

# 12

## Het omgekeerd kwadratisch centrale krachtveld

### 12.1. Veldsterkte en potentiaal in een omgekeerd kwadratisch centraal krachtveld

Het begrip *centraal krachtveld* is in § 5.6 geïntroduceerd. Kenmerkend voor een centraal krachtveld is dat voor de kracht  $\vec{F}$ , werkend op een deeltje dat zich in dat veld bevindt, geldt:  $\vec{F} = f(r)\vec{e}_r$ , waarin  $\vec{e}_r = \vec{r}/r$  ( $\vec{r}$  is de plaatsvector van het deeltje ten opzichte van het krachtcentrum).

Als de grootte van de kracht omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand tot het krachtcentrum, spreekt men van een *omgekeerd kwadratisch* centraal krachtveld. We behandelen hier twee van dergelijke velden.

**a. Het gravitatieveld van een puntmassa.** Het gravitatieveld van een puntmassa  $m$  is als volgt gekenmerkt: plaatst men een puntmassa  $m^*$  in dat veld (plaatsvector  $\vec{r}$  ten opzichte van het krachtcentrum  $O$  waar zich  $m$  bevindt), dan ondervindt deze een centrale kracht waarbij  $f(r) = -Gmm^*/r^2$  (zie § 4.4).

Voor de kracht op  $m^*$  kunnen we schrijven:

$$\vec{F} = m^*\vec{I} \quad (12.1)$$

waarin

$$\vec{I} = -\frac{Gm}{r^2}\vec{e}_r. \quad (12.2)$$

*Met andere woorden:* De kracht die een puntmassa  $m^*$  in de nabijheid van een andere puntmassa  $m$  ondervindt, kan worden opgevat als een wisselwerking tussen  $m^*$  en een vectorveld  $\vec{I}(\vec{r})$  dat, volgens (12.2), uitsluitend door  $m$  wordt bepaald. De vector  $\vec{I}$  noemt men de *gravitationele veldsterkte* of *veld-intensiteit* in het veld van de puntmassa  $m$ .

Uit (12.1) volgt de definitie van gravitationele veldsterkte:

$$\vec{I} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{F}}{m^*}. \quad (12.3)$$

Een fraaiere definitie is:

$$\vec{I} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{m^* \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{m^*}.$$

Hoewel deze definitie mathematisch op hetzelfde neerkomt als (12.3), is hij fraaier uit de volgende overweging: het veld wordt in elk punt door een bepaalde grootte gekenmerkt, onafhankelijk van de aanwezigheid van een puntmassa op die plaats. Brengt men een deeltje ( $m^*$ ) aan in genoemd punt, dan ondervindt dit deeltje een kracht. Maar het deeltje kan zelf ook een kracht uitoefenen op een derde puntmassa die in de nabijheid van  $m$  en  $m^*$  wordt geplaatst. Voor die derde puntmassa is daardoor het 'oorspronkelijke veld' gestoord. Die storing wordt infinitesimaal klein indien  $m^*$  infinitesimaal klein is. Het veld wordt dus beschouwd als een eigenschap van een bepaalde ruimte, die ook aanwezig is als er geen puntmassa  $m^*$  is die die eigenschap, dus het bestaan van het veld, aantoont.

Uit (12.3) volgt dat de S.I.-eenheid van gravitationele veldsterkte is:  $\text{N/kg} = \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ;  $\vec{I}$  is dan ook gelijk aan de versnelling die  $m^*$  ondervindt in het gravitatieveld van  $m$ .

De potentiële energie van  $m^*$  in het gravitatieveld van  $m$  is als volgt te berekenen: Volgens (5.9) is

$$\frac{dE_p}{dr} = -f(r) = \frac{Gmm^*}{r^2} \Rightarrow E_p = -\frac{Gmm^*}{r} + \text{constante.}$$

Onder de *potentiaal*  $V$  op afstand  $r$  van  $m$  verstaat men de potentiële energie per kilogram:

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E_p}{m^*}. \quad (12.4)$$

Potentiaal is, evenals veldsterkte, een echt veldbegrip, dus onafhankelijk van de puntmassa  $m^*$ . We schrijven daarom liever:

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{m^* \rightarrow 0} \frac{E_p}{m^*}.$$

Uit (12.4) volgt:  $V = -\frac{Gm}{r} + \text{constante.}$

**b. Het statisch elektrische veld van een puntlading.** Het statisch elektrische veld van een puntlading  $Q$  is als volgt gekenmerkt: Plaatst men een puntlading  $q$  in dat veld (plaatsvector  $\vec{r}$  ten opzichte van het krachtcentrum  $O$  waar zich  $Q$  bevindt), dan ondervindt deze, volgens de wet van Coulomb, in vacuo een centrale kracht waarbij

$$f(r) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Voor de kracht op  $q$  kunnen we schrijven:  $\vec{F} = q\vec{E}$  waarin  $\vec{E}$  de *elektrische veldsterkte* wordt genoemd in het veld van de puntlading  $Q$ . Blijkbaar is

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$$

*Met andere woorden:* De kracht die een puntlading  $q$  in de nabijheid van een andere puntlading  $Q$  ondervindt, kan worden opgevat als een wisselwerking tussen  $q$  en een vectorveld  $\vec{E}(\vec{r})$  dat uitsluitend door  $Q$  wordt bepaald.

