2 *Kaartprojecties*

Samenvatting. *Wanneer grote stukken van het aardoppervlak moeten worden opgemeten en samenhangend afgebeeld, kan men de 'bolvorm' niet verwaarlozen. De afbeelding op een plat vlak kan niet zonder vervorming plaatsvinden, maar men kan de afbeeldingsmethode zó kiezen dat zij zo goed mogelijk aan bepaalde doelstellingen beantwoordt. Ingevoerd worden de begrippen vergroting, conformiteit (hoekgetrouwheid) en equivalentie (oppervlaktegetrouwheid). Enkele voorbeelden van kaartprojecties worden gegeven. Speciaal wordt ingegaan op de in Nederland gebruikte stereografische projectie, onder afleiding van enkele eigenschappen en van de correcties die aan meetuitkomsten moeten worden aangebracht bij het werken in het coördinatenstelsel van de Rijksdriehoeksmeting.*

2.1. Algemene aspecten

Een gebied dat groter is dan ca. 50×50 km^2 kan niet zonder merkbare vervormingen in een plat vlak afgebeeld worden. Als men een dergelijk groot gebied in kleinere stukken verdeelt die elk voor zich wel als vlak mogen worden beschouwd, kan men natuurlijk van elk stuk een kaart maken die praktisch geen vervormingen vertoont, maar de deelkaarten zullen niet tot een geheel aaneengesloten kunnen worden. In de leer der *kaartprojecties* bestudeert men hoe het aardoppervlak op een plat vlak kan worden afgebeeld, uiteraard met bijzondere belangstelling voor de daarbij optredende vervormingen.
Afbeelden wil hier zeggen: aan elk punt van het aardoppervlak een punt in het platte vlak toevoegen. Dit kan op allerlei manieren geschieden; elke methode geeft vervormingen van een eigen type die de afbeelding voor bepaalde doeleinden geschikt en voor andere doeleinden ongeschikt maken.
Wij zullen slechts enkele voorbeelden geven, voornamelijk van kaartprojecties die gemakkelijk meetkundig te interpreteren zijn. Dit is echter bij lang niet alle projecties het geval.
De plaats van een punt op aarde wordt vastgelegd door zijn geografische breedte φ en zijn geografische lengte λ; de plaats van een punt in een plat vlak door bijvoorbeeld rechthoekige coördinaten x en y in een of ander stelsel. Een kaartprojectie is nu een stel formules dat aan het getallenpaar (φ,λ) éénduidig een getallenpaar (x,y) toevoegt, bijvoorbeeld:

$$x = \mathrm{f}(\varphi,\lambda)$$

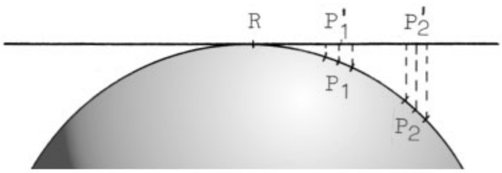
$$y = \mathrm{g}(\varphi,\lambda)$$

Men moet zich hierbij voorstellen dat de afbeelding geschiedt met de aarde op ware grootte. Voor het maken van een kaart kan de vlakke afbeelding op zekere schaal, bijv. 1:100.000, verkleind worden. Door de vervormingen kan de schaal echter niet over de hele kaart constant zijn. In verband met de vervormingen voert men in het begrip *vergroting* van een kaartprojectie:

$$\text{vergroting} = \frac{\text{lengte van de afbeelding van een lijnstuk}}{\text{lengte van het afgebeelde lijnstuk}}$$

Het zal duidelijk zijn dat het hier om 'differentiële lijnstukjes' gaat; in het algemeen is de vergroting van punt tot punt verschillend en zal in een bepaald punt de vergroting in verschillende richtingen verschillende waarden hebben. Bij de hierna volgende voorbeelden wordt de aarde als een bol beschouwd. Voor geografische kaarten op zeer kleine schaal is dit wel toelaatbaar; in het algemeen moet voor topografische kaarten en voor geodetische doeleinden rekening worden gehouden met de ellipsoïdische vorm. Men kan de ellipsoïde rechtstreeks in een plat vlak afbeelden, of ook eerst de ellipsoïde op een bol afbeelden, en daarna de bol in een plat vlak.

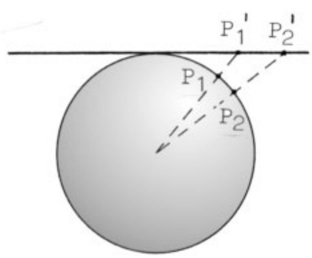
a. De orthografische projectie



Figuur 2.1.

