

# **Inleiding Mechanica**



# **Inleiding Mechanica**

drs. R. Roest

wetenschappelijk hoofdmedewerker titulair  
aan de Technische Universiteit Delft

**© VSSD**

Eerste druk 1987

Vijfde druk 1996

Zesde druk 2002

DUP Blue Print is een imprint van:

Delft University Press

P.O. Box 98, 2600 MG Delft, The Netherlands

tel. +31 15 27 85678, telefax +31 15 27 85706, e-mail [info@library.tudelft.nl](mailto:info@library.tudelft.nl)internet: <http://www.library.tudelft.nl/dup>

Uitgegeven in opdracht van:

Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft

Poortlandplein 6, 2628 BM Delft, The Netherlands

tel. +31 15 27 82124, telefax +31 15 27 87585, e-mail: [hlf@vssd.nl](mailto:hlf@vssd.nl)internet: <http://www.vssd.nl/hlf>URL over dit boek: **<http://www.vssd.nl/hlf/c002.htm>**

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

*All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.*

Printed in The Netherlands.

ISBN 90-407-1291-3

NUGI 812

Trefw.: mechanica

# Voorwoord

Dit boek is bedoeld als opvolger van het gelijknamige boek van de hand van drs. A.N. Borghouts, waarvan in 1962 de eerste druk verscheen en dat sindsdien onafgebroken in gebruik is geweest bij verschillende faculteiten van de TU-Delft, terwijl het ook buiten Delft bekendheid en waardering genoot.

Evenals dat het geval was met het werk van Borghouts, is dit boek in de eerste plaats bestemd voor het propedeutisch onderwijs aan studenten in de (technische) natuurkunde en aanverwante studierichtingen.

Op voorstel van ir. G.A.M. van Kuik en ir. P.T. Smulders van de TU-Eindhoven is de behandeling van de dynamica van veel-deeltjes systemen vergemakkelijkt door tussenvoeging van een apart hoofdstuk over systemen van twee deeltjes.

Hoofdstuk 14 (Lineaire deformaties) is tot stand gekomen in nauw overleg met prof.dr.ir. F. Tuinstra.

Vele afleidingen en wiskundige verhandelingen zijn ontleend aan drs. I.J.N. Oedayrajsingh Varma.

De auteur is niet alleen aan de hierboven genoemden grote dank verschuldigd, maar ook aan prof.dr. G.J.C. Bots voor de vrijwel continue begeleiding, en voorts aan ir. W. Buijze, dr.ir. E. Stammers, drs. W. Wisman en de collegedienst van de Faculteit der Technische Natuurkunde voor hun hulp.

Voorburg, augustus 1987.

R. Roest.

## *Bij de derde druk*

Een speciaal woord van dank aan prof.dr.ir F. Bilsen (TU Delft) en dr. A.Th.A.M.. de Waele (TU Eindhoven) voor vele waardevolle op- en aanmerkingen!

Voorburg, september 1990.

R. Roest.

## *Bij de vijfde druk*

De tekst van de paragrafen 9.5 en 11.6 is gewijzigd. Op verschillende plaatsen zijn kleine veranderingen of uitbreidingen aangebracht met het doel, de tekst duidelijker, vollediger en begrijpelijker te maken.

Voorburg, augustus 1996.

R. Roest.

# Inhoud

VOORWOORD	5
1. INLEIDING	11
1.1. De plaats van de klassieke mechanica in de natuurkunde; indeling in de natuurkunde	11
1.2. Grootheden, eenheden, dimensies	13
1.3. Tabellen	16
1.4. Coördinatenstelsels	17
2. KINEMATICA VAN PUNTVORMIGE LICHAMEN	20
2.1. De plaatsvector	20
2.2. Snelheid en versnelling	21
2.3. Ontbinden in componenten van snelheid en versnelling	25
2.4. Kromlijnige beweging in een plat vlak	27
2.5. Cirkelbeweging; hoeksnelheid en hoekversnelling	29
2.6. Relatieve beweging	30
2.7. Voorbeelden en toepassingen	31
Overzicht van hoofdstuk 2	36
3. DE GRONDWETTEN VAN DE DYNAMICA	37
3.1. De wetten van Newton	37
3.2. Traagheid en trage massa	38
3.3. Krachten	43
3.4. Inertiële stelsels	45
Overzicht van hoofdstuk 3	46
4. DYNAMICA VAN EEN PUNTMASSA	47
4.1. De bewegingsvergelijking	47
4.2. Harmonische trilling	51
4.3. Eenparige cirkelbeweging; centripetale kracht	55
4.4. Gravitatiekracht, zwaartekracht en gewicht	57
4.5. Zware massa en trage massa	61
4.6. Wrijving	62
4.7. Elastische krachten; veerkracht; spankracht	64
Overzicht van hoofdstuk 4	69
5. ARBEID, ENERGIE, IMPULS, IMPULSMOMENT	70
5.1. Arbeid en kinetische energie; vermogen	70
5.2. Potentiële energie; conserverend krachtveld	73
5.3. De samenhang tussen veldkracht en potentiële energie	76
5.4. Criterium voor conserverend krachtveld	78
5.5. Behoudswet 1: de wet van behoud van mechanische energie	81
5.6. Centrale krachtvelden (I)	83

5.7.	Energetische beschouwing van de harmonische trilling; anharmonische trillingen	87
5.8.	Dissiperende krachten	93
5.9.	Krachtstoot en impuls	95
5.10.	Krachtsmoment; impulsmoment van een puntmassa; perkenwet van Kepler	98
5.11.	Centrale krachtvelden (II): het equivalente een-dimensionale probleem	102
	Overzicht van hoofdstuk 5	106
6.	TWEE-DEELTJES SYSTEMEN; BOTSINGEN	108
6.1.	Behoudswet 2: de wet van behoud van impuls	108
6.2.	Massamiddelpunt; m.m.-coördinatenstelsel	109
6.3.	Mutuele potentiële energie van een twee-deeltjes systeem	112
6.4.	Harmonische trilling van een twee-deeltjes systeem	115
6.5.	Botsingen	117
6.6.	Voorbeelden en toepassingen	119
6.7.	De botsing beschouwd ten opzichte van het massamiddelpuntstelsel	123
6.8.	Impulsmoment van een twee-deeltjes systeem	125
6.9.	Het equivalente een-dimensionale probleem voor een twee-deeltjes systeem	128
	Overzicht van hoofdstuk 6	131
7.	DYNAMICA VAN EEN VERZAMELING PUNTMASSA'S	132
7.1.	Behoudswet 2 voor meer dan twee deeltjes	131
7.2.	Massamiddelpunt; m.m.-coördinatenstelsel	134
7.3.	Mutuele potentiële energie	136
7.4.	Impulsmoment van een verzameling van N puntmassa's; behoudswet 3	140
7.5.	Impulsmoment en massamiddelpunt; de impulsmomentstelling	141
7.6.	Massamiddelpunt van een lichaam	142
	Overzicht van hoofdstuk 7	143
8.	STARRE LICHAMEN; ROTATIE VAN EEN LICHAAM OM EEN VASTE AS	144
8.1.	Koppel	144
8.2.	Samenstellen van krachten op een star lichaam	145
8.3.	Zwaartepunt van een lichaam	149
8.4.	Kinetische energie van een roterend lichaam; traagheidsmoment	149
8.5.	Berekening van enige traagheidsmomenten	151
8.6.	Impulsmoment van een lichaam dat roteert om een vaste as	154
8.7.	Arbeid en vermogen bij rotatie om een vaste as	157
8.8.	Toepassingen van $\vec{M} = \vec{L}$	160
8.9.	De verschuivingsstelling van Steiner	164
8.10.	Harmonische rotatie-trillingen; fysische slingers	165
	Overzicht van hoofdstuk 8	172

9.	VLAKKE DYNAMICA VAN EEN STAR LICHAAM	173
9.1.	Vlakke beweging; translatie en rotatie	173
9.2.	De bewegingsvergelijkingen	174
9.3.	Kinetische energie bij vlakke beweging; vermogen	178
9.4.	Rollen	179
9.5.	De rolbeweging bij een motorfiets	186
9.6.	De rolweerstand	188
9.7.	Evenwichtsvoorwaarden	189
9.8.	Het principe van de virtuele verplaatsingen	192
9.9.	Statisch evenwicht en potentiële energie	193
	Overzicht van hoofdstuk 9	193
10.	RELATIEVE BEWEGING EN TRAAGHEIDSKRACHTEN	196
10.1.	Rechthoekig bewegend eenparig versneld coördinatenstelsel	196
10.2.	Roterende coördinatenstelsels: twee bijzondere gevallen	198
10.3.	Roterende coördinatenstelsels (algemeen)	200
10.4.	Toepassingen	203
	Overzicht van hoofdstuk 10	212
11.	ENIGE ASPECTEN VAN DE NIET-VLAKKE DYNAMICA	213
11.1.	Statische en dynamische balans	213
11.2.	De traagheidstensor	215
11.3.	Hoofdtraagheidsassen en hoofdtraagheidsmomenten	217
11.4.	Bewegingsvergelijkingen voor de rotatie in een hoofdasstelsel	220
11.5.	De tol-beweging	223
11.6.	Nutatie	223
11.7.	Precessie (eenvoudige beschrijving)	227
11.8.	Stabiliteit van de schijftol; toepassingen	230
11.9.	De zichzelf oprichtende tol	231
11.10.	De precessie van de aarde	232
	Overzicht van hoofdstuk 11	234
12.	HET OMGEKEERD KWADRATISCH CENTRALE KRACHTVELD	235
12.1.	Veldsterkte en potentiaal in een omgekeerd kwadratisch centraal krachtveld	236
12.2.	De stelling van Gauss voor het omgekeerd kwadratische veld	238
12.3.	Het gravitatieveld van de aarde	243
12.4.	De eigenenergie van een homogene bol	244
12.5.	Meting van de gravitatieconstante	247
12.6.	De stelling van Gauss in differentiële vorm; de vergelijkingen van Poisson en Laplace	249
12.7.	De wetten van Kepler	251
12.8.	De baanvergelijking	251
12.9.	De derde wet van Kepler	258
12.10.	Het twee-lichamen probleem	259

