Regelmaat in de ruimte

A.K. van der Vegt

DUP Blue Print

.

Eerste druk 1991, tweede druk 2002

DUP Blue Print is een imprint van:
Delft University Press
P.O. Box 98, 2600 MG Delft, The Netherlands
tel. +31 15 27 85678, telefax +31 15 27 85706, e-mail info@library.tudelft.nl
internet: http://www.library.tudelft.nl/dup

Uitgegeven in opdracht van:
Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft
Poortlandplein 6, 2628 BM Delft, The Netherlands
tel. +31 15 27 82124, telefax +31 15 27 87585, e-mail: hlf@vssd.nl
internet: http://www.vssd.nl/hlf

URL over dit boek: **http://www.vssd.nl/hlf/a017.htm**
Voor docenten die dit boek in cursusverband gebruiken is de verzameling digitale illustraties beschikbaar die in het boek is afgedrukt. Een verzoek tot verkrijging van de verzameling kan men richten aan email-adres hlf@vssd.nl.

Printed in The Netherlands.

ISBN 90-407-1274-3
NUGI 811
Trefw: meetkunde

Voorwoord

Dit boekje gaat over een heel oud onderwerp. Al eeuwen geleden waren er mensen die door veelvlakken geboeid werden en een groot deel van hun tijd besteedden aan het opsporen en analyseren van regelmatige structuren. In de terminologie van de veelvlakken kom je dan ook namen tegen als Archimedes, Pythagoras, Plato en Kepler.
Veelvlakken spelen vandaag de dag een rol in onder andere de kristallografie, de beeldende kunst (Escher!), de bouwkunde en, vooral, in de ‘polyedrofilie’. Met dit laatste bedoel ik het verschijnsel dat een klein aantal mensen zo verrukt zijn van veelvlakken (polyeders), dat ze het niet kunnen laten om er mee te spelen, ze te analyseren, ze te plakken of ze te boetseren, en bovenal zich erin te verlustigen, zodat men dit verschijnsel eigenlijk ‘polyedromanie’ zou moeten noemen.
Met alle lezers die mijn enthousiasme delen, acht ik me, en ook gelet op bovengenoemde namen, in goed gezelschap. Tientallen jaren spelen met veelvlakken heeft uiteindelijk tot dit boekje geleid. Ik hoop dat het lotgenoten zal stimuleren om hun hobby nog intensiever te beoefenen.
Dit boekje pretendeert geen historisch-wetenschappelijke verhandeling te zijn. Literatuur wordt daarom, op een kort historisch overzicht na, niet of nauwelijks vermeld. Als duidelijke uitzondering noem ik echter speciaal het prachtige boek van Wenninger: ‘Polyhedron models’, een unieke foto-verzameling van door de auteur zelf geplakte modellen van eenvoudige tot uiterst gecompliceerde veelvlakken.
Ten slotte nog iets over de figuren. Deze zijn tot stand gekomen door een combinatie van:

- toepassing van een beetje analytische meetkunde, om vanuit de coördinaten der hoekpunten, die der zijvlakken te berekenen, en voor de ‘tweede soort’, raakvlakken en hun snijlijnen.
- een serie eenvoudig te schrijven BASIC-programma’s, met als meest gecompliceerd onderdeel het bepalen van de zichtbare delen van ribben bij hogere-orde veelvlakken,
- een Archimedes 310 als krachtig en zeer snel rekentuig,
- een voor de Archimedes geschreven tekenprogramma: ‘Superdump’, waarmee het printen met hoge resolutie mogelijk is.

Ieder die belangstelling heeft in meer details, is welkom voor verdere informatie.

Delft, mei 1991 A.K. van der Vegt

Voorwoord bij de tweede druk

In deze tweede druk is een aantal fouten hersteld en zijn enkele aanvullingen aangebracht. Vele figuren zijn duidelijker én eleganter geworden door het inkleuren met schaduwtinten, een werkje dat vergemakkelijkt werd door een uitgebreider BASIC-programma. Wellicht zullen de lezers deze veranderingen op prijs stellen.