Het af te beelden gebied wordt loodrecht geprojecteerd op een aan de aardbol rakend plat vlak (evenwijdige verplaatsing maakt uiteraard geen verschil). De cirkels op de bol waarvan het vlak evenwijdig is aan het raakvlak, worden op ware grootte afgebeeld. Grote cirkels door R worden als rechte lijnen afgebeeld, een stukje van zo'n cirkel wordt echter des te sterker verkleind naarmate het verder van R verwijderd is (vgl. P_1 en P_2). In het raakpunt is de vergroting in alle richtingen 1. Een cirkeltje om P_1 wordt afgebeeld als een ellips om P'_1: daar is de vergroting dus niet in alle richtingen gelijk. De projectie is slechts goed bruikbaar voor een klein gebied om R (vgl. paragraaf 1.3). Slechts de halve bol kan één-éénduidig worden afgebeeld.

b. De gnomonische projectie

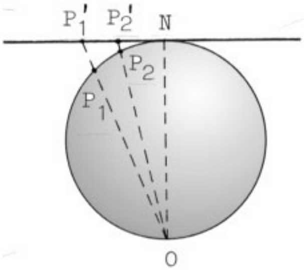


Figuur 2.2.

De afbeelding geschiedt door centrale projectie vanuit het middelpunt van de aardbol op een raakvlak. Er treden enorme vervormingen op, en slechts de halve bol kan afgebeeld worden. Maar de projectie heeft de prettige eigenschap dat grote cirkels als rechte lijnen worden afgebeeld, m.a.w. de kortste verbinding op aarde wordt als kortste verbinding in

het kaartvlak afgebeeld. Daarom zijn kaarten in gnomonische projectie o.a. van belang bij het maken van plannen voor scheep- en luchtvaartroutes.
Andere projecties kunnen in dit opzicht zeer misleidend zijn.

c. De stereografische projectie

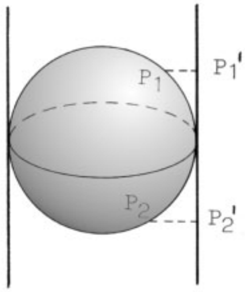


Figuur 2.3.

Projectie geschiedt op een raakvlak, het centrum is het punt O, diametraal tegenover het raakpunt N. Op grote afstand van het raakpunt nemen de vervormingen snel toe, maar voor niet al te grote gebieden is dit een zeer geschikte projectie. Een zeer belangrijke eigenschap is dat deze projectie *conform* of hoekgetrouw is. Dit houdt in dat de hoek tussen twee lijnen op het aardoppervlak gelijk is aan de hoek tussen hun afbeeldingen. Stel dat twee grote cirkels elkaar onder een hoek α snijden, d.w.z. de hoek tussen hun raaklijnen in het snijpunt is α. De twee cirkels zullen als kromme lijnen afgebeeld worden die elkaar tevens onder α snijden. Een kleine driehoek op aarde zal dus als een daarmee gelijkvormige driehoek worden afgebeeld (de driehoek moet zo klein zijn dat de zijden als rechte lijnstukjes kunnen worden beschouwd). Daarmee zal elk stukje van de kaart een vrijwel gelijkvormige afbeelding van het corresponderende stukje terrein vormen, hoewel de schaal over de gehele kaart varieert. De eigenschap van conformiteit houdt in dat in elk punt de vergroting in alle richtingen gelijk is; een cirkeltje wordt als cirkeltje afgebeeld. Men kan aantonen dat bij de stereografische projectie in alle punten die op dezelfde cirkel om N gelegen zijn de vergroting dezelfde waarde heeft. P_1' zal echter een sterkere vergroting hebben dan P_2'. Verschillende andere projecties zijn eveneens conform. Voor geodetische doeleinden worden vrijwel uitsluitend conforme projecties gebruikt.
De stereografische projectie is voor ons van bijzonder belang omdat deze afbeelding ten grondslag ligt aan het vlakke coördinatenstelsel dat in Nederland voor vrijwel alle geodetische en kartografische doeleinden gebruikt wordt, het stelsel van de Rijksdriehoekmeting. Daarom wordt deze projectie in par. 2.2 uitvoeriger behandeld.