12.11.	Het equivalente een-dimensionale probleem voor het omgekeerd kwadratische centrale krachtveld	261
	Overzicht van hoofdstuk 12	264
13.	TRILLINGEN	265
13.1.	Het belang van de harmonische trilling	265
13.2.	Lineair gedempte vrije trilling	267
13.3.	Zwakke demping	271
13.4.	Kritieke demping en sterke demping	274
13.5.	Elektrisch analogon (I)	275
13.6.	Gedwongen trillingen	276
13.7.	Resonantie	280
13.8.	Elektrisch analogon (II); impedantie	282
13.9.	Energetische beschouwing van de gedwongen trilling	284
13.10.	Absorptiekromme, bandbreedte en kwaliteit; absorptie en dispersie	285
13.11.	Gekoppelde oscillatoren	288
	Overzicht van hoofdstuk 13	294
14.	LINEAIRE DEFORMATIES	296
14.1.	Deformeerbare lichamen	296
14.2.	Rek, dwarscontractie; alzijdige compressie	297
14.3.	Afschuiving	303
14.4.	De spanningstensor	307
14.5.	Buiging	310
14.6.	Torsie	317
14.7.	Elastische nawerking en hysteresis	320
	Overzicht van hoofdstuk 14	322
15.	VLOEISTOFMECHANICA	323
15.1.	Hydrostatica; de wet van Pascal	324
15.2.	De wet van Archimedes	328
15.3.	Hydrodynamica	332
15.4.	De continuïteitsvergelijking	333
15.5.	Bewegingsvergelijkingen voor wrijvingsloze fluïda	334
15.6.	Inwendige wrijving	342
15.7.	Laminaire stroming door een buis; formule van Poiseuille	348
15.8.	De kengrootheid van Reynolds	350
15.9.	Weerstandstroming; formule van Stokes	351
	Overzicht van hoofdstuk 15	354
16.	OPPERVLAKTEVERSCHIJNSELEN BIJ VLOEISTOFFEN	355
16.1.	Oppervlakte-energie	355
16.2.	Oppervlaktespanning	357
16.3.	Over- en onderdruk bij een gebogen vloeistofoppervlak	359
16.4.	Capillaire opstijging resp. neerdrukking	361

16.5. Olie op water	364
Overzicht van hoofdstuk 16	365
17. MECHANISCHE ASPECTEN VAN DE RELATIVITEITSTHEORIE	366
17.1. De lichtsnelheid in vacuo	366
17.2. Lengte en tijd	368
17.3. Impuls, massa en energie	374
17.4. De algemene relativiteitstheorie	379
Overzicht van hoofdstuk 17	380
APPENDIX	381
A.1. Scalairen en vectoren	381
A.2. Eenheidsvectoren	385
A.3. Inwendig of scalair produkt van twee vectoren; kwadraat van een vector; cosinusregel	386
A.4. Het differentiëren van een vector naar een scalar	388
A.5. Determinanten	390
A.6. Uitwendig of vectorprodukt van twee vectoren; sinusregel	391
A.7. Het vector-karakter van de hoeksnelheid	392
A.8. De kromtestraal $R$ in een punt van een vlakke kromme	394
A.9. Stieltjes-integraal: limiet van een som	396
A.10. Partiële afgeleiden van twee of meer variabelen	397
A.11. Scalair velden en de gradiënt van een scalar	398
A.12. Vectorvelden; lijn-integraal van een vectorveld	399
A.13. De flux van een vectorveld door een oppervlak	401
A.14. De divergentie van een vectorveld; de divergentiestelling	402
A.15. De rotatie van een vectorveld; de stelling van Stokes	404
A.16. De operator van Laplace	408
A.17. De reeksontwikkeling van Taylor; benaderingen	409
A.18. De ruimtehoek	410
A.19. De kegelsneden (ellips, cirkel, parabool, hyperbool)	411
A.20. Het superpositiebeginsel	419
A.21. Complexe getallen; hyperbolische functies	421
LITERATUUR	424
TREFWOORDENLIJST	425

# 4

## Dynamica van een puntmassa

### 4.1. De bewegingsvergelijking

Als de vectorsom van alle op een deeltje werkende krachten bekend is, dan levert de tweede wet van Newton een differentiaalvergelijking op die men noemt de

$$(dynamische) \text{ bewegingsvergelijking: } \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Bij deze *tweede orde differentiaalvergelijking* (d.v.) behoren twee *randvoorwaarden*, bijvoorbeeld plaats en snelheid van het deeltje op een bepaald tijdstip. Als dit tijdstip is  $t = 0$  dan noemt men de randvoorwaarden ook vaak ‘*beginvoorwaarden*’.  $\vec{F}$  kan een functie zijn van de tijd, maar ook van de plaats of van de snelheid; zelfs een combinatie van deze afhankelijkheden is mogelijk.

Vaak (niet altijd) lukt het, bovenstaande d.v. op te lossen. In dat geval krijgt men de plaats als functie van de tijd, de zogenaamde

$$kinematische \text{ bewegingsvergelijking: } \vec{r} = \vec{r}(t).$$

In dit hoofdstuk beperken we ons tot bewegingen in een plat vlak. Dit houdt in, dat we voor de beschrijving van de beweging aan twee coördinaten genoeg hebben. Kiezen we de X- en Y-as van een inertiestelsel in het vlak van de beweging, dan geeft de dynamische bewegingsvergelijking in het algemeen twee algebraïsche vergelijkingen:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{F_x}{m} \quad \text{en} \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{F_y}{m}.$$

Ook de kinematische bewegingsvergelijking geeft twee algebraïsche vergelijkingen:

$$x = x(t) \quad \text{en} \quad y = y(t).$$

#### Voorbeeld 1

Een waterdruppeltje valt. Het ondervindt twee krachten: de zwaartekracht ( $m\vec{g}$ ) en de luchtweerstand (eigenlijk is er ook nog een derde kracht, de opwaartse kracht in lucht volgens de wet van Archimedes; deze opwaartse kracht is echter relatief klein en wordt verwaarloosd). De luchtweerstand heeft volgens Stokes de grootte  $6\pi \eta r v$  waarin  $\eta$  = de viscositeit van lucht (in hoofdstuk 15 komen we terug op dit begrip; daar is ook de wet van Archimedes te vinden),  $r$  = de straal van het druppeltje en

$v$  = zijn snelheid.

De bewegingsvergelijking is dus:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{g} - 6\pi \eta r\vec{v}$$

ofwel, omdat er toch geen sprake is van hoge snelheden:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - 6\pi \eta r\vec{v}.$$

Als randvoorwaarde kiezen we:  $v = 0$  op  $t = 0$ .

Omdat  $\vec{v}$  en  $\vec{g}$  dezelfde richting hebben, leidt deze d.v. slechts tot één algebraïsche vergelijking:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - 6\pi \eta rv.$$

Gerangschikt in de voor differentiaalvergelijkingen meer gebruikelijke volgorde:

$$m \frac{dv}{dt} + 6\pi \eta rv = mg.$$

Met de afkorting  $k = 6\pi \eta r / m$  ziet de d.v. er al iets eenvoudiger uit:

$$\frac{dv}{dt} + kv = g.$$

Deze differentiaalvergelijking wordt nog eenvoudiger indien wij overgaan op een nieuwe variabele:  $u = kv - g$ .

De vergelijking wordt dan:

$$\frac{du}{dt} + ku = 0.$$

Oplossing:

$$u = u_0 e^{-kt}.$$

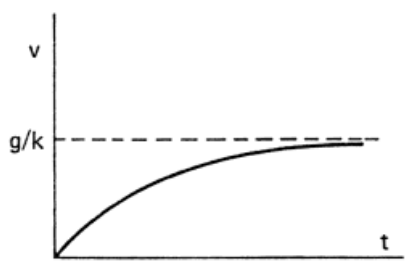
Hierin is  $u_0$  de waarde die  $u$  had op het tijdstip  $t = 0$ . Uit het feit dat  $v = 0$  op  $t = 0$  volgt:

$$u_0 = -g.$$

Vervangen we nu  $u$  weer door  $kv - g$  dan blijkt de oplossing voor  $v$  te zijn:

$$v = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}).$$

Zie ook figuur 4.1.