Delft, maart 2002 A.K. van der Vegt

Inhoud

1 Inleiding

1.1. Waar gaat het over?

Vraag je aan iemand, een veelvlak te noemen, dan is het meest voor de hand liggende antwoord: een kubus. Die kennen we als dobbelsteen of als doos, maar ook in vervormde gedaante, als rechthoekig of scheefhoekig blok. Ook prisma's zijn bekend: staven met vlakke kanten (als er vier kanten zijn, zitten we weer in de buurt van de kubus). Verder: piramiden, beroemd vanuit Egypte.
Maar niet alle denkbeeldige veelvlakken zijn voor dit boekje van belang: alleen die exemplaren die een duidelijke regelmaat vertonen, bijvoorbeeld omdat alle hoekpunten en/of alle zijvlakken gelijk en/of regelmatig zijn. De blokken en de piramiden vallen dan af, behalve als de piramide driezijdig is, want dan kan hij uit vier gelijkzijdige driehoeken bestaan.
Zo hebben we al twee geheel regelmatige veelvlakken gezien: de kubus (het zesvlak) en het viervlak. Er blijken, zoals we al snel zullen ontdekken, nog drie te bestaan: het achtvlak, het twaalfvlak en het twintigvlak. Dit vijftal is al boeiend genoeg om uitvoerig te bekijken, elk op zichzelf en in hun onderlinge relaties.
Maar er is meer! Op verschillende manieren kunnen we onze verzameling uitbreiden, bijvoorbeeld door concessies te doen aan de eis van volledige regelmaat (we komen dan bij de half-regelmatige veelvlakken terecht) en ook door naar stervormige lichamen te kijken. Hele werelden gaan dan open, die we in dit boekje een beetje zullen gaan verkennen.
Maar eerst een heel summier overzicht over wat de mens in de afgelopen 25 eeuwen over veelvlakken te weten is gekomen.

1.2. Een oud onderwerp

2500 jaar geleden (rond 520 voor Christus) wist Pythagoras al van het bestaan van drie van de vijf geheel regelmatige veelvlakken: hij beschreef de kubus, het viervlak en het twaalfvlak.
Plato (rond 350 voor Christus) kende ze alle vijf, inclusief achtvlak en twintigvlak, en bracht ze als 'kosmische bouwstenen van de wereld' in verband met de vijf elementen: vuur, lucht, water, aarde en 'hemelmaterie'. Vandaar de aanduiding van het vijftal als 'Platonische lichamen'. Euklides (rond 300 voor Christus) beschreef ze nog eens in

groter detail.
Aan Archimedes (rond 250 voor Christus) wordt door Pappus (500 jaar later!) kennis van de 13 halfregelmatige of Archimedische lichamen toegeschreven.
Dan, na een heel lange tijd, komt Kepler (1571–1630) [1] met een samenvattende beschrijving van de vijf Platonische en de dertien Archimedische lichamen. Van Kepler is ook de gedachte dat de vijf Platonische lichamen verband houden met de structuur van het zonnestelsel (er waren, behalve de Aarde, in die tijd nog maar vijf planeten bekend!). Kepler kwam bovendien op het idee dat ook pentagrammen (regelmatige vijfhoekige sterren) tot regelmatige veelvlakken kunnen leiden, en construeerde de kleine en de grote sterdodekaeder.
Het duurde nog twee eeuwen voordat Poinsot (1777-1859) [2] deze serie van twee aanvulde tot de complete verzameling van vier geheel regelmatige ster-veelvlakken.
Daarna verschijnen, stuk voor stuk, de op stervorming gebaseerde halfregelmatige lichamen. Telkens worden er weer een paar ‘ontdekt’, waarbij onder andere de namen Pitsch [3], Brueckner [4] en Hess [5] geregeld voorkomen (allen eind 19e eeuw).
Coxeter [6] maakte een diepgaande mathematische analyse van de diverse veelvlakken en tevens van de uitbreiding naar hogere dimensies.
Ten slotte: het fotoboek van Wenninger [7] geeft een summiere analyse en een briljant overzicht van een groot aantal veelvlakken. Bovendien bevat dit boek uitvoerige aanwijzingen om de veelvlakken zelf te plakken.

1.3. Wat zijn veelvlakken?

Veelvlakken zijn afgesloten delen van de ruimte, die begrensd worden door vlakke veelhoeken, zoals de kubus, die begrensd wordt door zes vierkanten. Bij het bekijken van veelvlakken zullen we dus eerst de aandacht moeten richten op de zijvlakken. Maar ook de hoekpunten zijn van belang; hierin komen namelijk een aantal zijvlakken (minstens drie) bijeen in een bepaalde rangschikking, en tevens een aantal ribben (ook drie of meer). De zijvlakken zijn veelhoeken, de hoekpunten vormen veelvlakshoeken; elk van deze is gekarakteriseerd door: al dan niet regelmatigheid, aantal ribben etc. Om iets van veelvlakken te begrijpen zullen we dus eerst zowel de zijvlakken als de opbouw van de hoekpunten moeten bezien.