d. De cilinderprojectie van Lambert

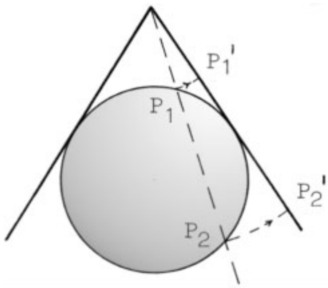
Deze wordt gegeven als voorbeeld van een projectie die tot stand komt door eerst de aarde op een omhullende cilinder af te beelden en dan de cilinder a.h.w. open te knippen en af te wikkelen. Deze projectie heeft als bijzonderheid dat zij *oppervlaktegetrouw* of *equivalent* is. Men kan gemakkelijk nagaan dat een smalle ring tussen twee parallelcirkels als een ring op de cilinder wordt afgebeeld die dezelfde oppervlakte heeft; hetzelfde geldt voor eindige stukken. Kaarten in een equivalente projectie geven dus oppervlakten in hun juiste verhouding weer, hetgeen bijvoorbeeld voor statistische doeleinden van belang kan zijn. Er treden echter sterke vormveranderingen op.



Figuur 2.4.

e. De equivalente kegelprojectie

Dit is een voorbeeld van een zgn. kegelprojectie. De meridianen worden afgebeeld als beschrijvende lijnen van de kegel, afgebeeld punt en beeldpunt hebben dezelfde afstand tot de top van de kegel. Een parallelcirkel wordt op ware lengte afgebeeld.



Figuur 2.5.

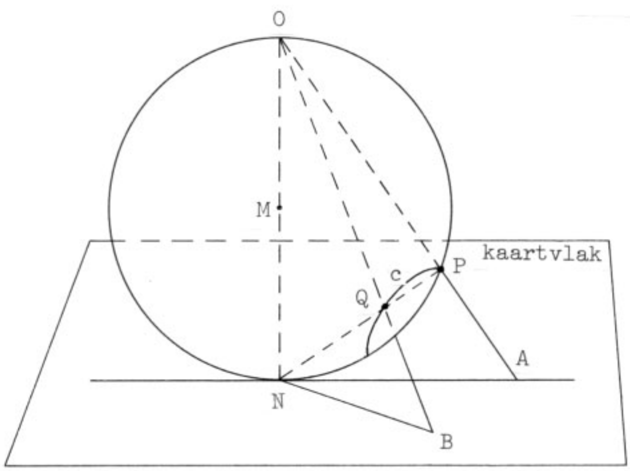
f. De Mercatorprojectie

Deze afbeelding kan niet als een simpele meetkundige projectie worden opgevat. De equator wordt lengtegetrouw als rechte lijn afgebeeld, de meridianen als rechte lijnen loodrecht daarop. De parallelcirkels worden eveneens als rechte lijnen afgebeeld; de afbeelding van elke parallelcirkel is even lang als die van de equator. Hoe verder een parallelcirkel van de equator is verwijderd, des te sterker wordt hij vergroot. Maar de afstand tussen de afbeeldingen van parallelcirkels wordt daarmee evenredig vergroot; hierdoor wordt bereikt dat de projectie conform is. De vergroting neemt sterk toe naarmate men verder van de equator afkomt. Voor topografische kaarten enz., is de projectie slechts bruikbaar in gebieden rond de equator, maar zij heeft een bijzondere eigenschap die haar zeer geschikt maakt voor navigatie: een rechte lijn op de kaart stelt namelijk een lijn met vaste kompasrichting voor. Zulk een lijn, een zgn. *loxodroom*, snijdt alle meridianen onder dezelfde hoek (maar is in het algemeen geen kortste verbindingslijn).

Omdat de equator lengtegetrouw en de meridianen als evenwijdige rechte lijnen worden afgebeeld, rekent men deze projectie ook onder de cilinderprojecties. Hetzelfde type afbeelding kan men zich denken, maar dan op een cilinder waarvan de as in het equatorvlak ligt, zodat de cilinder de aarde volgens een meridiaan raakt. Hiermee verkrijgt men de projectie van Gauss-Krüger, die tegenwoordig veel gebruikt wordt voor de topografische kaarten van grote landen en voor wereldomvattende karteringen. Omdat slechts een smalle strook zonder grote vervormingen wordt afgebeeld, werkt men om de 3° of 6° met een andere cilinder zodat er in verschillende stelsels gewerkt moet worden. Een toepassing is de U.T.M.-projectie (Universal Transverse Mercator) waarbij de centrale meridiaan met een vergroting van 0,9996 wordt afgebeeld om de vervorming aan de randen te beperken.

2.2. De stereografische projectie

Voornaamste eigenschappen
Zoals in het voorgaande overzicht al werd opgemerkt, worden bij de stereografische projectie de punten van de aardbol geprojecteerd op een raakvlak aan die bol (het raakvlak), waarbij als projectiecentrum fungeert het punt dat op de bol diametraal tegenover het raakpunt is gelegen. figuur 2.6 toont de situatie; de projectie ofwel het beeldpunt van P is A.