Figuur 4.1.

De limietwaarde voor  $t \rightarrow \infty$  is:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v = \frac{g}{k}.$$

Het is interessant, na te gaan, na hoe lange tijd de snelheid van het vallende druppeltje nog maar 1% afwijkt van de limietwaarde. Daartoe zullen we eerst de getalwaarden moeten invullen:  $\eta = 18 \cdot 10^{-6} \text{ kg s}^{-1} \text{ m}^{-1}$ ;  $r$  is (van een mistdruppeltje) circa  $0,01 \text{ mm} = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ ; de massa van het druppeltje is  $\frac{4}{3} \pi r^3 \rho$  waarin  $\rho =$  de massadichtheid van water  $= 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ;  $\Rightarrow m = 4,2 \cdot 10^{-12} \text{ kg}$ .

Hiermee blijkt dat  $k$  de waarde heeft:  $810 \text{ s}^{-1}$ . Tenslotte is  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Conclusie:  $v = 0,012(1 - e^{-810t})$ ;  $v$  zal minder dan 1% van de limietwaarde (12 mm/s) afwijken zodra:

$$e^{-810t} < 0,01 \Rightarrow -810t < -\ln 100 \Rightarrow 810t > 4,6 \Rightarrow t > 0,0057 \text{ s}.$$

Reeds na minder dan 6 milliseconden is deze toestand dus al bereikt!

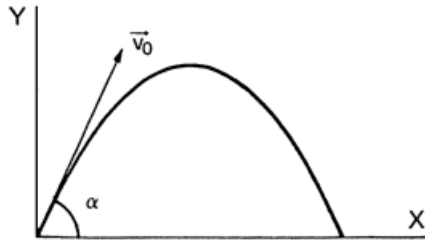
We kunnen dus rustig stellen dat mistdruppeltjes met constante snelheid vallen. Door thermiek (de lucht aan de grond wordt verwarmd en stijgt op) kan de mist *optrekken*: De lucht met mist beweegt dan omhoog met een grotere snelheid dan 12 mm/s.

### Voorbeeld 2

#### *De kogelbaan zonder luchtweerstand.*

Een kogel (massa  $m$ ) wordt vanaf de (horizontale) grond schuin omhoog afgeschoten (beginsnelheid  $\vec{v}_0$  onder een hoek  $\alpha$  met de grond). We kiezen de Y-as van ons coördinatenstelsel verticaal; zie verder figuur 4.2.

$v_0$  is niet al te groot, dat wil zeggen de maximaal af te leggen weg is veel kleiner dan de straal van de aardbol. In dat geval mogen we veronderstellen dat de valversnelling  $\vec{g}$  overal langs de baan van de kogel dezelfde richting en grootte heeft. We verwaarlozen de luchtweerstand.



Figuur 4.2.

*Gevraagd*

- de maximaal bereikte hoogte;
- de reikwijdte;
- de baanvergelijking;
- de kromtestraal van de baan in het hoogste punt.

*Oplossing*

De (dynamische) bewegingsvergelijking luidt:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{zw} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}.$$

Deze simpele vectoriële differentiaalvergelijking leidt tot twee eveneens eenvoudige algebraïsche differentiaalvergelijkingen:  $\dot{v}_x = 0$  en  $\dot{v}_y = -g$  met randvoorwaarden:  $x(0) = y(0) = 0$ ;  $v_x(0) = v_0 \cos \alpha$ ;  $v_y(0) = v_0 \sin \alpha$ .

$$\text{Hieruit volgt: } v_x = \text{constant} = v_0 \cos \alpha \quad (1)$$

$$\text{en: } v_y = -gt + \text{const.} = -gt + v_0 \sin \alpha \quad (2)$$

$$\text{Volgens (1) is } \dot{x} = v_0 \cos \alpha \Rightarrow x = (v_0 \cos \alpha)t + \text{const.} = (v_0 \cos \alpha)t. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Volgens (2) is } \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha \Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t + \text{const.} \\ = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t. \end{aligned} \quad (4)$$

(3) en (4) zijn de *kinematische bewegingsvergelijkingen*.

- a.  $y$  is maximaal als  $\dot{y} = 0$  dus, volgens (2) als  $t = v_0 \sin \alpha / g$ .

$$(4) \Rightarrow y_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}.$$

- b. Als de kogel de grond treft is juist weer  $y = 0$  dus, volgens (4):

$$0 = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t, \text{ waarin } t \neq 0. \quad \text{Conclusie: } t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Volgens (3) is dus de reikwijdte:

$$x_{\max} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

N.B. Ga na dat, bij gegeven  $v_0$ , de reikwijdte zo groot mogelijk is als  $\alpha = \pi/4$  rad.

- c. Eliminatie van  $t$  uit de kinematische bewegingsvergelijkingen (3) en (4) leidt tot de volgende baanvergelijking:

$$y = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha. \quad (5)$$

De baan is dus parabolisch ( $y$  is een kwadratische functie van  $x$ ). Met enige moeite kan men (5) iets overzichtelijker noteren:

$$y = y_{\max} - k(x - \frac{1}{2}x_{\max})^2 \quad \text{waarin } k = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

- d. De kromtestraal  $R$  berekenen we m.b.v. de relatie  $a_n = v^2/R$ . In het hoogste punt van de baan is  $a_n = g$  terwijl  $v = v_x = v_0 \cos \alpha$ . Conclusie:

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}.$$

### Voorbeeld 3

#### *De kogelbaan met luchtweerstand.*

Wie werkelijk wil weten waar de kogel terechtkomt, mag de luchtweerstand ( $\vec{F}_w$ ) niet verwaarlozen. Deze is ruwweg evenredig met het kwadraat van de snelheid:

$\vec{F}_w = -Cv^2 \vec{e}_{\text{tan}}$  waarin  $C$  een experimenteel te bepalen positieve constante is ( $\vec{e}_{\text{tan}}$  is de eenheidsvector  $\vec{v}/v$ ).

De bewegingsvergelijking  $m\vec{a} = \vec{F}_{zw} + \vec{F}_w$  leidt nu tot twee algebraïsche differentiaalvergelijkingen die niet langs analytische weg zijn op te lossen. De computer moet er aan te pas komen om een numerieke oplossing te vinden.

## 4.2. Harmonische trilling

Tot de belangrijkste verschijnselen waar de natuurkunde en de techniek mee te maken hebben, behoren de trillingsverschijnselen. Men spreekt van een trilling als een lichaam een periodieke beweging ten opzichte van een bepaalde stand – de evenwichtsstand – uitvoert. Deze beweging kan langs een rechte lijn plaats vinden, zoals bijvoorbeeld de zuiger in een benzinemotor doet of een aan een veer opgehangen lichaam. Het kan ook een rotatie zijn, zoals bijvoorbeeld de slinger van een klok die uitvoert. In dit hoofdstuk worden de rechtlijnige vibraties besproken; de rotatietrillingen worden in § 8.10 behandeld.

Een puntmassa die langs een rechte lijn trillingen uitvoert, kan dat slechts doen onder invloed van een kracht die periodiek van richting omkeert. Vinden de trillingen om een vast punt plaats, dan moet die kracht – eventueel de resultante van een aantal krachten – voortdurend naar dat punt gericht zijn, zowel voor uitwijkingen naar de ene kant van dat punt als naar de andere kant. Deze naar de evenwichtsstand teruggedrijvende kracht moet een functie van de uitwijking uit de evenwichtsstand zijn.

Een bij vele fysische verschijnselen belangrijk geval is dat de kracht recht evenredig is met de uitwijking. De trilling wordt dan *lineair* of *harmonisch* genoemd. Het is een gelukkige omstandigheid dat juist déze trilling een eenvoudige wiskundige behandeling toelaat.

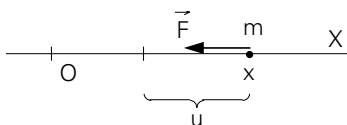
Daarnaast treden in de natuur en in de techniek trillingen op onder invloed van krachten die niet lineair van de uitwijking afhangen, de *niet-lineaire* of *anharmoonische vibraties*, waarvan het theoretisch onderzoek veel ingewikkelder is. Soms kunnen deze trillingen met goede benadering als harmonisch beschouwd worden indien de uitwijkingen voldoende klein zijn. In andere gevallen kunnen zij beschouwd worden als superpositie van een aantal harmonische trillingen.

Bij trillingsverschijnselen treden meestal wrijvingskrachten op die de beweging van de trillende lichamen tegenwerken. Men spreekt dan van *gedempte trillingen*. Kan men die wrijvingskrachten verwaarlozen, dan heten de trillingen *ongedempt*.

Deze paragraaf handelt over de ongedempte harmonische trillingen. Gedempte trillingen worden in hoofdstuk 13 behandeld.

Kenmerkend voor *harmonische vibratie* is het volgende:

Een puntmassa (massa  $m$ ) voert een periodieke beweging uit langs een rechte lijn (deze kiezen we als  $X$ -as), onder invloed van een kracht  $\vec{F}$  die steeds naar een vast punt (op de  $X$ -as) is gericht en die recht evenredig is met de uitwijking.



