

AANVULLENDE WISKUNDE

28. De rij van Van der Laan; matenstelsels. Volgens Van der Laan vormen de elementen van een maatsysteem termen van een meetkundige rij:

$$\dots, p^{-4}, p^{-3}, p^{-2}, p^{-1}, p^0, p^1, p^2, p^3, p^4, \dots$$

met rede p groter dan nul en gelijk aan de plastische verhouding $p = p_1 \approx 4/3$. Voor de termen van deze rij geldt dat van de vier opvolgende termen de vierde term gelijk is aan de som van de eerste en tweede term:

$$p^{n+3} = p^{n+1} + p^n, \text{ dus ook } p^{n+1} - p^n = p^{n-4}$$

met $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

In zijn proefschrift presenteert Nicolai de Van der Laanrij [1]. We geven deze rij uitvoerig weer om redenen die helder zullen worden. We duiden de termen van deze rij aan met $L_{a,n}$. De rij is

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

$$L_{a,n} = 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7$$

$$n = 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$$

$$L_{a,n} = 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65$$

$$n = 17, 18, 19, 20, 21, 22,$$

$$L_{a,n} = 86, 114, 151, 200, 265, 351,$$

$$n = 23, 24, 25, 26, 27, \dots$$

$$L_{a,n} = 465, 616, 816, 1081, 1432, \dots$$

Er geldt (vergelijk de meetkundige rij):



$$L_{a\ n+3} = L_{a\ n+1} + L_{a\ n}$$

Het is te bewijzen (zie § 33) dat voor grote waarden van n de term $L_{a\ n}$ ongeveer rechtevenredig is met p_1^n :

$$L_{a\ n-4} \approx \frac{p_1^n}{3p_1^2 - 1} \quad (n \text{ groot})^*$$

met p_1 als de plastische verhouding: $p_1 = 1,3247 \dots$ (zie 33).

Vergelijken we nu de getallen van de matenstelsels van het Plastische getal volgens Van der Laan (zie hoofdstuk IV) met de getallen uit de rij van Van der Laan, dan zien we dat Van der Laan de getallen van de Van der Laanrij deelt door 2 om de matenstelsels te verkrijgen [2]. Dus $L_{a\ 6}/2$ tot en met $L_{a\ 27}/2$:

III	2,	2,5,	3,5,	4,5,	6,	8,	10,5,	14
II	14,	18,5,	24,5,	32,5,	43,	57,	75,5,	100
I	100,	132,5,	175,5,	232,5,	308,	408,	540,5,	716

Dat betekent dat de verhoudingen tussen twee opvolgende grote maten nauwkeuriger zijn dan de verhoudingen tussen twee opvolgende kleine maten, daar de verhouding $L_{a\ n+1}/L_{a\ n}$ steeds meer nadert tot de plastische verhouding $p_1 = 1,3247\dots$ naarmate n groter is.

Noten:

1. Nicolai, J., "De visuele invloed van woonplaatsen op open ruimten", proefschrift Technische Hogeschool Delft (1971).
2. Pouderoyen, D., "Deling van de Van der Laangetallen door 2", persoonlijke mededeling.

29. Het Plastische getal aan de tekentafel; in vieren delen. De irrationele (niet-meetbare) gulden snedeverhouding is meetkundig te construeren, dit in tegenstelling tot de irrationele plastische verhouding.

* Dus ook iets grover $L_{a\ n} \approx p_1^{n-1}$.

Beide, de rationele (meetbare) benadering van de gulden snede-verhouding en die van de plastische verhouding zijn meetkundig te construeren.

De rationaal benaderde waarden van de getallen (verhoudingen) van het Plastische getal zijn:

$$1, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{7}{3}, 3, 4, \frac{21}{4}, 7.$$

Verdelen we nu met behulp van de constructie zoals weergegeven in figuur a van Hoofdstuk II een willekeurig lijnstuk in 84 gelijke stukken dan geven de lengten

$$12, 16, 21, 28, 36, 48, 63, 84$$

de getallen (verhoudingen) van het Plastische getal weer.