In plaats van  $\vec{E} = \vec{F}/q$  schrijven we liever:

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}.$$

Behalve het bij gravitatie reeds gebezigde argument hebben we hiervoor nog een reden: bij elektrostatische proeven wordt de puntlading benaderd door een klein metalen bolletje dat een elektrische lading  $Q$  bevat. Plaatst men nu een bolletje met lading  $q$  er dichtbij, dan gaat de lading  $Q$  verschuiven over het eerstgenoemde bolletje (elektrische *influentie*), waardoor het elektrische veld van  $Q$  er anders uitziet dan bij afwezigheid van  $q$ .

De eenheid van elektrische veldsterkte is blijkbaar:  $N/C$ .

De potentiële energie van  $q$  in het elektrische veld van  $Q$  is als volgt te berekenen: Volgens (5.9) is

$$\frac{dE_p}{dr} = -f(r) = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow E_p = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{constante}.$$

Onder de *potentiaal*  $V$  op afstand  $r$  van  $Q$  verstaat men de potentiële energie per coulomb:

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E_p}{q} \quad (\text{liever: } V \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{E_p}{q}).$$

In het veld van puntlading  $Q$  is de potentiaal dus:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{constante}.$$

### *Algemeen*

Omgekeerd kwadratische centrale krachtvelden zijn vectorvelden waarin voor de veldsterkte  $\vec{I}$  (resp.  $\vec{E}$ ) geldt:

$$\vec{I} = \frac{c}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{waarin de constante } c \text{ zowel positief als negatief kan zijn.}$$

Deze velden kunnen ook worden beschreven als scalaire velden, door middel van de potentiaal  $V$ , waarvoor geldt:

$$V = \frac{c}{r} + \text{constante}.$$

De samenhang tussen beide velden vinden we m.b.v. de relatie (5.7):  $-dE_p = \vec{F} \cdot d\vec{r}$  en

dus ook:  $\vec{F} = -\nabla E_p$ . Delen we deze vergelijkingen door  $m^*$  respectievelijk door  $q$ , dan krijgen we:

$$-dV = \vec{I} \cdot d\vec{r} \quad (12.5)$$

en dus ook:

$$\vec{I} = -\nabla V. \quad (12.6)$$

## 12.2. De stelling van Gauss voor het omgekeerd kwadratische veld

De gravitatiewet van Newton is oorspronkelijk opgesteld om de krachtwerking tussen zon en planeten te beschrijven. Het is dan ook interessant, na te gaan of men, vanuit de abstractie van de gravitatiewet voor puntmassa's, kan bewijzen dat deze wet ook van toepassing is op twee bolsymmetrisch verdeelde massa's, waarbij  $r$  de afstand tussen de middelpunten is.

Iets dergelijks geldt voor de wet van Coulomb: kan men, vanuit de abstractie van deze wet voor puntladingen, bewijzen dat hij ook geldt voor bolsymmetrisch verdeelde ladingen?

Deze bewijzen kunnen inderdaad worden geleverd, indien men de bolvormige massa's beschouwt als een verzameling van vele puntmassa's (resp. de bolvormige lading beschouwt als een verzameling van vele puntladingen) en dan maar fiks aan het integreren slaat!

Een veel fraaier bewijs kan men echter geven met behulp van de *stelling van Gauss* voor het omgekeerd kwadratische veld. Deze stelling legt een verband tussen enerzijds de *flux* (zie § A13) door een gesloten oppervlak  $S$  van een krachtveld dat bestaat uit een superpositie van  $N$  omgekeerd kwadratische centrale krachtvelden, en anderzijds de constanten  $c_1, c_2, \dots, c_N$ .

We beschouwen eerst het geval dat zich binnen een gesloten (denkbeeldig) oppervlak  $S$  één krachtcentrum  $O$  bevindt waarbij in een punt met plaatsvector  $\vec{r}$  ten opzichte van dat krachtcentrum geldt:

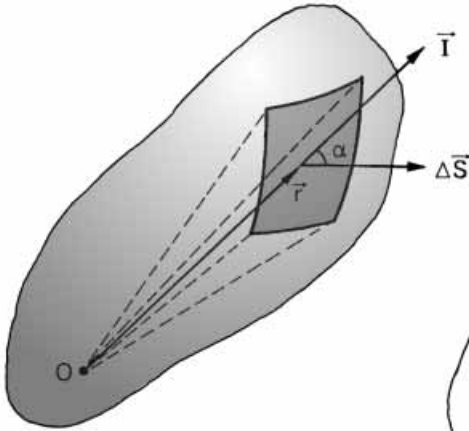
$$\vec{I} = \frac{c}{r^2} \vec{e}_r.$$

Voor de flux van  $\vec{I}$  door het gesloten oppervlak  $S$  vinden we:

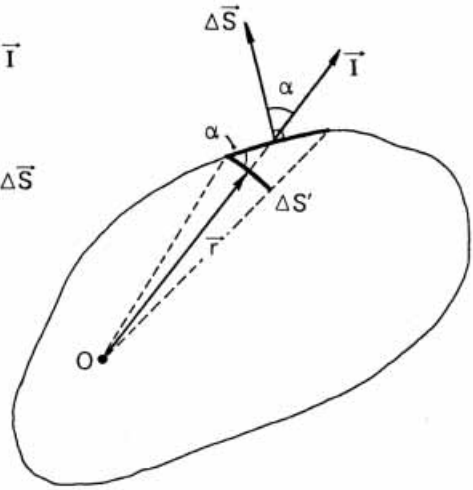
$$\Phi = \oiint \vec{I} \cdot d\vec{S} = c \oiint \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{S}}{r^2}. \quad (a)$$

In figuur 12.1a is een klein stukje  $\Delta S$  van het gesloten oppervlak aangegeven. Het bij benadering vrijwel platte stukje oppervlak wordt gesymboliseerd door de vector  $d\vec{S}$  loodrecht op het oppervlak. In figuur 12.1b is een stukje oppervlak  $\Delta S$  in doorsnede aangegeven;  $\Delta S'$  is de projectie van  $\Delta S$  op een boloppervlak met straal  $r$  en

middelpunt O. Uit figuur 12.1b blijkt:



Figuur 12.1a.



Figuur 12.1b.

$$\frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{dS \cos \alpha}{r^2} = \frac{dS'}{r^2}.$$

De verhouding  $dS'/r^2$  is een *ruimtehoek* (zie § A18) die we aanduiden als  $d\Omega$ . Voor (a) kunnen we dus schrijven:

$$\Phi = c \int d\Omega$$

waarin  $\int d\Omega$  de totale ruimtehoek is waaronder men vanuit O het gesloten oppervlak (van binnen) kan aanschouwen, kortom:  $4\pi$  steradianen.

Hiermee wordt (a):

$$\Phi = 4\pi c. \tag{b)}$$

De *plaats* van het krachtcentrum heeft in dit verhaal geen enkele rol gespeeld (behoudens de voorwaarde dat O *binnen* het gesloten oppervlak S moet liggen). Stel nu dat het gesloten oppervlak N krachtcentra omvat die elk een omgekeerd kwadratisch veld

leveren. In dat geval is de veldintensiteit  $\vec{I} = \sum_1^N \vec{I}_i$ .

Uit (b) volgt nu voor de flux van het gezamenlijke krachtveld door het gesloten oppervlak S:

$$\Phi = \oiint \vec{I}_1 \cdot d\vec{S} + \oiint \vec{I}_2 \cdot d\vec{S} + \dots + \oiint \vec{I}_N \cdot d\vec{S} = 4\pi(c_1 + c_2 + \dots + c_N)$$

ofwel:

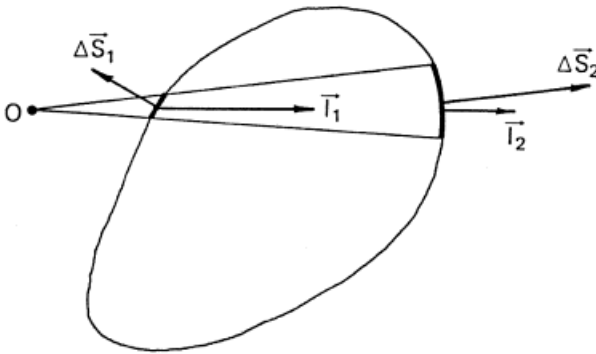
$$\oiint \vec{I} \cdot d\vec{S} = 4\pi \sum_1^N c_i. \quad (12.7)$$

(12.7) staat bekend als de *stelling van Gauss voor het omgekeerd kwadratische veld*.

N.B. Een krachtcentrum O dat *buiten* S ligt geeft *geen* bijdrage aan de flux.

Want (zie figuur 12.2):

$$\vec{I}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \vec{I}_2 \cdot d\vec{S}_2 = c(-d\Omega + d\Omega) = 0.$$



Figuur 12.2.

### *Toepassingen*

#### **a. Voor het statisch elektrische veld.**

Voor het veld van een puntlading  $Q$  in vacuo geldt:

$$c = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

zodat (12.7) wordt:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_1^N Q_i = \frac{Q_{\text{omvat}}}{\epsilon_0}.$$

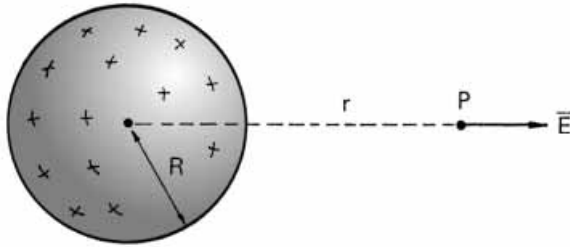
Hierin is  $Q_{\text{omvat}}$  de totale door  $S$  omvatte lading.