*Figuur 4.3.*

Als de coördinaat van het krachtcentrum  $x_0$  is en die van de puntmassa  $x$ , is de uitwijking  $u = x - x_0$ . Voor de kracht geldt dan:  $\vec{F} = -bu \vec{i}$ .

De constante  $b$  noemt men de *bindingssterkte* (ook wordt wel het symbool  $s =$  *stijfheid* gebruikt); bij een veer heet  $b$  de veerconstante.

De dynamische bewegingsvergelijking is dus:

$$m\ddot{u} + bu = 0. \quad (4.1)$$

De algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking, de kinematische bewegingsvergelijking dus, luidt:

$$u = A \cos(\omega t + \beta) \quad \text{waarin } \omega = \sqrt{b/m}$$

terwijl  $A$  en  $\beta$  constanten zijn waarvan de waarde moet blijken uit de randvoorwaarden bij de differentiaalvergelijking. (Bedenk dat bij de algemene oplossing van een tweede orde d.v. natuurlijk twee onafhankelijke integratieconstanten behoren! In dit geval zijn dat  $A$  en  $\beta$ ). *Controleer de gesuggereerde oplossing door invullen in de differentiaalvergelijking!*

*Opmerking*

Voor  $A$  heeft men bij voorkeur een *positieve* waarde. Dat is altijd te realiseren door een juiste keuze van  $\beta$  (in het gesloten interval  $[-\pi; \pi]$ ).

De maximale waarde van  $u$  is  $A$ ; men noemt  $A$  de *amplitude* van de trilling.  $\beta$  heet de ‘beginfase’. De waarde van  $\beta$  hangt af van de keuze van het tijdstip  $t = 0$ . Laat men de puntmassa zonder beginsnelheid los in een willekeurig punt van de lijn, dan gaat deze daarna zijn harmonische trilling uitvoeren. Het ligt voor de hand, het ogenblik van loslaten als  $t = 0$  te kiezen. Ga na, dat in dat geval  $\beta = 0$  als de puntmassa werd losgelaten rechts van het krachtcentrum; anders is  $\beta = \pi$  rad.

Een andere mogelijkheid is dat men van een harmonisch trillend deeltje de frequentie (aantal trillingen per tijdseenheid) meet doordat telkens bij doorgang door de evenwichtsstand een smalle lichtbundel wordt onderbroken die op een fotocel gericht staat. De fotocel is opgenomen in een elektronische schakeling die er voor zorgt dat telkens bij doorgang in de richting van het positieve deel van de  $X$ -as een telwerk verspringt. In dat geval ligt het voor de hand, één van de tijdstippen van doorgang in de positieve richting als  $t = 0$  te kiezen;  $\beta$  is dan  $-\pi/2$  zodat men eenvoudiger kan noteren:  $u = A \sin \omega t$ .

De periode van de cosinusfunctie is  $2\pi$ , dat wil zeggen als  $\omega t$  met  $2\pi$  is toegenomen dan zijn  $u$  en  $\dot{u}$  voor het eerst weer dezelfde als op tijdstip  $t$ .

$$\Rightarrow \text{De trillingstijd } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{b}}.$$

De trillingstijd wordt dus uitsluitend bepaald door de massa van het trillende deeltje en de bindingssterkte! De trillingstijd hangt dus met name *niet* van de amplitude af. Dit is een specifieke eigenschap van de harmonische trilling. Bij niet-harmonische trillingen is de periode altijd afhankelijk van de amplitude.

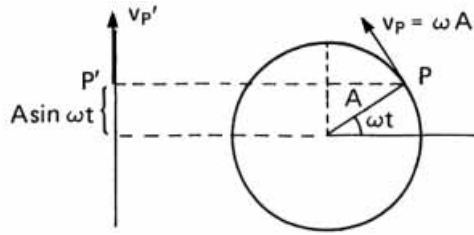
De frequentie  $\nu$  van de trilling is het aantal trillingen per seconde, het omgekeerde dus van de trillingstijd:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{b}{m}}.$$

Blijkbaar is de constante  $\omega = 2\pi \nu$ . Deze constante noemt men de *hoekfrequentie* van de trilling.

Deze benaming wordt ontraadseld zodra we de periodieke beweging zien als projectie op een rechte lijn van een eenparige cirkelbeweging met hoeksnelheid  $\omega$  (zie figuur 4.4).

Het ‘hulppunt’  $P$  voert een eenparige cirkelbeweging uit (op  $t = 0$  was  $P$  geheel rechts); zijn projectie  $P'$  voert dan een harmonische vibratie uit. De omlooptijd  $T$  van punt  $P$  is even groot als de trillingstijd van  $P'$ .



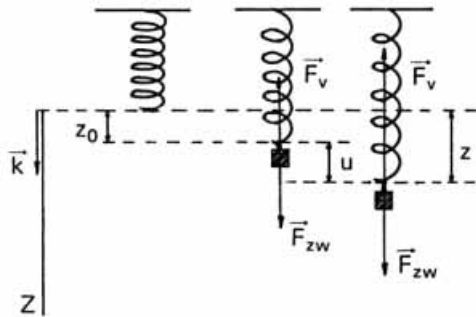
Figuur 4.4.

*Voorbeeld*

Een voorwerp hangt, in de toestand van rust, aan een schroefveer. Wordt de veer nog wat verder uitgerekt en dan losgelaten, dan gaat het voorwerp een trillende beweging uitvoeren.

We maken over de veer twee belangrijke veronderstellingen. In de eerste plaats gaan we er van uit dat de veerkracht recht evenredig is met de uitrekking van de veer (bindingssterkte  $b$ ). In de tweede plaats nemen we aan dat de massa van de veer mag worden verwaarloosd ten opzichte van de massa  $m$  van het voorwerp.

We gaan nu eerst bewijzen dat de trilling harmonisch is; daarna berekenen we de trillingstijd. In figuur 4.5 is de veer drie keer afgebeeld. Er is een coördinaat-as ( $Z$ -as) ingevoerd waarvan de eenheidsvector  $\vec{k}$  naar beneden wijst.



Figuur 4.5.

In situatie 1 is de veer geheel onbelast.

In situatie 2 hangt het voorwerp aan de veer, in rust. De uitrekking van de veer in deze situatie noemen we  $z_0$ .

In situatie 3 is de veer extra uitgerekt; de extra uitrekking  $u$  is tevens de *uitwijking* van het voorwerp uit zijn evenwichtsstand. De echte *uitrekking* van de veer is aangeduid met  $z$ . De veerkracht wordt in figuur 4.5 aangeduid met  $\vec{F}_v$ , de zwaartekracht met  $\vec{F}_{zw}$ .

In situatie 2 geldt:

$$\vec{F}_{zw} + \vec{F}_v = 0 \quad \Rightarrow \quad mg - bz_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_0 = \frac{mg}{b}.$$

In situatie 3 geldt:

$$\vec{F}_{zw} + \vec{F}_v = m\vec{a} \Rightarrow mg - bz = m\ddot{z}.$$

Deze differentiaalvergelijking lijkt nog niet helemaal op (4.1), maar dat is te verhelpen door te bedenken dat we als variabele liever de *uitwijking* van het voorwerp uit zijn evenwichtsstand hebben dan de *uitrekking* van de veer!

De samenhang tussen deze twee volgt uit figuur 4.5:

$$u = z - z_0 = z - \frac{mg}{b} \quad (\text{en dus: } \dot{u} = \dot{z} \text{ en } \ddot{u} = \ddot{z}).$$

Hiermee kunnen we de differentiaalvergelijking als volgt schrijven:

$$mg - b(u + \frac{mg}{b}) = m\ddot{u} \Rightarrow m\ddot{u} + bu = 0.$$

Dit nu is exact (4.1). We hebben dus te maken met een harmonische trilling.

De trillingstijd is weer  $T = 2\pi\sqrt{m/b}$ ; de zwaartekracht heeft blijkbaar geen enkele invloed op de trillingstijd (bedenk, dat bij afwezigheid van zwaartekracht  $z_0 = 0$  is en dezelfde trillingstijd uit de bus rolt).

### 4.3. Eenparige cirkelbeweging; centripetale kracht

De versnelling van een puntmassa die een eenparige cirkelbeweging uitvoert heeft de grootte  $\omega^2 R$  (waarin  $\omega$  = de hoeksnelheid en  $R$  = de straal van de cirkel) en is voortdurend naar het middelpunt gericht (zie § 2.5). Deze versnelling geven we nu aan als  $\vec{a}_{cp}$  (*centripetale* of middelpuntzoekende versnelling).

De dynamische bewegingsvergelijking is in dit geval dus:

$$m\vec{a}_{cp} = \vec{F}$$

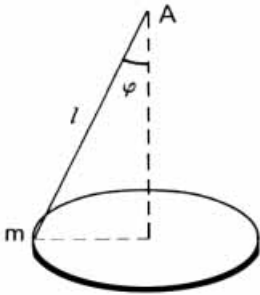
waarin  $\vec{F}$  = de vectorsom van alle op het deeltje werkende krachten.