Figuur 2.6.

Het vlak door de middellijn ON en het punt P is het vlak van tekening. Omdat ON een middellijn van de grote cirkel door P is, is $\angle NPO = 90°$. Daaruit volgt

$$ON^2 = OP \times OA \tag{2.1}$$

Beschouw nu de cirkel c door P op de bol, en daarop een punt Q met beeldpunt B. Men heeft:

$$ON^2 = OQ \times OB = OP \times OA \tag{2.2}$$

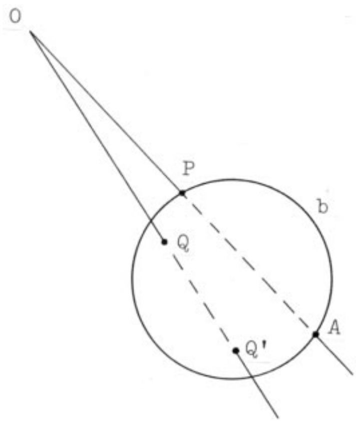
Wij brengen nu een bol b aan door genoemde cirkel en het punt A. De snijpunten van de verlengden van OP en OQ met deze bol zijn resp. A en Q', zie figuur 2.7.
Volgens een bekende stelling geldt nu:

$$OP \times OA = OQ \times OQ'$$

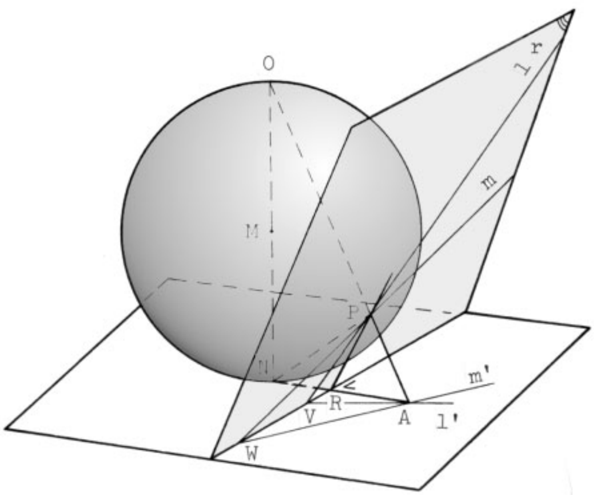
zodat met (2.2) volgt:

$$OQ' = OB$$

Dus Q' valt met B samen. Q was een willekeurig punt op de cirkel c, dus de beeldpunten van alle punten van c liggen op de bol b. Ze liggen uiteraard in het kaartvlak, dus in de doorsnijding daarvan met de bol b, en die doorsnijding is een cirkel. Cirkels worden dus door de stereografische projectie als cirkels afgebeeld. Grote cirkels door het raakpunt N worden afgebeeld als rechte lijnen, d.w.z. als cirkels met oneindig grote straal. Opgemerkt wordt dat het middelpunt van de afbeelding van een cirkel in het algemeen niet de projectie van het middelpunt van de afgebeelde cirkel is. Wij zullen nu bewijzen dat de stereografische projectie *conform* of *hoekgetrouw* is.



Figuur 2.7.



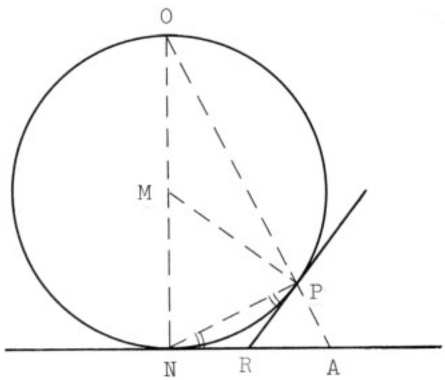
Figuur 2.8.

In figuur 2.8 zijn ℓ en m raaklijnen aan de bol, zij bepalen het raakvlak r, PR is de raaklijn in het vlak door P, N en O. De situatie in laatstgenoemd vlak is in figuur 2.9 apart weergegeven.