1.4. Veelhoeken

Een veelhoek is een vlakke figuur, begrensd door een gesloten keten van een aantal lijnsegmenten (de zijden) A_1A_2, A_2A_3, $A_3A_4, \ldots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1, die opvolgende paren van n punten A_1, $A_2, \ldots$, A_n (de hoekpunten) verbinden (figuur 1.1). Voorlopig beschouwen we veelhoeken waarvan de zijden elkaar niet snijden.
Een veelhoek noemen we gelijkzijdig als alle zijden gelijk zijn, en gelijkhoekig als de hoeken gelijk zijn. Zijn veelvlakken zowel gelijkzijdig als gelijkhoekig dan heten ze

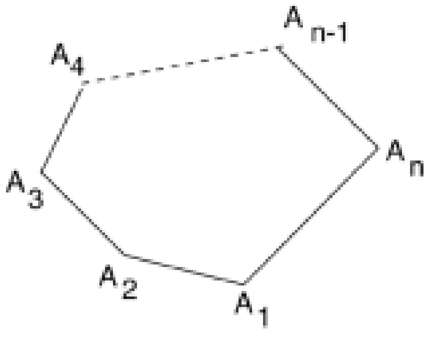
regelmatig. Dit is het geval bij de gelijkzijdige (regelmatige) driehoek, {3}, het vierkant, {4} etc.
Wel gelijkzijdig doch niet regelmatig is bijvoorbeeld de ruit; wel gelijkhoekig doch niet regelmatig is de rechthoek. Er zijn uiteraard oneindig veel regelmatige veelhoeken; we geven ze aan met {n}. De hoeken van {n} kunnen gemakkelijk berekend worden door te bedenken dat een n-hoek gesplitst kan worden in n – 2 driehoeken met als totaalsom der hoeken (n – 2)·180°, dus per hoekpunt 180°·(n – 2)/n. Voor {3}, {4}, {5}, {6}, {8} en {10} wordt dit respectievelijk 60°, 90°, 108°, 120°, 135° en 144°.
Elke {n} heeft een omgeschreven en een ingeschreven cirkel; hun stralen, respectievelijk r_o en r_i, staan in de volgende relaties tot elkaar en tot de ribbe l :

$$l = 2r_o \sin \frac{180°}{n} = 2r_i \tan \frac{180°}{n}$$

Het oppervlak van {n} is:

$$O = \frac{n}{4} \cdot l^2 \cdot \text{cotg} \frac{180°}{n} = \frac{n}{2} \cdot r_o^2 \cdot \sin \frac{360°}{n}$$

Voor zeer grote n nadert dit tot het oppervlak van de omgeschreven cirkel, $\pi \cdot r_o^2$.

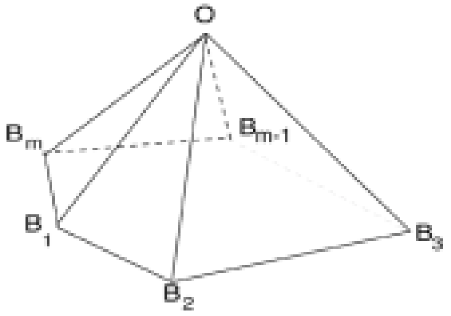


Figuur 1.1. Veelhoek.

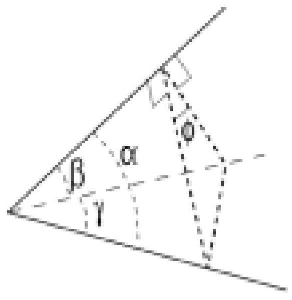
1.5. Veelvlakshoeken

Veelvlakshoeken worden gevormd door een aantal m (drie of meer) vlakken die elkaar in een punt O snijden (figuur 1.2) en die zodanig zijn gerangschikt dat doorsnijding met een ander vlak dat niet door O gaat, een veelhoek vormt (B_1 B_2 … B_m). De lijnen OB_1, OB_2, …, OB_m zijn de ribben van de veelvlakshoek; de vlakdelen die door deze ribben begrensd worden, zijn de zijden. Het is duidelijk dat het aantal ribben zowel als het aantal zijden gelijk aan m is.
De grootte van de zijden wordt uitgedrukt in de hoek die door de begrenzende ribben gevormd wordt (bijvoorbeeld B_2 O B_1), terwijl onder de hoeken van een veelvlakshoek de standhoeken, dat wil zeggen de hoeken tussen de vlakken, verstaan wordt. Een veelvlakshoek kan evenals een veelhoek gelijkzijdig of gelijkhoekig zijn; als beide het