Het produkt  $m\vec{a}_{cp}$  wordt vaak genoemd de *centripetale kracht* ( $\vec{F}_{cp}$ ). Het gebruik van deze term veroorzaakt helaas nogal eens misverstanden. Men komt er gauw toe, te menen dat de centripetale kracht één van de op het deeltje werkende krachten is. Dat is pertinent *onjuist*:  $\vec{F}_{cp}$  is de vectorsom van alle krachten die op het deeltje werken.

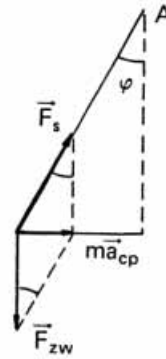
*Voorbeeld*; de konische slinger

Een puntmassa ( $m$ ) hangt aan een massaloze draad van lengte  $l$ . Het uiteinde A van de draad is vast. De puntmassa beschrijft een horizontale cirkelbaan; de draad maakt daarbij een constante hoek  $\varphi$  met de verticaal door A (probeer dit zelf met een steen aan een touwtje!); zie figuur 4.6.

De bewegende draad beschrijft het oppervlak van een rechte cirkelkegel (conus); vandaar de naam *konische slinger*.



Figuur 4.6.



Figuur 4.7.

*Gevraagd*

- Welke krachten werken op de puntmassa?
- Bereken de omlooptijd, uitgedrukt in  $g$ ,  $l$  en  $\varphi$ .

*Oplossing*

- Op de puntmassa werken de zwaartekracht  $\vec{F}_{zw}$  en de spankracht  $\vec{F}_s$  (meer dus niet! – de middelpuntzoekende kracht  $\vec{F}_{cp}$  is de *som* van deze twee krachten en mag dus niet als derde kracht worden genoemd!)
- De dynamische bewegingsvergelijking luidt:

$$m\vec{a}_{cp} = \vec{F}_{zw} + \vec{F}_s.$$

Deze relatie is in figuur 4.7 aanschouwelijk gemaakt.

In plaats van de vectorvergelijking door twee algebraïsche vergelijkingen te vervangen, één voor de horizontale en één voor de verticale componenten (welke methode overigens zeker tot het gewenste resultaat kan leiden) bekijken we figuur 4.7 nog eens goed. Over  $\vec{F}_s$  is niets gegeven; ook is er niets over  $\vec{F}_s$  gevraagd. Het lijkt dus verstandig, zo mogelijk  $\vec{F}_s$  buiten beschouwing te laten. Blijft over de samenhang tussen de vectoren  $\vec{F}_{zw}$  ( $= m\vec{g}$ ) en  $m\vec{a}_{cp}$ . Welnu, uit figuur 4.7 blijkt:

$$\begin{aligned} \frac{ma_{cp}}{mg} &= \operatorname{tg} \varphi. \text{ Hierin is } a_{cp} = \omega^2 R = \omega^2 l \sin \varphi. \\ \Rightarrow \frac{\omega^2 l \sin \varphi}{g} &= \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \varphi}} \end{aligned}$$

en dus:

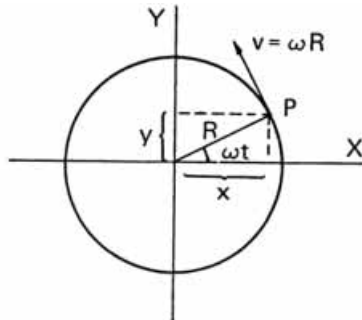
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \varphi}{g}}.$$

Aan de uitdrukking voor  $\omega$  zien we dat  $\varphi$  des te groter is naarmate de hoeksnelheid groter is. Voor zeer grote  $\omega$  nadert  $\varphi$  tot  $\frac{1}{2} \pi$ .

Interessanter is dat er blijkbaar een *minimale* waarde van  $\omega$  bestaat! Immers,  $\varphi > 0$  en dus is

$$\cos \varphi < 1 \quad \Rightarrow \quad \omega > \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

*Eenparige cirkelbeweging als superpositie van twee harmonische trillingen*  
P voert een eenparige cirkelbeweging uit (figuur 4.8; als tijdstip  $t = 0$  is het ogenblik gekozen waarop P zich helemaal rechts bevond).



Figuur 4.8.

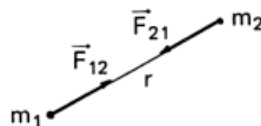
Uit de tekening blijkt:

$$x = R \cos(\omega t) \quad \text{en} \quad y = R \sin(\omega t).$$

De projectie van P op de Y-as voert dus een harmonische trilling uit (zie ook paragraaf 4.2) met amplitude R. Hetzelfde geldt voor de projectie op de X-as, zij het dat die in fase  $\frac{1}{2} \pi$  vóórloopt. We kunnen de eenparige cirkelbeweging dus opvatten als de superpositie van twee harmonische vibraties langs onderling loodrechte lijnen, waarbij de amplitudes en de trillingstijden gelijk zijn maar een faseverschil van  $\frac{1}{2} \pi$  aanwezig is.

#### 4.4. Gravitatiesticht, zwaartekracht en gewicht

Newton heeft uit zijn onderzoeken over de bewegingen van planeten afgeleid dat alle lichamen aantrekkende krachten op elkaar uitoefenen: de gravitatiestichten. Twee deeltjes waarvan de massa's  $m_1$  en  $m_2$  zijn trekken elkaar volgens de gravitatiewet van Newton aan met krachten waarvoor geldt (zie figuur 4.9):



Figuur 4.9.

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Hierin is  $r$  de onderlinge afstand tussen de deeltjes;  $G$  heet de gravitatieconstante. De waarde van  $G$  is bepaald (op  $6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ ) door Cavendish<sup>1</sup>; het bewuste experiment komt ter sprake in § 12.5.

Men kan de gravitatiewet voor zichzelf plausibel maken met behulp van de volgende overwegingen, waarbij gemakshalve is aangenomen dat de aarde, voor wat betreft zijn krachtwerking naar buiten, als een puntmassa mag worden beschouwd (de redelijkheid hiervan komt ter sprake in § 12.1).

Elk lichaam op het aardoppervlak ondervindt een aantrekkende kracht, door de aarde uitgeoefend op dat lichaam; deze kracht ( $m_1 \vec{g}$ ) is recht evenredig met de massa  $m_1$  van dat lichaam. Volgens de wet ‘actie = –reactie’ oefent het lichaam een evengrote kracht uit op de aarde. Er verandert principieel niets als we aarde en lichaam in dit verhaal van rol laten wisselen. Daarom ligt het voor de hand, dat de kracht ook evenredig is met de massa  $m_2$  van de aarde (al kunnen we dat niet verifiëren door de aarde te verwisselen voor één met een grotere of kleinere massa). Dus de gravitatiekrachten zijn evenredig met het produkt  $m_1 m_2$ . Nu nog de afstand: lichamen op aarde ondervinden een valversnelling  $\vec{g}$ . Volgens de gravitatiewet zouden ze op grotere afstand (bijvoorbeeld 60 keer de straal van de aardbol) een kleinere versnelling ondervinden (in het voorbeeld:  $60^2$  keer zo klein). Dat is te verifiëren aan de maan: deze staat ongeveer op  $60R$  van het middelpunt van de aarde (als  $R$  = de straal van de aardbol). Zijn omlooptijd om de aarde (de ‘siderische omlooptijd’, dit is de omlooptijd ten opzichte van een met de vaste sterren verbonden coördinatenstelsel) is 27,3 dag.  $R = 6,35 \cdot 10^6 \text{ m}$ .

Ga zelf na dat uit deze gegevens volgt voor de middelpuntzoekende versnelling die de maan ondervindt:  $a = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$ .

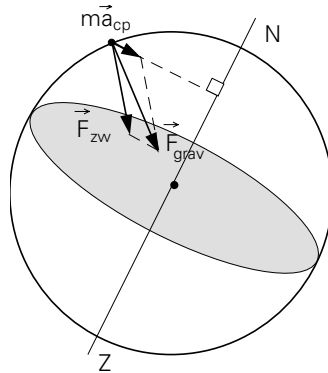
Dit is inderdaad ongeveer gelijk aan:  $9,8/60^2$ . Deze overwegingen hebben Newton geleid tot het formuleren van de gravitatiewet.

De *zwaartekracht*, door de aarde uitgeoefend op een lichaam dat zich aan het oppervlak van de aarde bevindt, is niet hetzelfde als de gravitatiekracht. Immers, de aarde draait om zijn as; elk lichaam op aarde heeft dus een middelpuntzoekende versnelling  $\vec{a}_{cp}$ .

De gravitatiekracht  $\vec{F}_{grav}$  is daarom te ontbinden in twee componenten (figuur 4.10); de ene component doet dienst als centripetale kracht ( $m\vec{a}_{cp}$ ); de andere noemt men de zwaartekracht. In de praktijk haalt men beide begrippen vaak door elkaar, omdat  $a_{cp}$  erg klein is in vergelijking met  $g$ : aan de evenaar (waar  $a_{cp}$  op zijn grootst is) is  $a_{cp} = 0,034 \text{ m/s}^2$  terwijl daar  $g = 9,78 \text{ m/s}^2$ .