We beschouwen nu een bol met straal  $R$  die een lading  $Q$  bevat welke gelijkmatig over het oppervlak is verdeeld. Gevraagd wordt de grootte van de veldsterkte  $\vec{E}$  in punt  $P$  (zie figuur 12.3).

Uit de symmetrie volgt dat  $E$  in elk punt op afstand  $r$  van het middelpunt even groot is. De verzameling van al die punten is een bol oppervlak met straal  $r$ .

Uit (12.7) volgt nu:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \text{ en dus: } E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ (mits } r > R),$$



Figuur 12.3.

net als bij een puntlading  $Q$ . Voor  $r < R$  is  $E = 0$ .

Voor  $r = R$  is er formeel een discontinuïteit in  $E$ . In werkelijkheid heeft de oppervlaktelading een (zeer geringe) eindige dikte, zodat  $E$  bij  $r = R$  niet plotseling van nul naar de waarde  $Q/4\pi\epsilon_0 R^2$  springt.

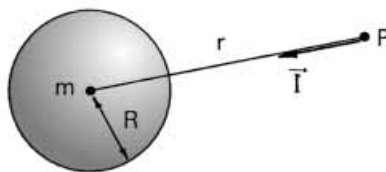
### b. Voor het gravitatieveld.

In het gravitatieveld van een puntmassa  $m$  is  $c = -Gm$  zodat (12.7) wordt:

$$\oiint \vec{I} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \sum_1^N m_i = -4\pi G m_{\text{omvat}}.$$

Hierin is  $m_{\text{omvat}}$  de totale door het oppervlak  $S$  omvatte massa.

We beschouwen nu een bol met straal  $R$  en massa  $m$  welke bolsymmetrisch is verdeeld (dat wil zeggen: de massadichtheid is uitsluitend afhankelijk van de afstand tot het middelpunt). Gevraagd wordt de grootte van de veldsterkte  $\vec{I}$  in punt  $P$  (zie figuur 12.4). Uit de symmetrie volgt dat  $I$  in elk punt op afstand  $r$  van het middelpunt even groot is. De verzameling van al die punten is een bol-oppervlak met straal  $r$ .



Figuur 12.4.

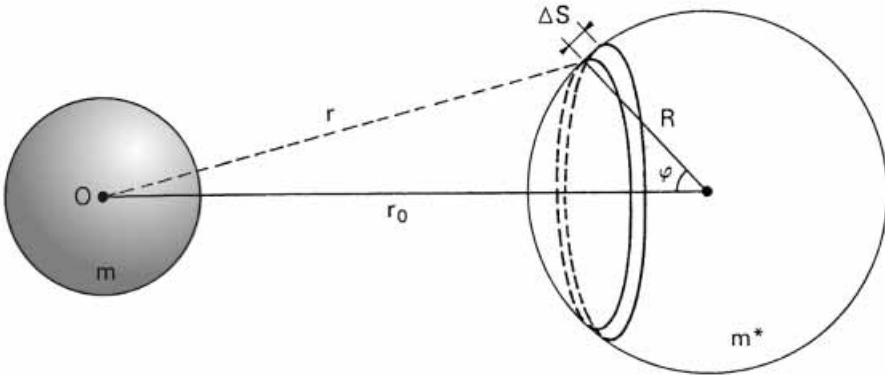
Uit (12.7) volgt nu:

$$-I \cdot 4\pi r^2 = -4\pi Gm \quad \text{en dus: } I = \frac{Gm}{r^2} \quad (\text{mits } r > R).$$

We hebben dus bewezen dat  $\vec{I}$  buiten een bolsymmetrisch verdeelde massa  $m$  dezelfde is als die van een puntmassa  $m$  die zich op de plaats van het middelpunt  $O$  van de bolsymmetrisch verdeelde massa zou bevinden.

Nu willen we ook nog bewijzen dat een tweede bolsymmetrisch verdeelde massa  $m^*$  waarvan het middelpunt zich op afstand  $r_0$  van het middelpunt  $O$  van  $m$  bevindt, in

het veld van  $m$  dezelfde kracht ondervindt als een puntmassa  $m^*$  die zich op afstand  $r_0$  van  $O$  zou bevinden. Equivalent hiermee, maar gemakkelijker uitvoerbaar, is het bewijs dat de potentiële energie van de bolvormige massa  $m^*$  in het veld van  $m$  even groot is als die van een puntmassa  $m^*$  op afstand  $r_0$  van  $O$ . Het is al voldoende als we dit bewijzen voor een dunwandige *bolschil*, aangezien men de bolsymmetrisch verdeelde massa altijd opgebouwd kan denken uit een groot aantal concentrische dunwandige bolschillen.