Als raaklijnstukken zijn RN en RP gelijk. Dus $\angle RNP = \angle RPN$. Daar $\angle NPA = \angle NPO = 90°$, is eveneens $\angle RPA = \angle RAP$. Dus $RP = RA$. Keren wij nu terug naar figuur 2.8, dan blijkt:

$$\left.\begin{array}{l} \angle\ WRP = \angle\ WRA = 90^\circ \\ WR = WR \\ RP = RA \end{array}\right\} \Delta WRP \sim \Delta WRA$$

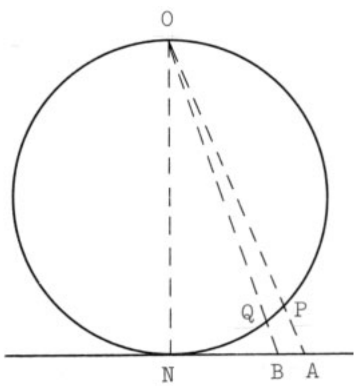
$$\Rightarrow \angle\ PWV = \angle\ AWV \Rightarrow \angle\ WPV = \angle\ WAV$$



Figuur 2.9.

De hoek tussen de twee afbeeldingen ℓ' en m' is gelijk aan de hoek tussen de raaklijnen ℓ en m, m.a.w. de projectie is conform. Daar de hoek tussen twee krommen gedefinieerd is als de hoek tussen hun raaklijnen in het snijpunt, zal bijvoorbeeld de hoek tussen twee grote cirkels op de aardbol onvervormd worden afgebeeld als de hoek tussen de afbeeldingen van die cirkels.

De vergroting



Figuur 2.10.

In figuur 2.10 is:

$$OP \times OA = OQ \times OB\ (= ON^2)$$

$$\angle\ POQ = \angle\ BOA$$

$$\Rightarrow \Delta\ OPQ \sim \angle\ OBA$$

$$\Rightarrow PQ : BA = OP : OB$$

$$OP : OB = OQ : OB$$

Wanneer PQ zeer klein is t.o.v. de straal van de bol, is $OP \approx OQ$ en $OB \approx OA$, en heeft men met zeer goede benadering:

$$AB : PQ = OA : OP$$

De vergroting m van de projectie, zoals gedefinieerd in par. 2.1, is hiermee gegeven. Stelt men de straal van de bol R en $NP = r$, dan is, als r klein is t.o.v. R:

$$NP \approx \text{boog } NP \approx NA$$

Men heeft nu:

$$OP \times OA = 4R^2$$

$$OA = \frac{4R^2}{OP}$$

$$m_r = \frac{OA}{OP} = 4\frac{4R^2}{4R^2 - r^2} = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{4R^2}} \approx 1 + \frac{r^2}{4R^2} \qquad (2.3)$$

In het centrale punt N is $r = 0$ en de vergroting is 1: een klein gebied om N wordt op ware grootte afgebeeld, daarbuiten neemt het verschil met 1 kwadratisch toe met de afstand r tot N (in eerste benadering).
Het gaat er nu bij een kaartprojectie om, een bepaald gebied, bijvoorbeeld Nederland, af te beelden. N wordt daartoe in het midden van het land (Amersfoort) gekozen. De grootste afstand van N die in het land voorkomt is bijvoorbeeld die van een punt in Limburg, noem die grootste afstand r_M, dan is $r_M \approx 170$ km. De plaatselijke vergroting is daar, met $R = 6400$ km:

$$1 + \frac{r_M^2}{4R^2} \approx 1 + 180 \times 10^{-6}$$

d.w.z. een afstand gemeten in het terrein moet per 100 m vermeerderd worden met

$$180 \times 10^{-6} \times 100 \text{ m} = 180 \times 10^{-6} \times 10^4 \text{ cm} = 1{,}8 \text{ cm}$$

om de lengte van zijn afbeelding in het kaartvlak te krijgen. Bij een kaartprojectie voor geodetische en landmeetkundige doeleinden is het om voor de hand liggende praktische redenen gewenst dat de vergroting weinig van 1 afwijkt. Men kan nu de maximaal optredende vergroting verminderen door de gehele afbeelding evenredig te verkleinen. In het centrale punt wordt dan de vergroting kleiner dan 1, aan de randen van het af te beelden gebied, wordt het verschil met 1 verkleind. Laat in dit gebied de maximale afstand tot het centrale punt r_M zijn. De gehele afbeelding wordt dan verkleind door vermenigvuldiging met de factor:

$$1 - \frac{r_M^2}{8R^2}$$

De vergroting in een punt op afstand r van het centrale punt wordt dan, met (2.3):

$$m_r = \left(1 - \frac{r_M^2}{8R^2}\right)\left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right) = 1 - \frac{r_M^2}{8R^2} + \frac{r^2}{4R^2} - \frac{r_M^2 r^2}{32R^4} \tag{2.4}$$

