5

Numerieke integratie

5.1 Inleiding

Voor het bepalen van volume, massa, lengte enz. is het nodig om de integraal van een functie uit te rekenen. Vaak is het onmogelijk om van een integrand de primitieve te vinden. Om dan toch een antwoord te bepalen wordt er veelal gebruik gemaakt van numerieke integratie.

Als voorbeeld nemen we de productie van een spoiler, die geplaatst wordt op de cabine van een vrachtwagen (Figuur 5.1). De vorm van de spoiler wordt beschreven door een sinusfunctie met een periode van 2π meter. De spoiler wordt door walsen verkregen uit een vlakke plaat. De fabrikant wil weten hoe breed de vlakke plaat moet zijn opdat de horizontale afmeting van de spoiler 80 cm is. Het antwoord hierop is de booglengte van de kromme gegeven door

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & t \qquad\qquad 0 \le t \le 0.8\,. \\ y(t) & = & \sin t \end{array}$$

Voor het bepalen van de booglengte kunnen we gebruik maken van de formule

$$l = \int_0^{0.8} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt = \int_0^{0.8} \sqrt{1+(\cos t)^2}dt\ .$$

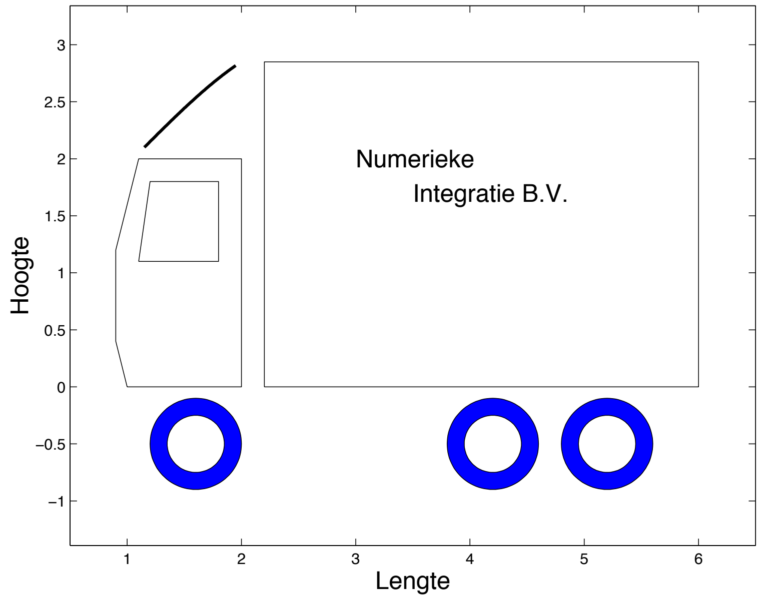
Deze integraal is niet eenvoudig te bepalen. We zullen in dit hoofdstuk laten zien hoe de gezochte lengte bepaald kan worden met behulp van numerieke integratie.

5.2 Eenvoudige numerieke integratieformules

Na een herhaling van de definitie van een integraal zullen we een aantal eenvoudige integratieregels geven. Hiervan zal de benaderingsfout en het effect van afrondfouten onderzocht worden.

Definitie
Een partitie P van $[a,b]$ is een eindig aantal punten x_k waarbij $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$. Een bijbehorende strooiing T is een verzameling tussenpunten t_k zo dat $x_{k-1} \le t_k \le x_k$. De lengte van een interval geven we aan met $h_k = x_k - x_{k-1}$ en de maaswijdte $m(P) = \max\limits_{1\le k\le n}\{h_k\}$. De Riemannsom ¿ voor een functie f die continu is op $[a,b]$ is nu gedefinieerd als:

$$R(f,P,T) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)h_k\ .$$



Figuur 5.1 Vrachtwagen met spoiler op de cabine

Kies een rij verdelingen $P_1, P_2, \ldots$ en bijbehorende strooiingen T_n zodanig dat $m(P_n) \to 0$ dan convergeert

$$R(f, P_n, T_n) \quad \text{naar een limiet} \quad I = \int_a^b f(x)dx\,.$$

Numerieke integratieregels lijken veel op de Riemannsom. Het belangrijkste verschil is de gewenste efficiëntie bij numerieke integratie.