---

<sup>1</sup> Cavendish, Henry, 1731–1810



Figuur 4.10.

Als het beschouwde lichaam zich in rust bevindt op het aardoppervlak, dan oefent dit een normale kracht  $\vec{F}_n$  op het lichaam uit waarvoor geldt:

$$\vec{F}_n = -\vec{F}_{zw}.$$

De bewegingsvergelijking voor dit op aarde rustende lichaam is:

$$m\vec{a}_{cp} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_n.$$

De waarde van  $g$  varieert over het aardoppervlak, niet alleen dankzij de draaiing van de aarde, maar ook door de afplating (de polen van de aarde bevinden zich iets dichter bij het middelpunt dan de evenaar). Men heeft  $g$  echter *gestandaardiseerd* op de waarde  $9,80665 \text{ m/s}^2$ .

Onder het *gewicht* van een lichaam verstaat men de kracht die het lichaam als gevolg van de zwaartekracht uitoefent op een ondersteunend vlak (of bijvoorbeeld op een touw waaraan het lichaam hangt).

#### Voorbeeld

Een lichaam (massa  $m$ ) ligt op een horizontale tafel (figuur 4.11). De aarde oefent de zwaartekracht  $m\vec{g}$  uit op het lichaam. Dat oefent op zijn beurt het gewicht  $\vec{G}$  uit op de tafel (deze kracht is in figuur 4.11 *niet* getekend). Als reactie daarop oefent het tafelblad de normale kracht  $\vec{F}_n$  uit op het lichaam.

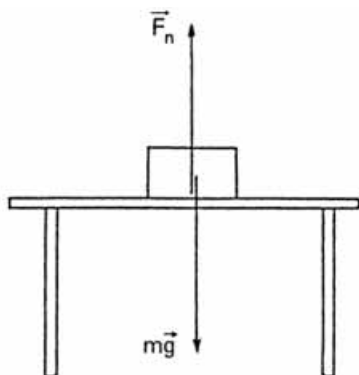
Als lichaam en tafel in rust zijn, geldt:

$$m\vec{g} + \vec{F}_n = \vec{0} \quad (\text{dynamische bewegingsvergelijking})$$

en:

$$\vec{F}_n = -\vec{G} \quad (\text{derde wet van Newton}).$$

Uit beide vergelijkingen volgt:  $\vec{G} = m\vec{g}$ . Het gewicht is dus eenzelfde vector als de zwaartekracht, maar een belangrijk verschil is dat de ene aangrijpt op het tafelblad en de andere op het lichaam.



Figuur 4.11.

Als lichaam en tafel een omhooggerichte versnelling  $\vec{a}$  bezitten (de tafel staat in een lift die versneld omhoog beweegt), is de bewegingsvergelijking:

$$m\vec{g} + \vec{F}_n = m\vec{a}.$$

Met de relatie  $\vec{F}_n = -\vec{G}$  (derde wet van Newton) volgt hieruit:  $\vec{G} = m(\vec{g} - \vec{a})$ . Het gewicht is nu dus *groter* dan de zwaartekracht; immers:  $G = m(g + a)$ . Dat komt doordat  $\vec{F}_n$  wel groter dan de zwaartekracht moet zijn, opdat een omhooggerichte versnelling resulteert.

Een vrij vallend lichaam is (als de luchtweerstand verwaarloosd mag worden of als de val plaats heeft in een vacuüm gezogen buis) *gewichtloos*, want er is geen ondersteunend vlak.

Voorwerpen in een vrij omlaag vallende lift zouden dan ook vrij ‘zweven’ in de lift. Ook voorwerpen die zich bevinden in een satelliet, die in een stationaire baan rond de aarde cirkelt, zijn gewichtloos. Er is geen andere kracht dan de zwaartekracht; de versnelling die daarvan het gevolg is doet dienst als middelpuntzoekende versnelling.

### *Opmerking*

Met voorbijgaan aan het verschil tussen zwaartekracht en gravitatiekracht kunnen we stellen dat een lichaam (met massa  $m$ ) op zeeniveau een zwaartekracht ondervindt waarvoor geldt:

$$\begin{cases} F_{zw} = mg \\ F_{zw} = G \frac{mm_A}{R^2} \end{cases}$$

waarin  $m_A$  = massa van de aarde en  $R$  = straal van de aardbol;  $G$  = de gravitatieconstante.

Hieruit blijkt:

$$Gm_A/R^2 = g \quad (\vec{g} = \text{valversnelling op zeeniveau}). \quad (4.2)$$

Als het lichaam zich op hoogte  $h$  boven zeeniveau bevindt, dan geldt:

$$F_{zw} = G \frac{mm_A}{(R+h)^2} = \frac{Gmm_A}{R^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} = mg \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}.$$

Voor kleine hoogte ( $h \ll R$ ) kunnen we in eerste orde benadering schrijven (zie ook § A.17):

$$F_{zw} \approx mg \left(1 - \frac{2h}{R}\right).$$

Voor  $h = 1$  km blijkt hieruit dat  $F_{zw}$  ca. 0,03% kleiner is dan op zeeniveau.

## 4.5. Zware massa en trage massa

Vroeger werd de massa van een lichaam gedefinieerd via zijn gewicht. Hoe verder een veer wordt uitgerekt door een daaraan hangend lichaam, des te groter is de massa van dat lichaam. Beperken we ons tot veren waarvoor geldt:  $\vec{F}_v = -b\vec{u}$  dan kunnen we concluderen dat de uitrekking van een veer recht evenredig is met de massa van het daaraan hangende lichaam. Als we hierop de definitie van massa baseren, spreken we van *zware massa*. Op het eerste gezicht is er geen verschil tussen de eerder gedefinieerde grootte (trage) massa en de zware massa van een lichaam. Immers: als het lichaam in rust aan een veer hangt, dan geldt:

$$\vec{F}_{zw} + \vec{F}_v = 0 \Rightarrow F_{zw} = F_v \Rightarrow mg = bu.$$

Omdat  $b$  een constante van de veer is en  $g$  een plaatselijke constante ligt de conclusie voor de hand dat inderdaad  $m \propto u$ .

Dat zware massa en trage massa identiek zijn is te danken aan het proefondervindelijk vastgestelde feit dat  $g$ , op één en dezelfde plaats op aarde, voor alle lichamen precies even groot is.

Als ooit geconstateerd zou worden dat  $g$  voor zware lichamen toch niet helemaal dezelfde is als voor lichte, dan zou er inderdaad verschil zijn tussen zware en trage massa. Tot nu toe is zo iets (binnen de grenzen van de meetnauwkeurigheid van onze experimenten) echter nooit aangetoond.

### Voorbeeld

Stel, men constateert het volgende. Aan een veer, waarvan de veerkracht recht evenredig is met de uitrekking, hangt men eerst een lichaam van 1,0 kg. Daarna een lichaam B van 2,0 kg. Men constateert nu dat de uitrekking, als B aan de veer hangt, 2,1 keer zo groot is als wanneer A er aan hangt. De conclusie is dan dat de trage massa van B weliswaar 2,0 kg is, maar dat de zware massa van B 2,1 kg is. Uit het voorgaande is inmiddels wel duidelijk dat dit voorbeeld geheel fictief is!

## 4.6. Wrijving

Laat men een tafeltennisballetje van een zekere hoogte vallen, dan duurt de val langer dan als men een even groot loden balletje van dezelfde hoogte laat vallen. De oorzaak ligt in de wrijving met de lucht. Deze is, voor kleine bolletjes en niet te grote snelheden, recht evenredig met de snelheid en met de middellijn van de bolletjes.

Een ander soort wrijving is de wrijving tussen twee oppervlakken. Het is deze soort wrijving, die we hier wat uitgebreider zullen behandelen.

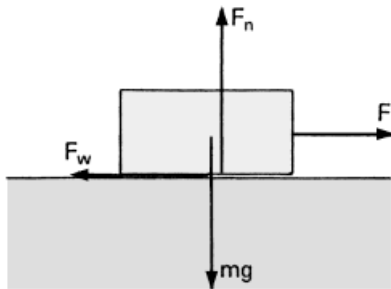
Een blok hout ligt op een horizontale ondergrond. Oefent men een horizontale kracht  $\vec{F}$  uit, dan komt het blok *niet* steeds in beweging. Men verklaart dit, door aan te nemen, dat de ondergrond op het lichaam een tegengesteld gerichte kracht (de wrijvingskracht  $\vec{F}_w$ ) uitoefent, die even groot is als  $\vec{F}$  (figuur 4.12). Maakt men  $\vec{F}$  steeds groter, dan zal op zeker ogenblik het blok wel gaan bewegen. Met andere woorden, er bestaat een maximale waarde van  $F_w$  (genaamd  $F_{w(\max)}$ ).

Proefondervindelijk is gebleken, dat deze maximale waarde van  $F_w$  recht evenredig is met de normale kracht:

$$F_{w(\max)} = \mu F_n \quad (\text{en dus: } F_w \leq \mu F_n)$$

waarin  $\mu$  een constante is, waarvan de grootte alleen afhangt van de ruwheid van beide oppervlakken (*niet* van hun afmetingen!). Men noemt deze constante  $\mu$  de *statische wrijvingscoëfficiënt* ( $\mu_{\text{stat}}$ ).