*Figuur 12.5.*

In figuur 12.5 beschouwen we een dunwandige bolschil met massa  $m^*$  in het gravitatieveld van een bolsymmetrisch verdeelde massa  $m$ .

De massa van een infinitesimaal stukje oppervlak  $dS$  noemen we  $dm^*$ ; zijn potentiële energie in het veld van  $m$  is:  $V dm^*$ , waarin  $V = -Gm/r$  (zie paragraaf 12.1; de integratieconstante is nul gekozen).

De verzameling van stukjes  $dS$  die op éénzelfde afstand  $r$  van  $O$  liggen, is een ringvormig deel van het oppervlak. De straal van de ring is  $R \sin \varphi$ ; de breedte is  $R d\varphi$ . De oppervlakte van de ring is derhalve  $2\pi R \sin \varphi \cdot R d\varphi$ ; zijn massa is dus:

$$\frac{2\pi R^2 \sin \varphi d\varphi}{4\pi R^2} m^* = \frac{1}{2} m^* \sin \varphi d\varphi.$$

De potentiële energie van de gehele bolschil in het veld van  $m$  is dus:

$$\int_0^\pi V \cdot \frac{1}{2} m^* \sin \varphi d\varphi = -\frac{1}{2} Gmm^* \int_0^\pi \frac{\sin \varphi d\varphi}{r}. \quad (\text{a})$$

Nu is, volgens de cosinus-regel (zie § A3):

$$r^2 = r_0^2 + R^2 - 2r_0R \cos \varphi \Rightarrow 2r dr = 2r_0R \sin \varphi d\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \varphi \, d\varphi}{r} = \frac{dr}{r_0 R}. \quad (\text{b})$$

Uit (a) en (b) volgt:

$$E_p = -\frac{1}{2} \frac{Gmm^*}{r_0 R} [r]_{r_0-R}^{r_0+R} = -\frac{Gmm^*}{r_0}$$

dus inderdaad hetzelfde als de potentiële energie van een puntmassa  $m^*$  op afstand  $r_0$  van O.

### 12.3. Het gravitatieveld van de aarde

Als we mogen aannemen dat de massa van de aarde bolsymmetrisch is verdeeld (hetgeen een redelijke benadering is), zal  $\vec{I}$  altijd naar het middelpunt zijn gericht terwijl voor  $r \geq R$  geldt:

$$I \text{ (en dus ook de valversnelling } g) = \frac{Gm}{r^2}.$$

Voor  $r < R$  volgt uit de stelling van Gauss:

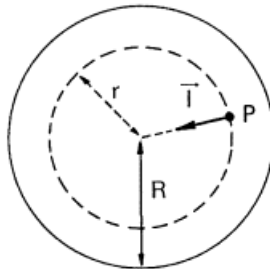
$$-I \cdot 4\pi r^2 = -4\pi G m_{\text{omvat}}. \quad (\text{a})$$

Interessant is dat de massa tussen de bol-oppervlakken met stralen  $r$  en  $R$  (zie figuur 12.6) blijkbaar geen enkele invloed heeft op de grootte van  $\vec{I}$  in punt P!

Als de aarde een *homogene* bol zou zijn (hetgeen beslist geen goed model is!) dan zou  $m_{\text{omvat}}$  gelijk zijn aan  $(r^3/R^3) m_A$  als  $m_A$  de massa van de aarde voorstelt.

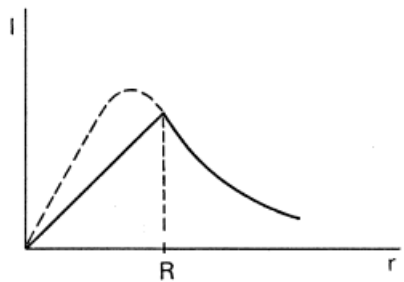
Uit (a) volgt dan:

$$I = \frac{Gm_A}{R^3} r \quad \text{voor } r < R.$$



Figuur 12.6.

In figuur 12.7 is het diagram van de grootte van de gravitationele veldsterkte tegen  $r$  geschetst voor een homogene bol met straal  $R$ .



Figuur 12.7.

In werkelijkheid verloopt  $I$  voor  $r < R$  ruwweg zoals de stippellijn aangeeft. De massadichtheid van de aarde is bij het oppervlak namelijk relatief klein (een groot deel bestaat uit water met massadichtheid  $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ) terwijl de massadichtheid in de kern het grootst is (de gemiddelde massadichtheid van de aarde is gemakkelijk te berekenen uit massa en straal; dit levert op:  $5,5 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ). Als gevolg hiervan neemt de waarde van  $I$  (dus ook van de valversnelling  $g$ ), als men van het aardoppervlak afdaalt, eerst nog toe (in (a) neemt  $m_{\text{omvat}}$  namelijk minder snel af dan  $r^2$ ).

## 12.4. De eigenenergie van een homogene bol

Voor de *potentiaal* geldt, volgens (12.5):  $-dV = \vec{I} \cdot d\vec{r}$ .