De Rechthoekregel

Neem een equidistante verdeling zo dat de knooppunten gegeven worden door: $x_k = a + kh,\ k = 0, 1, \ldots, n$ met $h = \frac{b-a}{n}$. De strooipunten nemen we gelijk aan de linkerknooppunten: $t_k = x_{k-1}$. De Riemannsom wordt dan gegeven door

$$I_R = h[f(a) + f(a+h) + \ldots + f(b-h)]\,.$$

Stelling 5.2.1 *Zij f een differentieerbare functie op $[a,b]$. Stel M_1 is het maximum van $|f^{'}|$ op $[a,b]$ dan geldt:*

$$|\int_a^b f(x)dx - I_R| \leq \frac{1}{2}M_1(b-a)h$$

Bewijs:

We beschouwen eerst het interval $[x_{k-1}, x_k]$. Uit een Taylor ontwikkeling volgt:

$$f(x) = f(x_{k-1}) + (x - x_{k-1})f^{'}(\xi(x)) \quad \text{met} \quad x_{k-1} \leq \xi(x) \leq x_k\,.$$

Hieruit volgt:

$$|\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x)-f(x_{k-1})]dx| \leq M_1 \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (x-x_{k-1})dx \ ,$$

zodat

$$|\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - hf(x_{k-1})| \leq \frac{1}{2}M_1h^2 \ .$$

Voor de totale fout geldt dus:

$$|\int\limits_a^b f(x)dx - I_R| \leq \sum_{k=1}^{n} |\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - hf(x_{k-1})| \leq \frac{1}{2}M_1h^2n = \frac{1}{2}M_1(b-a)h \ .$$

⊠

Voorbeeld(spoiler)

Voor het voorbeeld genoemd in de introductie willen we de lengte van de vlakke plaat benaderen met een fout van 1 cm. Als we de Rechthoekregel toepassen betekent dit dat

$$\frac{1}{2}M_1 0.8h \leq 0.01 \ .$$

De afgeleide van de integrand $f(t) = \sqrt{1+(\cos t)^2}$ wordt gegeven door:

$$f^{'}(t) = \frac{-\cos t \sin t}{\sqrt{1+(\cos t)^2}} = \frac{-\frac{1}{2}\sin 2t}{\sqrt{1+(\cos t)^2}} \ .$$

Hieruit volgt $|f^{'}| \leq M_1 \leq \frac{1}{2}$ zodat een stapgrootte $h = 0.05$ voldoende zou moeten zijn. De integraal is 1.0759 m in 5 cijfers nauwkeurig. Voor $n = 16$ geeft de Rechthoekregel 1.0807 zodat de fout inderdaad kleiner is dan 1 cm.

De nauwkeurigheid van de Rechthoekregel is $O(h)$. Hierna wordt een methode gegeven, die met dezelfde hoeveelheid werk, een nauwkeuriger antwoord geeft.

Midpuntregel

Neem een equidistante verdeling zodat de knooppunten gegeven worden door: $x_k = a + kh$, $k = 0,1,...,n$ en $h = \frac{b-a}{n}$. De middenpunten $\frac{x_k+x_{k-1}}{2}$ worden als strooipunten gekozen. De Riemannsom wordt dan gegeven door:

$$I_m = h[f(a+\frac{1}{2}h) + f(a+\frac{3}{2}h) + ... + f(b-\frac{1}{2}h)] \ .$$

Stelling 5.2.2 *Zij f een tweemaal differentieerbare functie op $[a,b]$. Stel M_2 is het maximum van $|f^{''}|$ op $[a,b]$ dan geldt:*

$$|\int\limits_a^b f(x)dx - I_m| \leq \frac{1}{24}M_2(b-a)h^2 \ .$$

Bewijs deze stelling zelf.
(Hint: ontwikkel f rond $\frac{x_k+x_{k-1}}{2}$ in een Taylorpolynoom van de graad 1). ⊠

Voorbeeld (spoiler)
In Tabel 5.1 zijn de fouten gegeven voor verschillende waarden van de stapgrootte h. Op grond van de theorie verwachten we dat de fout bij de rechthoeksregel afneemt met een

Tabel 5.1 De fout voor verschillende waarden van h.

h	rechthoeksregel	Midpuntregel
0.8	– 0.055	– 0.0117
0.4	– 0.0336	– 0.0028
0.2	– 0.0182	– 0.00068
0.1	– 0.0094	– 0.00017
0.05	– 0.0048	– 0.000043

factor 2 en die bij de Midpuntregel met een factor 4 als h gehalveerd wordt. De resultaten zijn in overeenstemming met onze verwachtingen.

