

Numerieke Methoden voor Differentiaalvergelijkingen

Numerieke Methoden voor Differentiaalvergelijkingen

C. Vuik P. van Beek F. Vermolen J. van Kan

© VSSD
Eerste druk 2006

Uitgegeven door:

VSSD

Leeghwaterstraat 42, 2628 CA Delft, The Netherlands

tel. +31 15 278 2124, telefax +31 15 278 7585, e-mail: hlf@vssd.nl

internet: <http://www.vssd.nl/hlf>

URL over dit boek: <http://www.vssd.nl/hlf/a018.htm>

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

Printed in the Netherlands

ISBN-10 90-71301-74-5

ISBN-13 9789071301742

NUR 919

Trefwoorden: numerieke wiskunde

Voorwoord

In dit boek worden numerieke methoden behandeld voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen. Aan de orde komen aspecten die in praktische problemen een grote rol spelen. We beperken ons in deze inleiding tot gewone differentiaalvergelijkingen, uitgezonderd het hoofdstuk over de warmtevergelijking waarin een partiële differentiaalvergelijking behandeld wordt. Een aantal technieken zoals interpolatie, numerieke integratie en het oplossen van niet-lineaire vergelijkingen, kunnen ook buiten de context van differentiaalvergelijkingen gebruikt worden.

Hoofdstukken, paragrafen en opgaven met een *, vallen buiten het Delft Instellings Pakket.

C. Vuik
Delft, juli 2006,

Inhoud

VOORWOORD	v	
1	INLEIDING	1
1.1	Enkele historische opmerkingen	1
1.2	Wat is numerieke wiskunde?	1
1.3	Waarom numerieke wiskunde?	.2
1.4	Afrondfouten	3
1.5	Het O-symbool van Landau	7
1.6	Herhaling begrippen uit de analyse	8
1.7	Samenvatting	10
1.8	Opgaven	10
2	INTERPOLATIE	11
2.1	Inleiding	11
2.2	Lineaire interpolatie	11
2.3	Lagrange interpolatie	14
2.4	Interpolatie met functiewaarden en afgeleiden *	16
2.4.1	Taylorpolynoom	16
2.4.2	Interpolatie in het algemeen	17
2.4.3	Hermite interpolatie	18
2.5	Interpolatie met splines	20
2.6	Samenvatting	23
2.7	Opgaven	23
3	NUMERIEK DIFFERENTIËREN	25
3.1	Inleiding	25
3.2	Eenvoudige differentieformules voor de eerste afgeleide	25
3.3	Algemene formules voor de eerste afgeleide	29

3.4	Relatie tussen differentieformules en interpolatie *	31
3.5	Differentieformules voor hogere afgeleiden	32
3.6	Richardson's extrapolatie	34
3.6.1	Inleiding	34
3.6.2	Schatting van de fout in de praktijk	35
3.6.3	Nauwkeuriger formules via Richardson's extrapolatie*	36
3.7	Samenvatting	37
3.8	Opgaven	37
4	NIET-LINEAIRE VERGELIJKINGEN	38
4.1	Inleiding	38
4.2	Een eenvoudige nulpuntsmethode	38
4.3	Vaste punt iteratie	40
4.4	De Newton-Raphson methode	42
4.5	Stelsels niet-lineaire vergelijkingen	46
4.6	Samenvatting	46
4.7	Opgaven	47
5	NUMERIEKE INTEGRATIE	48
5.1	Inleiding	48
5.2	Eenvoudige numerieke integratieformules	48
5.3	Newton-Cotes formules	53
5.4	Gauss formules*	59
5.5	Samenvatting	60
5.6	Opgaven	60
6	NUMERIEKE TIJDSINTEGRATIE VOOR BEGINWAARDEPROBLEMEN	62
6.1	Inleiding	62
6.2	Theorie van beginwaardeproblemen	62
6.3	Eenstapsmethoden	64
6.4	Testvergelijking en versterkingsfactor.	68
6.5	Stabiliteit	69
6.6	Lokale en globale afbreekfout, consistentie en convergentie	71
6.7	Globale afbreekfout en foutschattingen	78
6.8	Numerieke methoden voor stelsels differentiaalvergelijkingen	80
6.9	Stabiliteit van numerieke methoden voor teststelsels	84
6.10	Stijve differentiaalvergelijkingen	91
6.11	Meerstapsmethoden*	97
6.12	Samenvatting	100
6.13	Opgaven	100
7	DE EINDIGE DIFFERENTIEMETHODE VOOR RANDWAARDEPROBLEMEN	103
7.1	Inleiding	103

7.2	De eindige differentiemethode	104
7.3	Herhaling van enkele lineaire algebra begrippen	105
7.4	Consistentie, stabiliteit en convergentie.	106
7.5	De conditie van de discretisatiematrix	109
7.6	Neumann randvoorwaarde	110
7.7	Het algemene probleem*	111
7.8	De convectie-diffusie vergelijking	112
7.9	Niet-lineaire randwaardeproblemen	114
7.10	Samenvatting	115
7.11	Opgaven	116
8	DEINSTATIONAIRE WARMTEVERGELIJKING*	117
8.1	Inleiding	117
8.2	Afleiding van de instationaire warmtevergelijking	117
8.3	De gediscretiseerde vergelijking	118
8.4	Samenvatting	121
LITERATUUR		122
TREFWOORDEN		123