$\mu$  varieert van bijna 0 (ijshockey-puck op glad ijs) tot zeer hoge waarde (bijvoorbeeld als beide oppervlakken met vilt bekleed zijn).



Figuur 4.12.

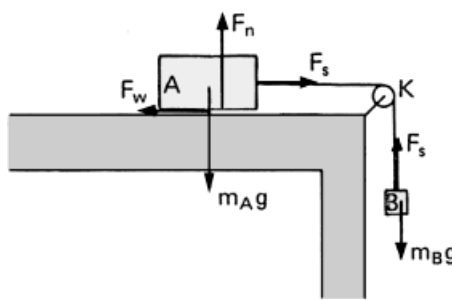
Sleept men het blok voort over de ondergrond, dan is er voortdurend een wrijvingskracht die de kracht  $\vec{F}$  tegenwerkt. Ook deze wrijvingskracht is (mits de snelheid van het blok niet al te groot wordt) gelijk aan  $\mu F_n$  waarin  $\mu$  echter een kleinere waarde heeft dan de zojuist genoemde statische wrijvingscoëfficiënt. De  $\mu$  waarmee wij nu te maken hebben, heet de *kinetische wrijvingscoëfficiënt* ( $\mu_{\text{kin}}$ ). In veel vraagstukken stelt men (gemakshalve)  $\mu_{\text{kin}}$  toch maar gelijk aan  $\mu_{\text{stat}}$ .

Een wiel dat voortrolt over de weg ondervindt, als resultaat van de vervorming die bij het rollen voortdurend plaats heeft, een remmende kracht, de *rolweerstand*. Ook in dit

geval kan men een wrijvingscoëfficiënt  $\mu$  invoeren, die echter erg klein is in vergelijking met  $\mu_{\text{stat}}$  (bijvoorbeeld  $\mu = 0,01$ ). Begrijpelijkerwijze streven bandenfabrikanten naar een zo klein mogelijke rolweerstand en een zo groot mogelijke  $\mu_{\text{stat}}$ !

### Proef

Het onderscheid tussen kinetische en statische wrijvingscoëfficiënt wordt o.a. gedemonstreerd bij de hier te bespreken proef. Blok A (figuur 4.13) rust op een horizontale tafel. Lichaam B hangt aan een koord dat via een katrol K aan A is vastgemaakt. B is zo groot dat A vrijwel op het punt staat in beweging te komen, dat wil zeggen  $F_w$  is bijna gelijk aan  $F_{w(\text{max})} = \mu_{\text{stat}} F_n$ .

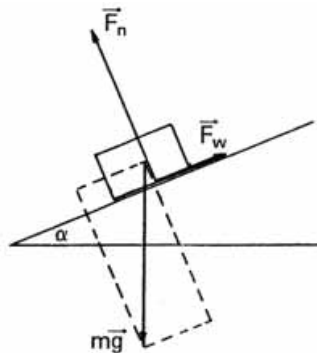


Figuur 4.13.

Geeft men nu een dreun op het tafelblad, dan komt A even los van de tafel (of althans:  $F_n$  wordt tijdelijk een stuk kleiner dan  $m_A g$ ) met het gevolg dat A en B nu in beweging komen. A en B *blijven* nu echter bewegen, ook nadat  $F_n$  weer gelijk aan  $m_A g$  is geworden. De wrijvingskracht die nu op A werkt ( $\mu_{\text{kin}} F_n$ ) is blijkbaar kleiner dan  $\mu_{\text{stat}} F_n$ .

### Toepassing

Een blok bevindt zich op een hellend vlak (figuur 4.14), hellingshoek  $\alpha$ . Wij gaan nu na, welke samenhang er is tussen  $\mu_{\text{stat}}$  en  $\alpha$ .



Figuur 4.14.

Daartoe gaan we als volgt te werk: als  $\alpha$  zo groot is dat het lichaam op het punt staat, te gaan glijden, is  $F_w = F_{w(\max)} = \mu_{\text{stat}} \cdot F_n$ .

Ook geldt:  $\vec{F}_w + \vec{F}_n + m\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow$

$$\begin{cases} F_w = mg \sin \alpha. \\ F_n = mg \cos \alpha. \end{cases}$$

Vullen we de gevonden uitdrukkingen voor  $F_w$  en  $F_n$  in de eerste formule in dan blijkt:

$$mg \sin \alpha = \mu_{\text{stat}} mg \cos \alpha$$

en dus:

$$\mu_{\text{stat}} = \text{tg } \alpha$$

(mits  $\alpha$  de hoek is waarbij het blok op het punt staat te gaan glijden).

## 4.7. Elastische krachten; veerkracht; spankracht

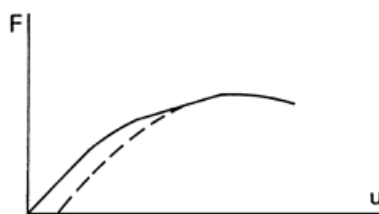
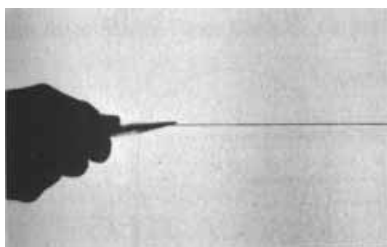
De wet van Hooke<sup>2</sup> luidt:

Kleine vervormingen zijn (bij benadering) recht evenredig met hun oorzaak.

Deze (experimenteel gevonden) wet houdt onder andere in dat, als een lichaam wordt vervormd door krachten, deze krachten recht evenredig zijn met de daardoor veroorzaakte vervorming, mits de vervorming klein is (dat wil zeggen de evenredigheid is des te beter naarmate de vervorming kleiner is).

### *Voorbeeld*

Een koperdraad wordt uitgerekt (zie foto). Het diagram van de uitgeoefende kracht tegen de uitrekking  $u$  ziet er ongeveer zo uit als in figuur 4.15.



'Draad strekken'.

Figuur 4.15.

Voor kleine  $u$  (dat wil zeggen  $u \ll$  de lengte van de draad) is  $F$  vrijwel recht evenredig met  $u$ , overeenkomstig de wet van Hooke.

Men kan zich voorstellen dat, in lengterichting, de afstand tussen de deeltjes waaruit de draad is opgebouwd, groter wordt. Als de krachten waarmee die

<sup>2</sup> Hooke, Robert, 1635–1703

deeltjes elkaar aantrekken nu recht evenredig zijn met de toename van de onderlinge afstand dan zal ook  $F$  evenredig zijn met  $u$ . Er is dus een *linear* verband tussen  $F$  en  $u$ .

Van *elastische* vervorming is sprake zolang de vervorming geheel ongedaan kan worden gemaakt door de oorzaak weg te nemen (in dit geval:  $u$  wordt weer nul als men  $F$  tot nul terugbrengt). Zolang het verband tussen  $F$  en  $u$  linear is, is de vervorming vanzelfsprekend elastisch. De elasticiteitsgrens ligt echter iets hoger dan de lineariteitsgrens: daar waar  $F$  niet meer evenredig is met  $u$ , kan de vervorming toch nog wel elastisch zijn.

Bij nog grotere waarden van  $F$  komen we in het gebied van de *plastische* vervorming. Als men de vervormende kracht  $F$  tot nul terugbrengt, houdt men een blijvende uitrekking over (stippellijn in figuur 4.15).

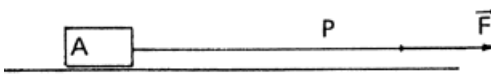
In het laatste stuk van het diagram neemt  $F$  zelfs af bij toenemende  $u$ : er komen nu zoveel deeltjes van opzij tussen de andere terecht dat er geen houden meer aan is. Op één plaats van de draad zal op zeker ogenblik de insnoering zodanig zijn dat de draad breekt.

Krachten die recht evenredig zijn met de daardoor veroorzaakte vervormingen worden wel *elastische* krachten genoemd.

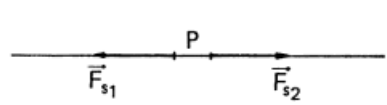
Schroefveren kunnen zo worden gemaakt dat, bij tamelijk grote uitrekking (in verhouding tot de lengte van de veer) de veerkracht  $\vec{F}_v$  recht evenredig is met de uitrekking  $\vec{u}$ . In dat geval geldt:  $\vec{F}_v = -b\vec{u}$ , waarin  $b$  de bindingssterkte is (zie paragraaf 4.2). Bij niet te grote *indrukking* blijft de formule geldig.

De *spankracht* ( $\vec{F}_s$ ) in een draad is al in twee voorbeelden ter sprake gekomen (§ 4.3 en 4.6). We zullen op dit begrip nu nader ingaan.