Ook bij numerieke integratie kunnen meet- en afrondfouten een belangrijke rol spelen. Neem aan dat de functiewaarden verstoord zijn met een fout ε:

$$\hat{f}(x) = f(x) + \varepsilon(x) \; .$$

Merk op dat

$$\left|\int_a^b \left(f(x) - \hat{f}(x)\right) dx\right| \leq \int_a^b |f(x) - \hat{f}(x)| dx \leq \varepsilon_{\max}(b-a).$$

Als we de integraal benaderen met de Rechthoekregel dan geldt:

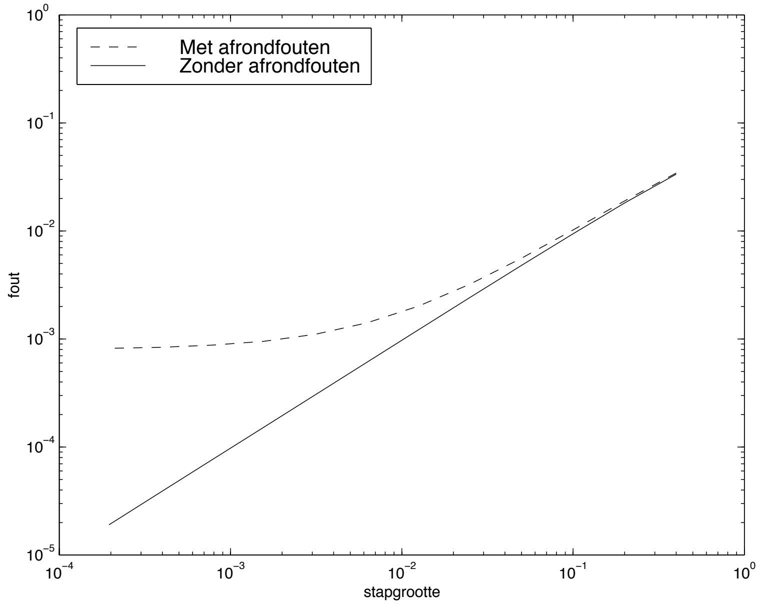
$$\left|\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=0}^{n-1} \hat{f}(x_i)\right| \leq \frac{1}{2}M_1(b-a)h + h\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon(x_k) \; .$$

Onder de aanname $|\varepsilon(x)| \leq \varepsilon_{\max}$ volgt:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \hat{I}_R\right| \leq \left(\frac{1}{2}M_1 h + \varepsilon_{\max}\right)(b-a) \; .$$

Merk op dat het geen zin heeft om h veel kleiner te kiezen dan $\frac{2\varepsilon_{\max}}{M_1}$.

Voorbeeld (spoiler)
We hebben de berekening van de lengte van de vlakke plaat opnieuw gedaan met de veronderstelling dat er een kleine fabricagefout opgetreden is. Als gevolg daarvan bevat de integrand een afrondfout $\varepsilon(x) = 10^{-3}$. In Figuur 5.2 zien we het effect van de



Figuur 5.2 De fout in de bepaling van de lengte van de vlakke plaat.

afrondfouten: de totale fout blijft groter dan 0.8×10^{-3}. Verder heeft het geen zin om de stapgrootte kleiner te kiezen dan $4\varepsilon_{\max} = 4 \cdot 10^{-3}$.

Als laatste kan voor de numerieke bepaling van een integraal I onderscheid gemaakt worden tussen een goed en een slecht gesteld probleem. Neem aan dat de fout begrensd wordt door de ongelijkheid

$$|f(x) - \hat{f}(x)| \le |f(x)|\varepsilon \, .$$

Een bovengrens voor de relatieve fout in het antwoord is nu

$$\frac{|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \hat{f}(x)dx|}{|\int_a^b f(x)dx|} \le \frac{\int_a^b |f(x)|dx}{|\int_a^b f(x)dx|} \cdot \varepsilon \, .$$

Definieer $K_I = \frac{\int_a^b |f(x)|dx}{|\int_a^b f(x)dx|}$ als het conditiegetal van de integraal I. Als $K_I \gg 1$ dan is het bepalen van I een slecht gesteld probleem.