In het geval van het Gulden snedegetal zijn de rationaal benaderde waarden van de getallen (verhoudingen)

$$1, \frac{8}{5}, \frac{13}{5}, \frac{21}{5}$$

of

$$1, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{13}{3}.$$

Verdelen we nu een willekeurig lijnstuk in 21 gelijke stukken, dan geven de lengten

$$5, 8, 13, 21$$

de getallen (verhoudingen) van het gulden snedegetal weer.

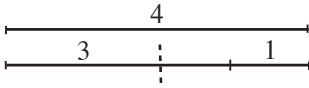
Evenzo, bij de verdeling van een lijnstuk in 13 gelijke stukken geven de lengten

$$3, 5, 8, 13$$

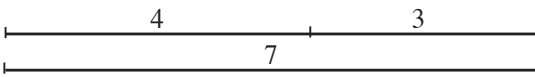
de getallen (verhoudingen) van het gulden snedegetal weer.

Een bijzondere benadering van het Plastische getal kan als volgt worden verkregen. Deze benadering berust op het in twee gelijke

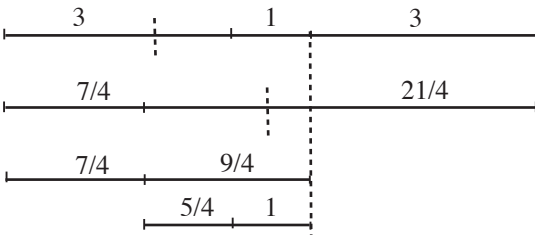
stukken verdelen van een lijnstuk dat met een passer kan worden uitgevoerd, doch ook op het oog kan worden gedaan [1]. We verdelen een lijnstuk '4' in tweeën en de verkregen lijnstukken wederom in tweeën.



Er ontstaan dan de lijnstukken '1' en '3'. Verlenging van '4' met '3' geeft lijnstuk '7'



Herhaalde in tweeën deling van '7' geeft de lijnstukken '21/4' en '7/4' en vervolgens de lijnstukken '9/4' en '5/4'.



De benaderde waarden van de getallen van het Plastische getal worden dan:

$$1, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}, 3, 4, \frac{21}{4}, 7.$$

Deze waarden verschillen niet of nauwelijks van de oorspronkelijke waarden. Het voordeel van de benadering door in vieren deling is dat deze op het oog of met een passer kan worden uitgevoerd. Passen we deze methode toe op het gulden snedegetal, dan krijgen we de verhoudingen

$$1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 4.$$

Deze benadering is wat grover, doch voor een eerste schatting zeer goed bruikbaar.

Noten:

1. Kruijtzter, G. “Het ontstaan van het plastische getal”, ter gelegenheid van de viering van de 100-ste geboortedag van Dom Hans van der Laan, mei 2005.

30. Het vermoeden. In Hoofdstuk II spraken we het volgende vermoeden uit:

“Van een meetkundige rij

$$\dots, p^{-2}, p^{-1}, p^0, p^1, p^2, \dots \quad (p > 1)$$

is slechts in de gevallen waarin p de gulden snede-verhouding is of p is de plastische verhouding is, zowel de som van twee opvolgende termen als het verschil tussen twee opvolgende termen van de rij, een term van de rij.

In het geval van de gulden snede-verhouding

$$p + 1 = p^2$$

$$p - 1 = p^{-1}$$

In het geval van de plastische verhouding

$$p + 1 = p^3$$

$$p - 1 = p^{-4}$$

Het bovenstaande vermoeden is bewezen door J.M. Aarts, R. Fokkink en G. Kruijtzter [1].

We merken hierbij op dat een ‘morphic number’ als volgt wordt gedefinieerd:

Een reëel getal $p > 1$ wordt een morphic number genoemd indien er natuurlijke getallen k en l bestaan zodanig dat

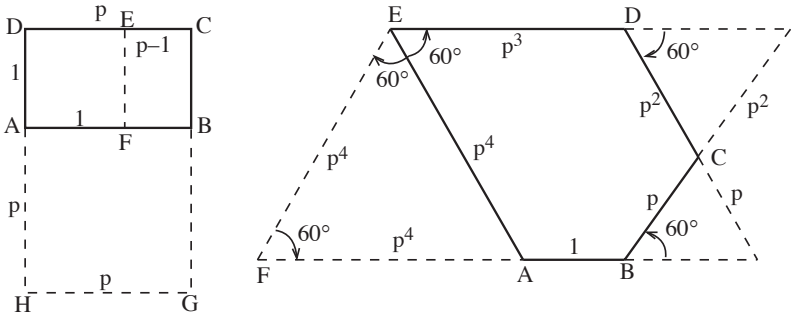
$$p + 1 = p^k \quad \text{en} \quad p - 1 = p^{-l}$$

(zie ook Wiskunde 20). Voor $k = 3$ en $l = 4$ is p de plastische verhouding en voor $k = 2$ en $l = 1$ is p de gulden snede-verhouding.