*Buiten* een homogene bol met massa  $m$  en straal  $R$  geldt dus:

$$-dV = -\frac{Gm}{r^2} dr. \text{ Hieruit volgt:}$$

$$V = -\frac{Gm}{r} + C; \text{ de constante } C \text{ kiezen we nul.}$$

*Conclusie*

$$V = -\frac{Gm}{r} \quad \text{voor } r \geq R.$$

*Binnen* de bol geldt:

$$-dV = -\frac{Gm}{R^3} r dr \quad (\text{zie } \S 12.3)$$

$$\Rightarrow V = \frac{Gm}{2R^3} r^2 + C_2 \quad \text{voor } r \leq R.$$

De constante  $C_2$  volgt uit de overweging dat  $V$  continu is voor  $r = R$ :

$$-\frac{Gm}{R} = \frac{Gm}{2R^3} \cdot R^2 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{3Gm}{2R}.$$

Voor de potentiaal *binnen* de bol geldt dus:

$$V = -\frac{Gm}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

In § 7.3 is het begrip *mutuele potentiële energie* ter sprake gekomen. Als we een lichaam beschouwen als een verzameling van  $N$  puntmassa's  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , dan is het duidelijk dat dit lichaam mutuele potentiële energie bezit ten gevolge van de gravitatiekrachten die de puntmassa's op elkaar uitoefenen. Voor deze energie geldt volgens (7.7), als we de mutuele potentiële energie gelijk aan nul kiezen voor het geval dat alle onderlinge afstanden oneindig groot zijn:

$$E_{pmut} = -\frac{1}{2} \sum_1^N \sum_1^N \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}}.$$

Nu is  $-m_i \sum_{j=1}^N \frac{Gm_j}{r_{ij}}$  de potentiële energie van deeltje  $i$  ten gevolge van de gravitationele wisselwerking met alle andere deeltjes. Voor deze potentiële energie kunnen we volgens (12.4) echter ook schrijven:  $m_i V_i$  als  $V_i$  de potentiaal ter plaatse van deeltje  $i$  voorstelt. Voor  $E_{pmut}$  is dus te schrijven:

$$E_{pmut} = \frac{1}{2} \sum_1^N m_i V_i.$$

Voor  $N \rightarrow \infty$  schrijven we nu symbolisch:

$$E_{pmut} = \frac{1}{2} \int V \, dm.$$

Hierin is  $dm$  een infinitesimaal stukje van de massa;  $V$  is de potentiaal ter plaatse van  $dm$ .

De grootte van de gravitationele energie (ook wel 'eigenenergie' genoemd) van een lichaam is pas opzienbarend als het om heel grote lichamen gaat, met name *sterren*. Aangezien deze zonder uitzondering vrijwel bolvormig zijn, interesseert ons vooral de eigenenergie van bolvormige lichamen. Hoewel men de sterren zeker niet voor homogene bollen mag aanzien, geeft een berekening voor een homogene bol (massa  $m$  en straal  $R$ ) een goed inzicht in de orde van grootte.

In de eerste helft van deze paragraaf is berekend dat

$$V = -\frac{Gm}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \text{ voor } r \leq R.$$

Omdat  $V$  slechts van  $r$  afhangt, kunnen we voor  $dm$  direct een complete bolschil met straal  $r$  en dikte  $dr$  kiezen. Het volume van zo'n bolschil is  $4\pi r^2 dr$ . Het volume van de bol is  $\frac{4}{3}\pi R^3$ . De massa van de bolschil is dus:

$$\frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi R^3} m = \frac{3r^2 dr}{R^3} m.$$

Hiermee kunnen we nu de eigenenergie van de homogene bol berekenen:

$$\begin{aligned}
 E_{\text{Pmut}} &= \frac{1}{2} \int V \, dm = -\frac{1}{2} \int \frac{Gm}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot \frac{3r^2 dr}{R^3} m = \\
 &= -\frac{3Gm^2}{4R^4} \int_0^R \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) r^2 dr = -0,6 \frac{Gm^2}{R}.
 \end{aligned}$$

Van de aarde is  $m = 5,98 \cdot 10^{24}$  kg en  $R \approx 6,36 \cdot 10^6$  m; de gravitatieconstante  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>kg<sup>-2</sup>. Voor een homogeen onderstelde aarde is de eigenenergie dus  $-2,2 \cdot 10^{32}$  J. Van de zon is  $m = 1,99 \cdot 10^{30}$  kg;  $R = 6,96 \cdot 10^8$  m. Daaruit volgt voor de eigenenergie van de zon ongeveer  $-2,3 \cdot 10^{41}$  J. Omdat de eigenenergie omgekeerd evenredig is met de straal, neemt deze energie af (dat wil zeggen: wordt nog negatiever dan hij al was) als het lichaam inkrimpt. Men stelt zich voor dat een ster zijn ‘leven’ begint als een ijle gaswolk die, door de gravitatiekrachten, zich samen-trekt. De gravitatie-energie neemt hierdoor af zodat de kinetische energie van de deeltjes toeneemt. Hierdoor stijgt de temperatuur zo zeer dat kernfusie-processen zich gaan afspelen. De ster kan zeer lange tijd stabiel van omvang blijven tot er geen waterstof meer over is voor de kernfusie. De temperatuur daalt nu, waarna de materie verder samenkrimpt; een oude ster eindigt dan ook in het algemeen als ‘witte dwerg’: wit, omdat de ster altijd nog genoeg energie uitstraalt die is vrijgekomen dankzij het inkrimpen; ‘dwarf’ om voor de hand liggende redenen! Er zijn witte dwergen bekend die een ongeveer even grote massa hebben als de zon maar waarvan de middellijn ca. 10 keer zo klein is.