<u>Voorbeeld (winst/verlies)</u>
De winst of het verlies per dag van een autofabrikant is afhankelijk van het seizoen. In de winter worden minder auto's verkocht dan in de zomer. In de winter zijn de kosten hoger dan de inkomsten en wordt er dus verlies geleden. We veronderstellen de volgende

winstformule (in miljard \$) in het eerste kwartaal:

$$w_{\text{lente}}(t) = 0.01 + \sin(\pi t - \frac{\pi}{2}) \ , \ t \in [0,1]$$

en in het derde kwartaal:

$$w_{\text{herfst}}(t) = 0.01 + \sin(\pi t + \frac{\pi}{2}) \ , \ t \in [0,1] \ .$$

De totale winst in het eerste kwartaal (W_{lente}) is gelijk aan:

$$W_{\text{lente}} = \int_0^1 w_{\text{lente}}(t)dt \ .$$

In beide kwartalen bedraagt de winst 0.01 (is 10 miljoen \$). Omdat

$$\int_0^1 |w_{\text{lente}}(t)|dt \simeq 0.63$$

is $K_I = 63$ en is het bepalen van de integraal een slecht gesteld probleem. Als we beide integralen bepalen met de Rechthoekregel krijgen we voor $n = 50$ de antwoorden:

$$\begin{aligned} W_{\text{lente}} &= -0.01 \ , \\ W_{\text{herfst}} &= 0.03 \ . \end{aligned}$$

De kleine stapgrootte $h = 0.02$ is niet voldoende klein om de winst correct te bepalen.

5.3 Newton Cotes formules

In deze paragraaf zullen we algemene integratieregels beschrijven. We beginnen met de Trapeziumregel en we geven het verband tussen numerieke integratie en interpolatie. Daarna behandelen we integratieregels die gebaseerd zijn op hogere orde interpolatie. Als een bijzonder geval daarvan beschouwen we de Newton Cotes formules.

De Trapeziumregel

Laat a en b twee punten in $\mathbb{R}$ zijn, $a < b$ en f een continue functie op $[a,b]$. Laat p het lineaire interpolatiepolynoom van f op a en b zijn (zie paragraaf 2.2):

$$p(x) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \ .$$

We nemen nu $\int_a^b p(x)dx$ als benadering voor $\int_a^b f(x)dx$:

$$\int_a^b p(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) \ . \tag{5.1}$$

Deze benadering heet de Trapeziumregel, omdat (5.1) gelijk is aan het oppervlak van het trapezium met hoekpunten $(a,0)$, $(b,0)$, $(b,f(b))$ en $(a,f(a))$.

De restterm

Bij lineaire interpolatie op a en b hebben we de volgende afbreekfout

$$f(x)-p(x)=\frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(\xi(x))\ , \tag{5.2}$$

waarbij we $\xi(x)$ schrijven in plaats van ξ om de afhankelijkheid van ξ ten aanzien van x te benadrukken. Als we de linker- en rechterterm van (5.2) integreren dan krijgen we:

$$\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{2}(f(b)+f(a))=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(\xi(x))dx\ . \tag{5.3}$$

Deze restterm kan men schatten met behulp van de volgende stelling:

Stelling 5.3.1 *Zij $f\in C^2[a,b]$. Dan is er een $\eta\in[a,b]$ zo dat*

$$\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))=\frac{-(b-a)^3}{12}f''(\eta)\ .$$

Bewijs:

Zij $m=\min_{x\in[a,b]}f''(x)$ en $M=\max_{x\in[a,b]}f''(x)$. Dan geldt, wegens $(x-a)(b-x)\geq 0$ op $[a,b]$:

$$\begin{aligned} m\int_a^b (x-a)(b-x)dx &\leq \int_a^b (x-a)(b-x)f''(\xi(x))dx \\ &\leq M\int_a^b (x-a)(b-x)dx\ , \end{aligned}$$

zodat er een $\mu\in(m,M)$ is waarvoor geldt

$$\int_a^b (x-a)(b-x)f''(\xi(x))dx=\mu\int_a^b (x-a)(b-x)dx=\frac{\mu(b-a)^3}{6}\ .$$

Omdat f'' continu is, is er een $\eta\in[a,b]$ zo dat $\mu=f''(\eta)$. Invullen in (5.3) voltooit het bewijs.