Noot:

1. Aarts, J.M., R. Fokkink en G. Kruijtzter, "Morphic numbers", Nederlands Archief voor Wiskunde (NAW) vijfde serie, deel 2, nummer 1, maart (2001).

31 Gnomons. We beschouwen de onderstaande figuren.



In de linker figuur heeft p de waarde van de gulden snede-verhouding. Haalt men van de rechthoek $ABCD$ met breedte p en hoogte 1 het vierkant $DEFA$ met breedte 1 en hoogte 1 af, dan rest de rechthoek $ECBF$ met breedte p^{-1} en hoogte 1 . Voegt men aan de rechthoek $ABCD$ met breedte p en hoogte 1 , het vierkant met $ABGH$ met hoogte p en breedte p toe dan ontstaat de rechthoek $DCGH$ met hoogte p^2 en breedte p . Bij toevoeging of wegneming van een vierkant bij de oorspronkelijke rechthoek van $p \times 1$ levert dus een rechthoek met dezelfde breedte-hoogte verhouding. Anders gezegd: de vereniging van een rechthoek met hoogte-breedte verhouding gelijk aan de gulden snede-verhouding en een vierkant levert een rechthoek die gelijkvormig is met de oorspronkelijke rechthoek.

De rechterfiguur is bedacht door Gazalé [1].

De vijfhoek $ABCDE$, met opeenvolgende zijdenlengten 1 , p , p^2 , p^3 en p^4 en met p de plastische verhouding, wordt uitgebreid met de driehoek FAE . Er ontstaat dan de vijfhoek $BCDEF$ met de opvolgende lengten van de zijden p , p^2 , p^3 , p^4 en p^5 . De twee vijfhoeken $ABCDE$ en $BCDEF$ zijn gelijkvormig.

Een gnomon is een figuur die, als toegevoegd aan een originele figuur, een nieuwe figuur oplevert die gelijkvormig is met de originele figuur.

Gazalé vermoedde dat indien de gnomon een reguliere polygoon (veelhoek)* is en de figuur waaraan de gnomon is toegevoegd een eindige veelhoek is, dat dan de gnomon een vierkant of een gelijkzijdige driehoek is.

In het geval van de ‘gulden rechthoek’ is de gnomon een vierkant en in het geval van de ‘plastische vijfhoek’ is de gnomon een gelijkzijdige driehoek.

Het vermoeden van Gazalé is bewezen door Aarts en Fokkink [2].

Gazalé noemt de rechthoek met hoogte-breedte verhouding gelijk aan de gulden snedeverhouding ‘the golden rectangle’. Hij noemt de vijfhoek met lengten van de zijden $1, p, p^2, p^3$ en p^4 ‘the silver pentagon’.

Wat nu kan opvallen is dat aan de eis dat zowel de som als het verschil van twee opeenvolgende termen van een meetkundige rij termen van de meetkundige rij zijn, alleen wordt voldaan indien de rede van de rij gelijk is aan de gulden snedeverhouding of plastische verhouding samenvalt met de uitspraak “de reguliere gnomon is een vierkant of een gelijkzijdige driehoek”.

Naar de ‘silver pentagon’ is lang gezocht. De constructie van de twee gnomons is min of meer aangegeven door Padovan [3] en Van der Blij [4]. Gaat men uit van een vierkant en voegt men daaraan herhaald (grotere) vierkanten toe, dan ontstaat op den duur een rechthoek met de gulden snedeverhouding. Doet men hetzelfde met gelijkzijdige driehoeken dan ontstaat een vijfhoek met zijdenlengten in de plastische verhouding [5].