#### *De klassieke straal van het elektron*

Het klassieke model van een elektron is een bolletje (straal  $R$ ) dat geheel bestaat uit ruimtelijk gelijkmatig verdeelde negatieve lading (in totaal:  $-e$ ). De mutuele potentiële energie ten gevolge van de Coulomb-wisselwerking tussen de deeltjes waarin men zich het elektron verdeeld kan denken (!) is, berekend op precies dezelfde manier als de eigenenergie van een homogene bol (we behoeven alleen maar  $-e$  voor  $m$  en  $e/4\pi\epsilon_0$  voor  $Gm$  te substitueren!):

$$E_{\text{Pmut}} = 0,6 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Volgens de relativiteitstheorie heeft een deeltje met massa  $m$  een energie  $mc^2$  waarin  $c$  = de lichtsnelheid in vacuo.

Als we er van uit gaan dat de energie van een elektron uitsluitend te danken is aan de Coulomb-wisselwerking, kunnen we beweren dat:

$$mc^2 = 0,6 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Hieruit volgt  $R$  ('de klassieke straal van het elektron'), na invulling van  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg,  $c = 3,0 \cdot 10^8$  m/s,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C en  $1/4\pi\epsilon_0 = 9,0 \cdot 10^9$  Nm<sup>2</sup>C<sup>-2</sup>:  
 $R = 1,7 \cdot 10^{-15}$  m.

Dit resultaat lijkt (gezien de speculatieve uitgangspunten) zo slecht nog niet;  $1,7 \cdot 10^{-15}$  m is immers veel kleiner dan de straal van een atoom (orde van grootte:  $10^{-10}$  m).

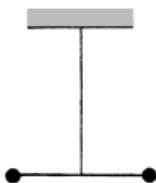
## 12.5. Meting van de gravitatieconstante

In principe zou men voor de meting van de gravitatieconstante  $G$  als volgt te werk kunnen gaan. Stel twee homogene bolvormige lichamen waarvan de massa's bekend zijn op enige afstand van elkaar op en meet de kracht die het ene lichaam op het andere uitoefent.

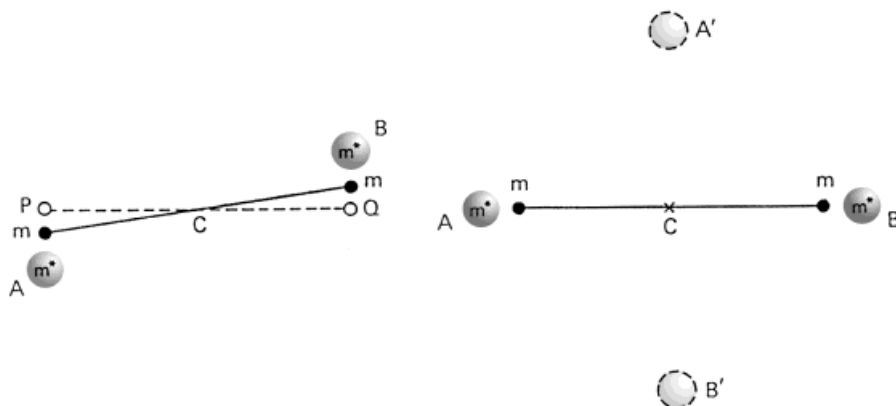
Er treden hierbij op het experimentele vlak twee grote moeilijkheden op. In de eerste plaats is de kracht waar het hier om gaat uiterst klein (twee loden bollen van 10 cm middellijn, geplaatst op 15 cm afstand van middelpunt tot middelpunt, zouden elkaar aantrekken met een kracht van  $1,0 \cdot 10^{-7}$  N); in de tweede plaats is het bijzonder lastig te vermijden dat de bollen een geringe elektrische lading aan hun oppervlak dragen waardoor een Coulombkracht optreedt die al gauw groter is dan de te meten kracht!