geval is is de veelvlakshoek regelmatig. Een voorbeeld van een regelmatige viervlakshoek is de top van een regelmatige vierzijdige piramide, waarvan het grondvlak een vierkant is.



Figuur 1.2. Veelvlakshoek.



Figuur 1.3. Standhoek.

Als van een drievlakshoek de zijden α, β en γ zijn dan is de hoek (standhoek) tussen de vlakken met zijden α en β gegeven door (zie figuur 1.3):

$$\cos \varphi = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} \tag{1.1}$$

Dit is eenvoudig af te leiden door tweemaal de cosinusregel toe te passen.
Voor een m-vlakshoek met m > 3 is uiteraard niet zo'n algemene relatie aan te geven, omdat de m-vlakshoek niet alleen door de grootte der zijden is vastgelegd (analoog met de n-hoek voor n > 3). Voor regelmatige m-vlakshoeken wordt de standhoek tussen twee aangrenzende zijden gegeven door:

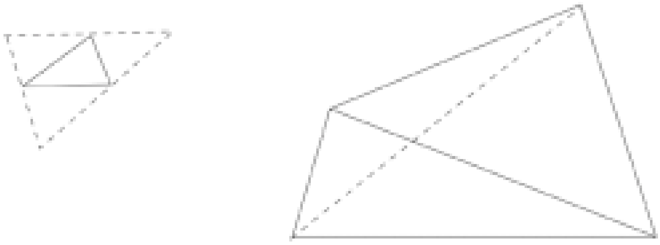
$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha - p}{\cos \alpha + 1} \tag{1.2}$$

waarin $p = 1 + 2 \cdot \cos(360°/m)$, dus $p = 0, 1, (\sqrt{5} + 1)/2$ en 2 voor $m = 3, 4, 5$ en 6 respectievelijk.

1.6. Veelvlakken

Een veelvlak is een lichaam, begrensd door een aantal veelhoeken (*zijvlakken*), die twee aan twee aansluiten langs gemeenschappelijke zijden (*ribben*), en waarvan drie of meer samenkomen in gemeenschappelijke *hoekpunten*.
Ook bij veelvlakken kunnen we spreken van gelijkzijdigheid (alle zijvlakken gelijk) en gelijkhoekigheid (alle veelvlakshoeken in de hoekpunten gelijk). Nu echter is de combinatie van deze twee eigenschappen niet voldoende om het veelvlak ook regelmatig te noemen. Een voorbeeld daarvan is de zogenaamde disphenoide, die ontstaan gedacht kan worden door in een onregelmatige scherphoekige driehoek de middens der zijden

te verbinden en vervolgens de hoekpunten ‘om te klappen’ tot een viervlak (zie figuur 1.4).



Figuur 1.4. Disphenoide.

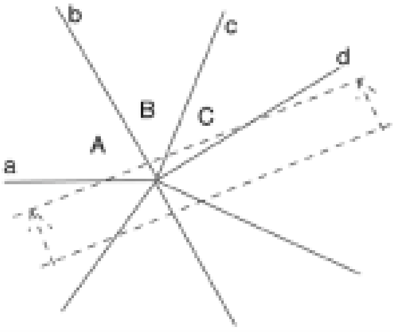
Wil een veelvlak regelmatig zijn dan is bovendien nodig dat de zijvlakken regelmatige veelhoeken zijn; de veelvlakshoeken zijn dan eveneens regelmatig. Deze regelmatige veelvlakken worden aangeduid als *Platonische veelvlakken*, waarvan er, zoals we al gezien hebben, vijf bestaan, en die in hoofdstuk 2 worden behandeld.
Behalve deze Platonische veelvlakken zijn er nog die in mindere mate regelmaat vertonen, zoals de *halfregelmatige* of *uniforme* of *Archimedische* veelvlakken, waarvan twee soorten kunnen worden onderscheiden:
- de zijvlakken zijn wel regelmatig doch niet gelijk en de veelvlakshoeken zijn gelijk (eerste soort),
- de veelvlakshoeken in de hoekpunten zijn wel regelmatig doch niet gelijk en de zijvlakken zijn gelijk (tweede soort).