Noten

1. Gazalé, M.J., “Gnomons from Pharaohs to fractals”, Princeton University Press (1999).
2. Aarts, J.M., en R.J. Fokkink, “On gnomons”, *Mathematische Techniek* 5 (2003), 59-65).
3. Padovan, zie Stewart.
4. Blij, F. v.d., persoonlijke mededeling oktober (2000).
5. Stewart, I., ‘Tales of a neglected number’, *Scientific American*, June (1996) and November (1996).

* Een reguliere veelhoek is een veelhoek met gelijke zijden en gelijke hoeken.

32. Angelsaksische literatuur. In de Angelsaksische literatuur noemt men de gulden snede-verhouding ‘the golden number’ en de plastische verhouding ‘the silver number’ (Gazalé [1]).

De gulden snede-verhouding is verbonden met de rij van Fibonacci. Volgens Gazalé is het plastische getal verbonden met de rij van Padovan. Welnu, dit laatste moet zijn: de rij van Van der Laan.

Gazalé ontleent de foute benaming aan een artikel van Stewart [2]. Deze noemt de aan hem door Padovan toegezonden rij “in honor of Richard Padovan” de *Padovan sequence*. Stewart schrijft hierbij: “It is curious that Padova is the Italian form of Padua, and Fibonacci was from Pisa - roughly 100 miles from Padua.” Een sprookje dus. In dit boek hebben ook wij de Van der Laanrij de Padovanrij genoemd daar ons het proefschrift van Nicolai [3] niet bekend was en Stewart sprak van Padovanrij.

Noten

1. Gazalé, M.J., “Gnomons from Pharaohs to fractals”, Princeton University Press (1999).
2. Stewart, I. ‘Tales of a neglected number’, Scientific American, June (1996).
3. Nicolai, J., “De visuele invloed van woonplaatsen op open ruimten”, proefschrift Technische Hogeschool Delft (1971).

33. Overzicht van enige rijen. In dit boekje behandelen we de gulden snede-verhouding met de hieraan gekoppelde rij van Fibonacci, alsmede de plastische verhouding en de hieraan gekoppelde rij van Padovan (Van der Laan). Het lijkt ons nuttig enige resultaten van deze verhoudingen en rijen samen te vatten en hierbij ook aandacht te geven aan de rij van Lucas en de rij van Perrin.

Gulden snede-verhouding, rij van Fibonacci en rij van Lucas

De gulden snede-verhouding is gelijk aan de positieve wortel van de tweede graadsvergelijking

$$p^2 - p - 1 = 0$$

De wortels p_1 en p van deze vergelijking zijn

$$p_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ en } p_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

We beschouwen nu de meetkundige rij met rede $p > 0$:

$$\dots p^{-4}, p^{-3}, p^{-2}, p^{-1}, p^0, p^1, p^2, p^3, p^4, \dots$$

Met $p = p_1$ geldt:

$$p_1^2 = p_1 + 1 \text{ dus } p_1 - 1 = p_1^{-4}$$

$$p^{n+2} = p^{n+1} + p^n \text{ dus } p^{n+1} - p^n = p^{n-4}$$

We beschouwen nu de rij van Fibonacci. We noemen de termen van de rij F_n met $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Met de begintermen $F_0 = 0$ en $F_1 = 1$ wordt de rij:

$$\begin{array}{cccccccccc} n = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9 \\ F_n = & 0, & 1, & 1, & 2, & 3, & 5, & 8, & 13, & 21, & 34 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} n = & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & \dots \\ F_n = & 55, & 89, & 144, & 233, & 377, & 610, & \dots \end{array}$$

Er geldt: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

We kunnen de termen ook genereren uit de eerste twee termen volgens:

$$\begin{bmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} + F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$$

Uitgaande van F_0 en F_1 moeten voor de bepaling van F_{n+2} en F_{n+1} de matrix herhaald tot macht verheven worden. Omdat dit vrij lastig is, is er een elegantere methode om de termen F_n te bepalen. De eigenwaarden van de matrix zijn de wortels van de vergelijking

$$p^2 - p - 1 = 0$$

zodat de eigenwaarden zijn

$$p_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ en } p_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Er geldt nu:

$$F_n = Ap_1^n + Bp_2^n$$

waarin A en B moeten worden bepaald uit de startwaarden.

Er volgt

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \{p_1^n - p_2^n\} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

zodat inderdaad $F_0 = 0$ en $F_1 = 1$.