⊠

Als we de Trapeziumregel gebruiken om een integraal te benaderen dan is de fout meestal groter dan de gewenste nauwkeurigheid. Een nauwkeuriger antwoord kan verkregen worden met de gerepeteerde Trapeziumregel. In dit geval verdeelt men het interval in n delen ter grootte $h = \frac{b-a}{n}$. Op elk deelinterval $[x_{k-1}, x_k]$ met $x_k = a + kh$ wordt dan de Trapeziumregel toegepast:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k-1})] - \frac{h^3}{12} f''(\eta_k) ,$$

met $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$. Dus

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= h[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)] \\ &\quad -\frac{h^3}{12} \sum_{k=1}^{n} f''(\xi_k) . \end{aligned} \tag{5.4}$$

Omdat voor een continue functie f'' geldt:

$$\min_k f''(\xi_k) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f''(\xi_k) \leq \max_k f''(\xi_k)$$

bestaat er een $\xi \in [a, b]$ zo dat

$$\sum_{k=1}^{n} f''(\xi_k) = n f''(\xi) .$$

Dit invullen in (5.4) geeft

$$\int_a^b f(x)dx = I_T(h) - \frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi) ,$$

waarbij $I_T(h) = h[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \ldots + \frac{1}{2}f(x_n)]$.

Opmerkingen

1. De Restterm bij de gerepeteerde Trapeziumregel is $O(h^2)$, terwijl de Rechthoekregel een restterm $O(h)$ heeft. Bij beiden methoden wordt dezelfde hoeveelheid werk gebruikt. De Trapeziumregel heeft dus duidelijk de voorkeur.

2. De gerepeteerde Trapeziumregel kan ook als volgt geïnterpreteerd worden. Stel s is de lineaire spline benadering van f op $a = x_0, \ldots, x_n = b$. Dan geldt

$$I_T(h) = \int_a^b s(x)dx .$$

<u>Voorbeeld (winst/verlies)</u>

We hebben de winst uit het voorbeeld gegeven in paragraaf 5.2 ook benaderd met de Trapeziumregel. Voor $n = 50$ krijgen we de antwoorden:

$$W_{\text{lente}} = 0.01 \quad \text{en} \quad W_{\text{herfst}} = 0.01 .$$

Merk op dat de resultaten nu exact zijn. Als we echter een verstoring van de integrand hebben $\hat{w}_{\text{lente}} = w_{\text{lente}} + \varepsilon$, dan geldt $\frac{|\hat{W}_{\text{lente}}|}{|W_{\text{lente}}|} \leq 63\varepsilon$. Het probleem blijft dus slecht gesteld ten opzichte van verstoringen.

Algemene kwadratuurformules
We hebben gezien dat lineaire interpolatie aanleiding geeft tot de Trapeziumregel. Als we andere interpolatieformules gebruiken krijgen we verschillende integratieregels.

Laat $x_0, \ldots, x_m \in [a,b]$ gegeven zijn. Zij p het Lagrange interpolatiepolynoom van f op de punten $x_0, \ldots, x_m$. We nemen dan $\int_a^b p(x)dx$ als benadering voor $\int_a^b f(x)dx$. Omdat $p(x) = \sum_{k=0}^{m} f(x_k)L_{km}(x)$ geldt

$$\int_a^b p(x)dx = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k) ,$$

met als coëfficiënten

$$w_k = \int_a^b L_{km}(x)dx ,$$

die blijkbaar onafhankelijk van f zijn. We noemen $\sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k)$ de op interpolatie gebaseerde integratie formule voor $\int_a^b f(x)dx$. De x_k heten de steunpunten en w_k de gewichten van de kwadratuurformule. Newton-Cotes formules van hoge orde worden zelden gebruikt; er gaan negatieve gewichten optreden, wat minder gewenst is.

Stelling 5.3.2 *Als f een polynoom van hoogstens graad m is, dan is elke $m+1$-punts op interpolatie gebaseerde integratie formule exact:*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k) .$$

Bewijs:
Uit stelling 2.3.1 volgt dat f samenvalt met zijn Lagrange interpolatiepolynoom op $x_0, \ldots, x_m$ en dus geldt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p(x)dx .$$

⊠

Omgekeerd geldt:

Stelling 5.3.3 *Wanneer $x_0, .., x_m$ en $w_0, \ldots, w_m$ gegeven getallen zijn en er geldt*

$$\int_a^b p(x)dx = \sum_{k=0}^{m} w_k p(x_k) , \tag{5.5}$$

voor alle polynomen p van de graad $\leq m$, dan is $\sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k)$ de op interpolatie gebaseerde integratie formule voor $\int_a^b f(x)dx$.