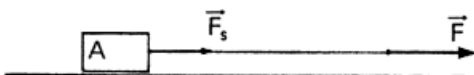
Eerst bekijken we de spankracht in een recht koord. Een blok A (massa  $m_A$ ) wordt over een gladde horizontale ondergrond voortgesleept (figuur 4.16a), doordat men een kracht  $\vec{F}$  op het vrije uiteinde van een aan A bevestigd koord uitoefent. Zowel het blok als het koord hebben daardoor een versnelling  $\vec{a}$  naar rechts. De spankracht  $\vec{F}_s$  in een willekeurig punt P van het koord zou men zowel naar links als naar rechts kunnen tekenen, alnaargelang men geïnteresseerd is in de spankracht, werkend op het rechterdeel, dan wel het linkerdeel van het koord. In elk geval zijn beide even groot.



Figuur 4.16a.



Figuur 4.16b.



Figuur 4.16c.

Dit beredeneren we aan de hand van figuur 4.16b waarin een klein stukje (lengte  $\Delta l$ ) van het koord is afgebeeld evenals de beide spankrachten die aangrijpen op de uiteinden van dit stukje koord. De massa van het stukje koord is willekeurig klein (omdat  $\Delta l$  willekeurig klein is). Omdat  $\vec{a}$  niet oneindig groot is, kan men stellen (voor  $\Delta l \rightarrow 0$ ):

$$\vec{F}_{s1} + \vec{F}_{s2} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{s1} = -\vec{F}_{s2}.$$

Als de massa van het koord  $m_k$  is, luidt de bewegingsvergelijking voor het geheel:

$$\vec{F} = (m_A + m_k)\vec{a}.$$

Het zal duidelijk zijn dat voor de in figuur 4.16c getekende spankracht  $\vec{F}_s$ , door het koord uitgeoefend op A, geldt:

$$\vec{F}_s = m_A \vec{a}.$$

Deze  $\vec{F}_s$  is dus kleiner dan  $\vec{F}$ .

Meestal is de massa van het koord te verwaarlozen in vergelijking met de massa van het voortgetrokken lichaam. In dat geval is  $\vec{F}_s$  in figuur 4.16c gelijk aan  $\vec{F}$ .

We beschouwen nu de spankracht in een gebogen koord, aan de hand van het in figuur 4.17a getekende voorbeeld. S is een vast opgestelde, verticale schijf (straal R). De rand van S is volkomen glad.

Om die rand is een dun koord geslagen dat aan zijn uiteinden de lichamen A en B draagt met massa's  $m_A$  resp.  $m_B$  waarbij  $m_A > m_B$ .

A beweegt eenparig versneld omlaag (versnelling  $\vec{a}$ ) en B omhoog (versnelling  $-\vec{a}$ ). De massa van het koord stellen we nul (vergeleken met de massa's van A en B).

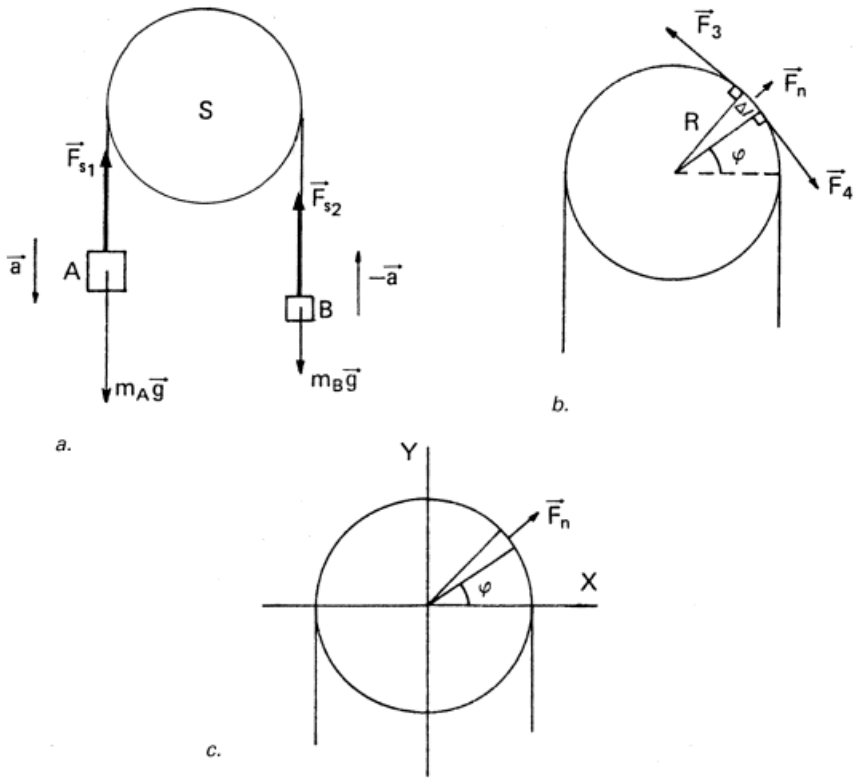
Het zal duidelijk zijn dat de spankracht in het linker afhangede deel van het koord overal even groot is;  $\vec{F}_{s1}$  is de kracht, door het koord uitgeoefend op A. Ook in het rechter afhangede deel van het koord is de spankracht overal even groot;  $\vec{F}_{s2}$  is de kracht, door het koord uitgeoefend op B.

Maar ook in het gebogen deel van de draad is de spankracht overal even groot. Om dat te bewijzen, beschouwen we een klein stukje  $\Delta l$  van de draad (figuur 4.17b). De spankracht aan de uiteinden van het stukje geven we aan met  $\vec{F}_3$  en  $\vec{F}_4$ . Voorts werkt op het stukje koord nog een normale kracht  $\vec{F}_n$ . De plaats van het stukje geven we aan door middel van hoek  $\varphi$ ; de hoek  $\Delta l/R$  noemen we  $\Delta\varphi$ .

Omdat de massa van het stukje nul is, geldt:

$$\vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_n = \vec{0}$$

en dus voor de tangentiële componenten (evenwijdig aan de raaklijn in het midden van het stukje koord):



Figuur 4.17.

$$F_3 \cos \frac{1}{2} \Delta\varphi - F_4 \cos \frac{1}{2} \Delta\varphi = 0 \Rightarrow F_3 = F_4.$$

De spankracht in de draad is dus overal even groot. Zowel  $F_3$  als  $F_4$  alsook  $F_{s1}$  en  $F_{s2}$  kan men daarom aangeven met  $F_s$ .

Voor de radiale componenten geldt:

$$F_s \sin \frac{1}{2} \Delta\varphi + F_s \sin \frac{1}{2} \Delta\varphi - F_n = 0$$

ofwel (omdat  $\sin(\Delta\varphi/2) \approx \Delta\varphi/2$ ):

$$2F_s \cdot \frac{1}{2} \Delta\varphi - F_n \approx 0 \Rightarrow F_n \approx F_s \Delta\varphi.$$

**N.B. Het 'ongeveer gelijk'-teken  $\approx$  wordt steeds gebruikt om ingewikkelde schrijfwijzen met limieten te omzeilen.**

Zo wordt met  $F_n \approx F_s \cdot \Delta\varphi$  bedoeld:

$$\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{F_n}{\Delta\varphi} = F_s.$$

Ander voorbeeld:

$$\sin \frac{1}{2} \Delta\varphi \approx \frac{1}{2} \Delta\varphi \text{ betekent: } \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{1}{2} \Delta\varphi)}{\frac{1}{2} \Delta\varphi} = 1.$$

$F_n$  is dus blijkbaar evenredig met  $\Delta l$  (mits  $\Delta l \ll R$ ) en *onafhankelijk* van  $\varphi$ !

Tenslotte bekijken we de vectorsom van alle normale krachten. Zie figuur 4.17c.

Voor de horizontale component van  $F_n$  geldt:

$$F_{nx} \approx F_n \cos\varphi \approx F_s \cdot \Delta\varphi \cdot \cos\varphi.$$

Voor de verticale component geldt:

$$F_{ny} \approx F_n \sin\varphi \approx F_s \cdot \Delta\varphi \cdot \sin\varphi.$$

De som van alle x-componenten is (zie § A9):

$$\int_0^\pi F_s \cos \varphi \, d\varphi = 0.$$

De som van alle y-componenten is:

$$\int_0^\pi F_s \sin \varphi \, d\varphi = 2F_s.$$

Volgens de derde wet van Newton is de grootte van de (naar beneden gerichte) kracht, die het koord uitoefent op S, dus ook:  $2F_s$ .

**Overzicht van hoofdstuk 4**

Dynamische bewegingsvergelijking:  $\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$ .

Kinematische bewegingsvergelijking:  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ .

Harmonische trilling:  $\vec{F} = -bu \vec{i}$

$$u = A \cos(\omega t + \beta) \text{ waarin } \omega = \sqrt{b/m}$$

$$T = 2\pi \sqrt{m/b}; \quad v = 1/T.$$

Eenparige cirkelbeweging: Som van alle krachten =  $m\vec{a}_{cp}$ .

Gravitatiekracht:  $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ .

Zwaartekracht: 
$$\begin{cases} \vec{F}_{zw} = \vec{F}_{grav} - m\vec{a}_{cp} \\ \vec{F}_{zw} \approx \vec{F}_{grav} \end{cases}$$

Wrijving:  $F_w \leq \mu_{stat} F_n$  als lichaam in rust is.

$F_w = \mu_{kin} F_n$  als lichaam beweegt over ondergrond.

Wet van Hooke: Kleine vervorming  $\propto$  oorzaak.