Op deze twee soorten veelvlakken komen we uitvoerig terug in de hoofdstukken 3 en 4.
Tenslotte: een heel nieuwe wereld gaat open als we de eis laten vallen dat de zijden van een regelmatige veelhoek elkaar niet mogen snijden. We krijgen er dan hele series regelmatige veelhoeken bij (hogere-orde veelhoeken zoals de vijfpuntige ster), en daarmee ook een nieuwe serie regelmatige veelvlakken, en een lange reeks half-regelmatige of uniforme veelvlakken. Deze komen in de hoofdstukken 5 tot en met 7 aan bod.

1.7. Ribben, hoekpunten en zijvlakken

Voordat we in detail gaan kijken naar de diverse soorten veelvlakken, is het nuttig om een algemene relatie tussen de aantallen hoekpunten H, zijvlakken Z en ribben R op te zoeken. Zo’n relatie kan ons namelijk erg goed van pas komen bij het analyseren van de mogelijkheden om een veelvlak op te bouwen.
Er is een stelling van Euler, luidend: $H + Z = R + 2$, die bijvoorbeeld voor een kubus gemakkelijk te verifiëren is: $H = 8$; $Z = 6$; $R = 12$. De stelling kan op diverse manieren bewezen worden. Een der bewijzen is als volgt:
Om vlakken, hoekpunten en ribben te tellen, stellen we ons een plat vlak voor dat aanvankelijk geheel buiten het veelvlak ligt, en dat we zodanig verschuiven dat het zich

als het ware door het veelvlak heen beweegt totdat het aan de andere kant er weer geheel vrij van is. Het vlak beweegt zodanig dat het eerste en het laatste contact op een hoekpunt plaats vindt, terwijl het tijdens zijn tocht steeds slechts een hoekpunt tegelijk passeert; dit is mogelijk omdat het vlak tijdens zijn beweging in willekeurige richtingen mag krommen zonder dat dit uiteraard het resultaat beïnvloedt.



Figuur 1.5. Stelling van Euler.

Beschouwen we eerst een willekeurige positie van het vlak ergens op zijn weg door het veelvlak; we laten het vanuit deze positie iets opschuiven waarbij het een hoekpunt passeert. Hierbij ontmoet het vlak voor de eerste keer p ribben (a, b, c en d in figuur 1.5) en p – 1 zijvlakken (A, B en C). De waarden van H, Z en R groeien daarbij dus aan met respectievelijk $\Delta H = 1$, $\Delta Z = p - 1$, $\Delta R = p$. Dus is $H + Z - R$ niet van waarde veranderd. Dit geldt voor ieder gepasseerd hoekpunt, behalve voor het eerste en het laatste. Als het eerste hoekpunt een m-vlakshoek is, is bij het passeren daarvan $\Delta H = 1$, $\Delta Z = m$, $\Delta R = m$. Bij het passeren van het laatste hoekpunt is $\Delta H = 1$, $\Delta Z = 0$ en $\Delta R = 0$. Totaal blijkt dus te gelden:

$$H + Z = R + 2 \tag{1.3}$$

De stelling van Euler geldt niet in deze vorm voor alle soorten veelvlakken. Een eerste voorwaarde is dat dat het veelvlak vanuit een punt er binnen in enkelvoudig op een omliggende bol geprojecteerd kan worden, anders gezegd dat men het als het ware op kan blazen tot een enkelvoudig boloppervlak. Aan deze voorwaarde is niet voldaan bij de later te behandelen hogere-orde veelvlakken; we zullen dan een gewijzigde en uitgebreide stelling van Euler tegenkomen.
Een andere beperking is dat vanaf ieder hoekpunt ieder ander hoekpunt langs ribben bereikbaar moet zijn. Dit is bijvoorbeeld niet het geval met een veelvlak bestaande uit een kubus met op een zijvlak een in het midden staande kleinere kubus. Hiervoor is gemakkelijk te verifiëren dat $H + Z = R + 3$ (16+11=24+3).
Dat een veelvlak niet convex is (ook standhoeken > 180°) doet er voor de stelling van Euler niet toe; het kan evengoed door ‘opblazen’ tot een bol worden getransformeerd.