Bewijs:
Zij p het interpolatiepolynoom op $x_0, \ldots, x_m$ van f. De vraag is dan of geldt

$$\int_a^b p(x)dx = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k)?$$

Dit is zo omdat

$$\int_a^b p(x)dx = \sum_{k=0}^{m} w_k p(x_k) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k) \; .$$

Verder kan er bewezen worden, dat de gewichten $w_0, \ldots, w_m$ uniek bepaald worden door (5.5). ⊠

We kunnen deze stelling ook gebruiken om de gewichten w_k uit te rekenen als de punten $x_0, \ldots, x_m$ gegeven zijn. Neem voor $p(x)$ achtereenvolgens $1, x, \ldots, x^m$. Dit levert een stelsel van $m+1$ vergelijkingen in de $m+1$ onbekenden w_k op. Men kan aantonen dat dit stelsel eenduidig oplosbaar is.

Midpuntregel
Als we de nulde orde interpolatie van f nemen in het punt $m = \frac{1}{2}(a+b)$ dan vinden we als kwadratuurformule voor $\int_a^b f(x)dx$:

$$(b-a)f(m) \; .$$

Dit noemen we de Midpuntregel. Deze regel is nauwkeuriger dan men op het eerste gezicht zou verwachten. Als $f \in C^2[a,b]$ dan geldt

$$f(x) = f(m) + (x-m)f^{'}(m) + \frac{1}{2}(x-m)^2 f^{''}(\xi(x))$$

en

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(m) + \frac{1}{2}\int_a^b (x-m)^2 f^{''}(\xi(x))dx \; .$$

Omdat $(x-m)^2 \geq 0$ is kunnen we afleiden

$$\int_a^b f(x)dx - (b-a)f(m) = \frac{(b-a)^3}{24} f^{''}(\eta) \; .$$

<u>Voorbeeld (winst/verlies)</u>
Als we de winst of het verlies uitrekenen met de gerepeteerde Midpuntregel

$$h[f(a+\frac{1}{2}h) + \ldots + f(b-\frac{1}{2}h)] \; ,$$

dan krijgen we voor $n = 50$

$$W_{\text{lente}} = 0.01 \quad \text{en} \quad W_{\text{herfst}} = 0.01 \,.$$

Newton-Cotes formules
Laat $x_0, \ldots, x_m$ equidistant in $[a,b]$ liggen met $x_0 = a$ en $x_m = b$. De kwadratuurformules, die ontstaan door integratie van het m-de orde interpolatiepolynoom p_m van f noemt men *Newton-Cotes* formules.

Voor de resttermen van deze formules geldt de volgende stelling:

Stelling 5.3.4 *Voor de restterm R_m van de Newton Cotes kwadratuurformules voor het benaderen van $\int_a^b f(x)dx$ geldt:*

als m even is en $f \in C^{m+2}[a,b]$ dan

$$\begin{aligned} R_m &= C_m \left(\frac{b-a}{m}\right)^{m+3} f^{(m+2)}(\xi) \quad \textit{met} \\ C_m &= \frac{1}{(m+2)!}\int_0^m t^2(t-1)\ldots(t-m)dt \,; \end{aligned}$$

als m oneven is en $f \in C^{m+1}[a,b]$ dan

$$\begin{aligned} R_m &= D_m \left(\frac{b-a}{m}\right)^{m+2} f^{(m+1)}(\xi) \quad \textit{met} \\ D_m &= \frac{1}{(m+1)!}\int_0^m t(t-1)\ldots(t-m)dt \,. \end{aligned}$$

Simpsonregel
We kiezen nu als steunpunten $x_0 = a$, $x_1 = \frac{1}{2}(a+b)$ en $x_2 = b$. De integratieregel is dan

$$\frac{b-a}{6}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \,.$$

Het is niet moeilijk om in te zien dat de Simpsonregel exact is voor de polynomen $f(x) = 1$, $f(x) = x - x_1$, $f(x) = (x-x_1)^2$ en $f(x) = (x-x_1)^3$.

