 2	5/2	20 8	12 12	24	60
(6 ₂ 6 ₂ 6 ₂ 6 ₂ 6 ₂ 6 ₂) ₂	{6 ₂ }	6	6 2	2	20 10	20	20	60
(5 ₂ 10 10)	{5 ₂ } {10}	1 2	3 1	20	60 3	12 12	24	90
(5 ₂ 6 6)	{5 ₂ } {6}	1 2	3 1	60/7	60 7	12 20	32	90

6.6. Andere mogelijkheden

In de inleiding tot dit hoofdstuk is het getal 53 genoemd als het aantal UH1's dat, afgezien van de uit prisma's en antiprisma's afgeleide exemplaren, momenteel bekend is. Van dit aantal is slechts een betrekkelijk gering deel in dit hoofdstuk besproken. Voor een complete verzameling zij verwezen naar het boek van Wenninger. Trouwens, wat is compleet? Onder de 53 UH1's zijn er die al vele eeuwen bekend zijn, maar zijn er ook die pas enkele tientallen jaren geleden ontdekt zijn! Anders dan bij de Platonische, Poinsoot- en Archimedische lichamen is nog nooit sluitend bewezen hoeveel hogere-orde uniforme veelvlakken er bestaan. Men blijft zoeken!