Met $p = p_1$ in de meetkundige rij kunnen we schrijven

$$p_1^2 = p_1 + 1$$

$$p_1^3 = p_1^2 + p_1 = 2p_1 + 1$$

$$p_1^4 = p_1^3 + p_1^2 = 2p_1 + 1 + p_1 + 1 = 3p_1 + 2$$

Er blijkt te gelden dat

$$p_1^n = F_n \cdot p_1 + F_{n-1}$$

De rij van Lucas is een variant op de rij van Fibonacci. We duiden de termen van de rij van Lucas aan met L_n . De begintermen zijn $L_0 = 2$ en $L_1 = 1$. De rij is:

$$\begin{array}{cccccccccccc} n = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, \dots \\ L_n = & 2, & 1, & 3, & 4, & 7, & 11, & 18, & 29, & 47, & 76, & 123, \dots \end{array}$$

Er geldt:

$$L_n = p_1^n + p_2^n = \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}; \quad L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n$$

met $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$.

Het verband tussen F_n en L_n is

$$2F_{m+n} = F_m L_n + F_n L_m$$

$$2L_{m+n} = 5F_m F_n + L_m L_n$$

De rij van Fibonacci bevat slechts één kwadraat, nl. 144, en één derde macht, nl. 8, en geen andere machten behoudens 1. Volgens Hofstadter [1] is de reden hiertoe verklaard door een trio van wiskundigen die wiskunde gebruikten die Andrew Wiles gebruikte in het bewijs van de laatste stelling van Fermat ($a^n + b^n = c^n$ met n niet groter dan 2 ($n = 1, 2$)).

De wiskundige Cohn [2] bewees evenwel op een simpele wijze en wel met gebruik van de rij van Lucas dat de rij van Fibonacci slechts de twee kwadraten 1 en 144 bevat.

Noten:

1. Hofstadter, D., "I am a strange loop", Basic Books, New York (2007), p. 127.
2. Cohn, J.H.E., "Square Fibonacci members, Etc.", Fibonacci Quarterly 2 (1964), pp. 109-113.

Plastische verhouding, rij van Van der Laan en rij van Perrin

De plastische verhouding is gelijk aan de enige reële wortel van de derdegraadsvergelijking

$$p^3 - p - 1 = 0$$

De drie wortels van de vergelijking zijn p_1 (de plastische verhouding) en p_2 en p_3 , welke wortels complex aan elkaar zijn toegevoegd:

$$p_1 = 1,3247\dots \quad p_2 = \frac{-p_1}{2} + iq, \quad p_3 = \frac{-p_1}{2} - iq$$

waarbij $i = \sqrt{-1}$ en $q = 0,5623\dots$

We beschouwen nu weer de meetkundige rij met rede $p > 0$:

$$\dots p^{-4}, p^{-3}, p^{-2}, p^{-1}, p^0, p^1, p^2, p^3, p^4, \dots$$

Met $p = p_1$ (de plastische verhouding) geldt:

$$p_1^3 = p_1 + 1 \quad \text{en} \quad p_1 - 1 = p_1^{-4} \quad \text{en} \quad p_1^{n+3} = p_1^{n+1} + p_1^n$$

We beschouwen nu de rij van Padovan (Van der Laan). We duiden de termen van de rij aan met P_n . De beginwaarden zijn $P_0 = P_1 = P_2 = 1$. De rij is

$$\begin{array}{cccccccccc} n = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9 \\ P_n = & 1, & 1, & 1, & 2, & 2, & 3, & 4, & 5, & 7, & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} n = & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, & 17, & 18 \\ P_n = & 12, & 16, & 21, & 28, & 37, & 49, & 65, & 86, & 114 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} n = & 19, & 20, & \dots \\ P_n = & 151, & 200, & \dots \end{array}$$

Er geldt: $P_{n+3} = P_{n+1} + P_n$.