De laatste term kan voor een gebied van de omvang van Nederland worden verwaarloosd. Voor het centrale punt met $r = 0$, wordt de vergroting:

$$m_0 = 1 - \frac{r_M^2}{8R^2} \tag{2.5}$$

Voor een punt met de afstand r_M tot het centrale punt wordt de vergroting:

$$m_M = 1 + \frac{r_M^2}{8R^2} \tag{2.6}$$

De vergroting wordt nu 1 voor die punten waarvoor geldt:

$$\frac{r^2}{4R^2} - \frac{r_M^2}{8R^2} = 0$$

$$r = \tfrac{1}{2} r_M \sqrt{2} \tag{2.7}$$

De meetkundige plaats van die punten is uiteraard een cirkel met tot middelpunt het centrale punt en de berekende r tot straal. De evenredige verkleining van de afbeelding kan men zo opvatten dat als kaartvlak niet een raakvlak aan de aardbol wordt gebruikt, maar een snijvlak dat de bol snijdt in de cirkel met vergroting 1. Bij de toepassing van de stereografische projectie voor de Rijksdriehoeksmeting in Nederland is het centrale punt Amersfoort. Voor r_M is genomen ca. 175 km (in feite door de keuze van een ronde waarde voor log m_0). Men vindt, met $R \approx 6400$ km en r in km voor de vergroting:

$$m = 1 - \frac{175^2}{8 \times 41 \times 10^6} + \frac{r^2}{4 \times 4 \times 10^6} = 1 - 0{,}94 \times 10^{-4} + \frac{r^2}{164} \times 10^{-6}$$

De lijnen van gelijke vergroting zijn concentrische cirkels met tot middelpunt het centrale punt Amersfoort; de vergroting is volgens (2.7) gelijk aan 1 op een cirkel met een straal van ca. 120 km. Een afstand van 100 m in een gebiedje op r km van Amersfoort wordt afgebeeld als een afstand in het kaartvlak van:

$$100\left(1 - 0{,}94 \times 10^{-4} + \frac{r^2}{164}\ 10^{-6}\right) \text{ m}$$

$$= 100 \text{ m} + 100 \times \left(-9{,}4 \times 10^{-5} + \frac{r^2}{1640} \times 10^{-5}\right) \text{ m}$$

$$= 100 \text{ m} + \left(-9{,}4 + \frac{r^2}{1640}\right) \text{ mm} \tag{2.8}$$

In (2.8) ziet men de 'correctie voor stereografische kaartprojectie' in mm per 100 m. Bij de toepassing voor de Nederlandse Rijksdriehoekmeting (RD) zijn enigszins andere waarden voor r_M en R gebruikt dan de globale waarden hierboven. Verder is het in de praktijk gemakkelijk als r^2 uitgedrukt wordt in de 'vlakke' RD-coördinaten. In het RD-stelsel heeft het punt Amersfoort de coördinaten $X = +155.000$, $Y = +463.000$ (in meters). De gebruiksformule om de correctie $\Delta\ell$ in mm per 100 m te berekenen wordt daarmee:

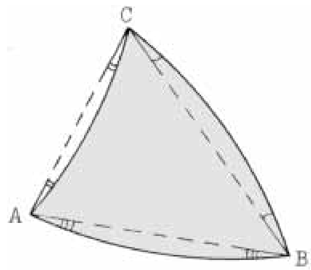
$$\Delta\ell = -9{,}2 + \frac{(X-155)^2 + (Y-463)^2}{1629} \quad \Delta\ell \text{ in mm, } X \text{ en } Y \text{ in km (afgerond)} \quad (2.9)$$

(2.9) geeft de vergroting in het punt (X,Y). Bij afstanden tot enkele km lengte kan men de vergroting in het midden van de betrokken lijn gebruiken, te verkrijgen door in (2.9) het gemiddelde van X- resp. Y-coördinaten der eindpunten in te voeren. Bij grotere afstanden berekent men $\Delta\ell$ voor elk der eindpunten en neemt het gemiddelde. Hieronder worden enkele voorbeelden gegeven voor een afstand van 200 m (bijvoorbeeld de basis van een centreringsmeting), een afstand van 2 km (bijvoorbeeld een elektronisch gemeten veelhoekszijde) en een afstand van 10 km (bijvoorbeeld een driehoekszijde).