5.4 Gauss formules*

De integratieregels $\sum\limits_{k=0}^{m} w_k f(x_k)$ hebben we afgeleid door de steunpunten x_k van te voren te kiezen en vervolgens de w_k te bepalen zodat de regel exact is voor polynomen van de graad $\leq m$. Men zou echter ook de vraag kunnen stellen bepaal alle w_k en x_k zo dat polynomen van een zo hoog mogelijke graad nog exact worden geïntegreerd, in de hoop dat dit ook voor willekeurige functies tot betere resultaten zal leiden. Door te eisen dat $1, x, \ldots, x^{2m+1}$ exact worden geïntegreerd ontstaat er een stelsel van $2m+2$ niet-lineaire vergelijkingen in de $2m+2$ onbekenden w_k en x_k. Men kan aantonen dat dit stelsel oplosbaar is. De resulterende kwadratuurformules heten *Gauss formules*. Voor de $m+1$ punts Gauss formule geldt de volgende restterm:

$$R = \frac{(b-a)^{2m+3}((m+1)!)^4}{(2m+3)((2m+2)!)^3} f^{(2m+2)}(\xi) \; .$$

Voorbeeld (2 punts Gauss formule)

Stel dat we c_0, c_1, x_0 en x_1 willen bepalen zo dat de integratieformule

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

het exacte resultaat geeft als f een polynoom is van de graad 3. We kiezen voor f de functies $1, x, x^2$ en x^3 zodat c_0, c_1, x_0 en x_1 moeten voldoen aan

$$\begin{aligned}
f(x) = 1 \Rightarrow \qquad & c_0 + c_1 &= \int_{-1}^{1} 1dx = 2 \; , \\
f(x) = x \Rightarrow \qquad & c_0 x_0 + c_1 x_1 &= \int_{-1}^{1} xdx = 0 \; , \\
f(x) = x^2 \Rightarrow \qquad & c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 &= \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \; , \\
f(x) = x^3 \Rightarrow \qquad & c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3 &= \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 \; .
\end{aligned}$$

Het is eenvoudig om in te zien dat de oplossing van dit stelsel gegeven wordt door

$$c_0 = 1 \; , \quad c_1 = 1 \; , \quad x_0 = \frac{-\sqrt{3}}{3} \text{ en } x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \; ,$$

zodat de integratieformule gegeven wordt door

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \; .$$

Voorbeeld (vergelijken methoden)

In Tabel 5.2 staan de resttermen als men ter berekening van $\int_0^{\pi} \sin x dx$ een zeker aantal punten investeert in Trapezium, Simpson en 5-punts Gauss. Opvallend is dat 5-punts Gauss enkelvoudig toegepast reeds zo'n goed resultaat geeft, alsmede dat halvering van het interval bij 5-punts Gauss de nauwkeurigheid zo snel doet toenemen.

Tabel 5.2 Vergelijking verschillende integratiemethoden.

methode	aantal malen gerepeteerd	aantal punten	fout
Trapezium	4	5	$1.04{\cdot}10^{-1}$
Simpson	2	5	$4.56{\cdot}10^{-3}$
5p. Gauss	1	5	$1.11{\cdot}10^{-7}$
Trapezium	8	9	$2.58{\cdot}10^{-2}$
Simpson	4	9	$2.69{\cdot}10^{-4}$
5 p. Gauss	2	10	$1.1{\cdot}10^{-10}$
Trapezium	16	17	$6.43{\cdot}10^{-3}$
Simpson	8	17	$1.66{\cdot}10^{-5}$
5 p. Gauss	4	20	$1.1{\cdot}10^{-13}$

5.5 Samenvatting

In dit hoofdstuk zijn de volgende begrippen behandeld:

- Numerieke integratie
- rechthoekregel
- midpuntregel
- gerepeteerde regels
- Newton Cotes formules
- Trapeziumregel
- Simpsonregel
- Gauss formules

5.6 Opgaven

1. We willen de volgende integraal bepalen:

$$\int_{-1}^{1} [(10x)^3 + 0.001]dx.$$

   (a) De relatieve afrondfout in de functiewaarden is kleinder dan ε. Bepaal de relatieve fout in de integraal ten gevolge van de afrondfouten.

   (b) We nemen de gerepeteerde midpuntregel als numerieke integratie methode en $\varepsilon = 4 * 10^{-8}$. Geef een redelijke waarde voor de stapgrootte h.

2. Bepaal $\int_{0.5}^{1} x^4 dx$ met de Trapeziumregel. Schat de fout en vergelijk deze schatting met de echte fout. Bereken de integraal ook met de gerepeteerde Trapeziumregel met $h = 0.25$. Schat de fout met Richardson' s foutschatting.