We kunnen de termen ook genereren uit de eerste twee termen volgens

$$\begin{bmatrix} P_{n+3} \\ P_{n+2} \\ P_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n+2} \\ P_{n+1} \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{n+1} + P_n \\ P_{n+2} \\ P_{n+1} \end{bmatrix}$$

Uitgaande van P_0 , P_1 en P_2 moeten we voor P_{n+3} , P_{n+2} en P_{n+1} de matrix tot de macht verheffen. We kunnen de termen P_n ook bepalen via de eigenwaarden van de matrix. De eigenwaarden van de matrix zijn de wortels van de derdegraadsvergelijking $p^3 - p - 1 = 0$, zodat de eigenwaarden zijn

$$p_1 = 1,3247, \quad p_2 = \frac{-p_1}{2} + iq, \quad p_3 = \frac{-p_1}{2} - iq$$

met $i\sqrt{-1}$ en $q = 0,5623\dots$ of

$$p_1 = 1,3247\dots, \quad p_2 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad p_3 = r_3(\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

met $r = 0,8688$ en $\varphi \approx 146^\circ 30'$.

Er geldt dan:

$$P_n = Ap_1^n + Bp_2^n + Cp_3^n$$

waarin A, B en C te bepalen zijn met de startwaarden. Men kan ook schrijven

$$P_n = Ap_1^n + r^n \{B(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) + C\{\cos n\varphi - i \sin n\varphi\}\}$$

met $r = 0,8688$ en $\varphi \approx 146^\circ 30'$.

Er geldt nu:

$$P_{n-4} = \frac{P_1^n}{3p_1^2 - 1} + \frac{P_2^n}{3p_2^2 - 1} + \frac{P_3^n}{3p_3^2 - 1}, P_{-4} = P_{-3} = 0, P_{-2} = 1 \text{ en } P_{-1} = 0.$$

Ook deze formule geeft een fikse rekenpartij. Wat we wel direct kunnen zien is dat voor n zeer groot

$$P_{n-4} \approx \frac{P_1^n}{3p_1^2 - 1}, \quad n \text{ groot}$$

daar p_2^n en p_3^n naderen tot nul voor n groot omdat $r < 1$.

Het vermoeden is dat de Padovanrij slechts de kwadraten 1, 4, 9, 16 en 49 bevat.

Tenslotte merken we op dat geldt:

$$p_1^n = P_{n-4}p^2 + P_{n-3}p + P_{n-5}, \quad n \geq 5$$

daar

$$p_1^3 = p_1 + 1$$

$$p_1^4 = p_1^2 + p_1$$

$$p_1^5 = p_1^2 + p_1 + 1$$

$$p_1^6 = p_1^2 + 2p_1 + 1$$

$$p_1^7 = 2p_1^2 + 2p_1 + 1, \text{ enz.}$$

De rij van Perrin is een variant op de rij van Padovan. We duiden de termen van de rij aan met P_n^* . De startwaarden van Perrinrij zijn $P_0^* = 3, P_1^* = 0$ en $P_2^* = 2$. We krijgen dan de rij

$n =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,
$P_n^* =$	3,	0,	2,	3,	2,	5,	5,	7,

n =	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17, ...
P_n^* =	10,	12,	17,	22,	29,	39,	51	68,	90,	119 ...

met $P_{n+3}^* = P_{n+1}^* + P_n^*$.

Het blijkt dat

$$P_n^* = p_1^n + p_2^n + p_3^n$$

met wederom

$$p_1 = 1,3247, \quad p_2 = \frac{-p_1}{2} + iq, \quad p_3 = \frac{-p_1}{2} - iq$$

met $i\sqrt{-1}$ en $q = 0,5623\dots$

De formule voor P_n^* is sympathieker dan die voor P_n .

Voor $n = 0$: $P_0^* = 3$, voor $n = 1$: $P_1^* = 0$ en voor $n = 2$: $P_2 = 2$.
Voor grotere waarden van n is de formule voor P_n^* te verifiëren door te kijken naar hoe een derdegraadsvergelijking wordt opgelost.

Voor n groot geldt $P_n^* \approx p_1^n$.

Tenslotte merken we op dat indien n een priemgetal is, dat dan n deelbaar is op P_n^* . Het omgekeerde is echter niet waar: er zijn ook niet-priemgetallen n die deelbaar zijn op P_n^* . (Een niet-priemgetal is een deelbaar getal. Priemgetallen zijn ondeelbare getallen, behoudens hun deelbaarheid door 1 en door zichzelf, bijvoorbeeld: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, enz. Het getal 1 wordt niet gerekend tot de priemgetallen).