ℓ_{12} gemeten in terrein	$(X_1 - 155)$ $(Y_1 - 463)$ km	$(X_2 - 155)$ $(Y_2 - 463)$ km	$\Delta_1\ell_{12}$ mm/100 m	$\Delta_2\ell_{12}$ mm/100 m	gem. $\Delta\ell_{12}$ mm/100 m	totale correctie mm
	afgeronde coördinaten der eindpunten					
200 m	0 0	0 0	–9,2	–9,2	–9,2	–18.4
	120 0	120 0	–0,4	–0,4	–0,4	–0,8
	0 170	0 170	+8,5	+8,5	+8,5	+17,0
2000 m	0 0	2 0	–9,2	–9,2	–9,2	–184,0
	120 0	122 0	–0,4	–0,1	–0,25	–5,0
	120 0	120 2	–0,4	–0,4	–0,4	–8,0
	0 170	0 172	+8,5	+9,0	+8,75	+175,0
	0 170	2 170	+8,5	+8,5	+8,5	+170,0
10.000 m	0 0	10 0	–9,2	–9,2	–9,2	–920
	120 0	130 0	–0,4	+1,2	+0,4	+40
	120 0	120 10	–0,4	–0,3	–0,35	–35
	0 170	0 180	+8,5	+10,6	+9,55	+955
	0 170	10 170	+8,5	+8,6	+8,55	+855

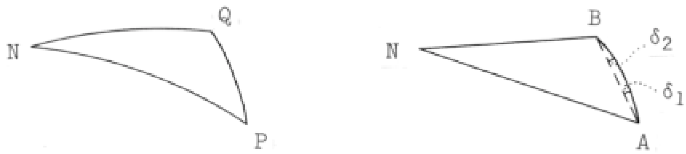
De richtingscorrectie (correctie van boog naar koorde)

Door de stereografische projectie wordt een grote cirkel op de aardbol als een cirkel afgebeeld. In figuur 2.11 is de afbeelding van een driehoek weergegeven, de kromming der zijden is uiteraard overdreven.



Figuur 2.11.

De hoeken A, B en C van deze ‘kromlijnige driehoek’ (een vlakke figuur!) zijn gelijk aan de hoeken die men in het terrein kan meten, wegens de conforme afbeelding. In het kaartvlak wenst men nu de vlakke meetkunde te bedrijven en te werken met de gestippelde gewone driehoek ABC. Daartoe is het nodig de in figuur 2.11 aangegeven hoekjes tussen boog en koorde te kennen. Dit geschiedt door voor elke richting afzonderlijk (dus van A naar B, van A naar C, van B naar A, enz.) de zgn. correctie van boog naar koorde te berekenen. De afleiding gaat als volgt; in figuur 2.12 is N het centrale punt van de projectie, A en B zijn de projecties van terreinpunten P en Q.



Figuur 2.12.

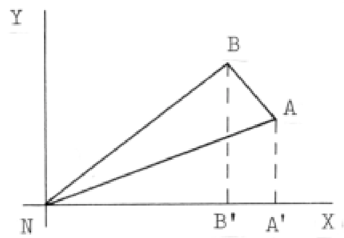
NPQ is een boldriehoek waarvan de zijden grote cirkels zijn; NP en NQ worden afgebeeld als rechte lijnen NA, resp. NB. Daar de projectie conform is, is de hoek bij A tussen AN en de raaklijn aan de cirkelboog gelijk aan de hoek P van de boldriehoek, enz. Duidt men de som der hoeken van boldriehoek NPQ aan met S, dan geldt dus:

$$\angle BNA + \angle NAB + \angle ABN + \delta_1 + \delta_2 = S$$

Omdat boog AB een cirkelboog is, is $\delta_1 = \delta_2$. M.a.w. er geldt:

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta = \tfrac{1}{2}\,(S - 180°)$$

Men noemt $S - 180°$ het *sferisch exces* van boldriehoek NPQ; in de boldriehoeksmeting toont men aan dat voor het sferisch exces E geldt, met O = oppervlak boldriehoek en R = straal aardbol:



Figuur 2.13.

$$E = \frac{O}{R^2} \text{ radialen} = \frac{O}{R^2}\ \rho \text{ mgon } (\rho = 63662)\ ^{*)}$$

Voor het oppervlak O kan men zonder bezwaar het oppervlak van de vlakke driehoek NAB nemen, hetgeen met behulp van (benaderde) rechthoekige coördinaten kan geschieden. Laat in figuur 2.13 N de oorsprong van het coördinatenstelsel zijn.

$$\begin{aligned} O(\Delta\, NAB) &= O(\Delta\, NB'B) + O(\square\, B'A'AB) - O(\Delta\, NA'A) \\ &= \tfrac{1}{2} X_B Y_B + \tfrac{1}{2}(X_A - X_B)(Y_A + Y_B) - \tfrac{1}{2} X_A Y_A) \\ &= \tfrac{1}{2}(X_A Y_B - X_B Y_A) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Wanneer in figuur 2.13 B onder de lijn NA zou liggen, zou men het oppervlak volgens (2.10) met negatief teken krijgen, de lezer ga dit zelf na. Daarmee wordt voor het geval van figuur 2.12 de correctie van boog naar koorde, aan te brengen met negatief teken aan de richting gemeten van A naar B, en met positief teken aan de richting van B naar A:

$$\delta = \frac{X_A Y_B - X_B Y_A}{4R^2} \times 63662 \text{ mgon}$$

$$\delta = \frac{X_A Y_B - X_B Y_A}{2560} \text{ mgon}$$

In de toepassing bij de Nederlandse RD is N, zoals reeds vermeld, het punt Amersfoort, met RD-coördinaten $X = +155.000$, $Y = +463.000$. Stel nu, in RD-coördinaten:

$$X'_A = X_A - 155.000$$

$$Y'_A = Y_A - 463.000, \text{ enz.}$$

dan krijgt men de aan een gemeten richting van A naar B aan te brengen correctie, compleet met teken, uit

$$\delta_{AB} = \frac{-X'_A Y'_B + X'_B Y'_A}{2560} \text{ mgon} \tag{2.11}$$

X' en Y' in km (afgerond)

Indien de lijn AB door Amersfoort gaat, is de correctie nul, voor een richting loodrecht daarop is de correctie maximaal of minimaal. Om een indruk te geven van de waarden voor δ_{AB} die bij verschillende afstanden tussen A en B in verschillende delen van het land optreden, geven wij hieronder enige voorbeelden:

Afstand *AB*	1 km			5 km			10 km		
X'_A km Y'_A km	10 0	100 0	170 0	10 0	100 0	170 0	10 0	90 0	108164
X'_B Y'_B	10 1	100 1	170 1	10 5	100 5	170 5	10 10	100 0	100170
δ_{AB} mgon	–0,004	0,004	–0,07	–0,02	–0,19	–0,33	–0,04	0,00	+0,77

*) mgon betekent milligon, dit is het duizendste deel van een centisimale graad, de eenheid in het stelsel waarbij een rechte hoek 100 graden telt. Een radiaal is 63662 mgon, zie par. 5.1.

Literatuur

C.H. DEETZ en O.S. ADAMS, *Elements of map projection*, U.S. Dept. of Commerce, Coast and Geodetic Survey, Spec. publ. No. 68, 5e druk, Washington, 1945.

L. DRIENCOURT en J. LABORDE, *Traité des projections des cartes géographiques*, 4 dln., Paris, 1932.

H.J. HEUVELINK, *De stereografische kaartprojectie in hare toepassing bij de Rijksdriehoekmeting*, Delft, 1918.

E. IMHOF, *Gelände und Karte*, Zürich, 1950.

P. RICHARDUS en R.K. ADLER, *Map projections*, Amsterdam-Oxford, 1971.

A.A. ROBINSON en anderen, *Elements of cartography*, 5e druk, New York, 1984.

K.H. WAGNER, *Kartographische Netzentwürfe*, 2e druk, Mannheim, 1962.

Toets uw kennis

1. Wat is het doel van kaartprojecties?
2. Wat is de algemene formulevorm van een kaartprojectie?
3. Van welke vorm(en) van de aarde gaat men uit bij de afbeelding?
4. Wat weet u van de vergroting bij kaartprojecties?
5. Welke projectie geeft een afbeelding alsof men de aarde van (oneindig) ver ziet?
6. Welke projectie beeldt grote cirkels als rechte lijnen af? Waarvoor wordt deze gebruikt?
7. Noem een belangrijke eigenschap van conforme kaartprojecties. Wat weet u van de vergroting in een punt van een conforme afbeelding?
8. Wat is een equivalente kaartprojectie? Is een kaart in deze projectie geschikt om kortste verkeersroutes tussen continenten te plannen?
9. Noem twee equivalente projecties en schets de meetkundige interpretatie.
10. Beschrijf de Mercatorprojectie.
11. Leid een formule af voor de vergroting bij de stereografische kaartprojectie.
12. Hoe bereikt men dat de vergroting bij de in Nederland gebruikte kaartprojectie zo weinig mogelijk van 1 verschilt?
13. De projecties van de punten A en B hebben in het RD-stelsel de volgende coördinaten in km:

	X	Y
A	255	363
B	255	563

Bereken de hoek tussen de rechte lijn AB en de projectie van de grote cirkel door A en B. Deze projectie is een cirkelboog; bereken de straal van die boog.