De eerste meting van  $G$  is in 1798 verricht door *Cavendish* (zie § 4.4) met behulp van een *statische torsiebalans* (zie figuur 12.8a). In figuur 12.8b is de projectie van het gebruikte instrument op een horizontaal vlak geschetst. Een horizontale staaf bevat aan de uiteinden twee loden bollen waarvan de massa's  $m$  zijn. De staaf is in zijn midden  $C$  aan een zeer dunne draad opgehangen;  $PQ$  is de evenwichtsstand van de staaf. Worden twee bollen  $A$  en  $B$  waarvan de massa's  $m^*$  zijn in de getekende stand geplaatst, dan worden de massa's  $m$  aangetrokken en wordt de ophangdraad getordeerd (verwronen). Het beste gebruikt men voor de massa's  $A$  en  $B$  dunwandige glazen bollen die men kan laten vollopen met kwik; op die manier wordt elk zuchtje wind of tocht vermeden. Uit de meting van het torsiemoment (zie § 14.6) kan  $G$  worden gevonden.

De methode kan nog worden verbeterd door het instrument als torsieslinger (*dynamische torsiebalans*) in te richten. De bollen  $A$  en  $B$  worden dan geplaatst in de in figuur 12.8c geschetste situatie. Men meet de slingertijd van de torsieslinger. In aanwezigheid van  $A$  en  $B$  wordt het teruggedrijvende moment van het torsiekoppel vergroot door het koppelmoment van de gravitatiekrachten van  $A$  en  $B$ . Plaatst men de massa's  $m^*$  in de standen  $A'$  en  $B'$ , dan wordt daardoor het teruggedrijvende moment verkleind. Uit de betrekking tussen de slingertijden kan  $G$  weer worden bepaald. Met deze methode is door Heyl en Chranowski in 1942 met een nauwkeurigheid van 1 promille in het laboratorium van het National Bureau of Standards in de USA de waarde gevonden:



Figuur 12.8a.



Figuur 12.8b.

Figuur 12.8c.

$$G = 6,670 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}.$$

*De massa van de aarde.* Men zegt wel dat Cavendish ‘de aarde heeft gewogen’. Nu we  $G$  kennen, kunnen we immers direct de massa van de aarde vinden door middel van de relatie (4.2):

$$\frac{Gm_A}{R^2} = g \quad \text{en dus:} \quad m_A = \frac{gR^2}{G}.$$

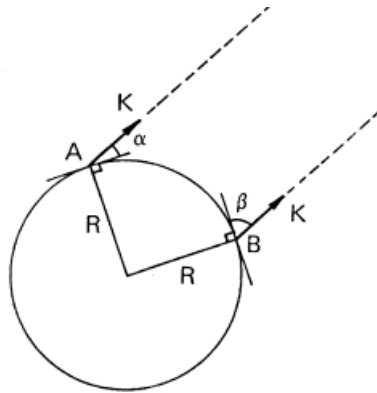
$g$  is, zoals bekend, ongeveer  $9,8 \text{ m s}^{-2}$ .  $R$  is langs geodetische weg bepaald.

Het principe van deze meting (reeds bekend bij de oude Egyptenaren) is in figuur 12.9 uitgebeeld: men richt, op twee verschillende plaatsen  $A$  en  $B$  op aarde, tegelijkertijd een kijker  $K$  op een ver verwijderde (‘vaste’) ster en meet de hoeken  $\alpha$  en  $\beta$ .

Als de onderlinge afstand tussen de beide plaatsen bekend is (de lengte van de *boog*  $AB$  is dus bekend) dan kan men hierna  $R$  berekenen.

Met  $g \approx 9,8 \text{ m s}^{-2}$ ,  $R \approx 6,36 \cdot 10^6 \text{ m}$  en  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$  vinden we:

$$m_A = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$



Figuur 12.9.

## 12.6. De stelling van Gauss in differentiële vorm; de vergelijkingen van Poisson en Laplace

De stelling van Gauss luidt voor gravitatievelden:  $\oint \vec{I} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{\text{omvat}}$  (zie paragraaf 12.2, toepassing b). Als de door het gesloten oppervlak  $S$  omvatte massa continu is verdeeld, geldt:

$$m_{\text{omvat}} = \int_{\tau} \rho \, d\tau$$

waarin  $\rho$  = de massadichtheid en  $\tau$  = het volume dat door  $S$  wordt omsloten (het afwijkende symbool  $\tau$  is hier gebruikt omdat het symbool  $V$  verwarring kan scheppen; het wordt immers ook voor het begrip potentiaal gebruikt).

De massadichtheid in een homogeen lichaam is gedefinieerd als de verhouding  $m/\tau$  waarin  $m$  de massa van het lichaam is en  $\tau$  zijn volume. In een in-homogeen lichaam moet men voorzichtiger te werk gaan: de massadichtheid in een punt  $P$  van zo'n lichaam wordt gedefinieerd als  $\Delta m/\Delta \tau$  waarin  $\Delta \tau$  een klein volumetje is rondom  $P$  en  $\Delta m$  de massa in dat volumetje.  $\Delta \tau$  kiezen we enerzijds zo klein dat het op macroscopische schaal als een punt mag worden beschouwd, maar anderzijds toch nog zo groot dat er zich zeker nog enige honderden moleculen dan wel ionen in bevinden. De schrijfwijze  $\int_{\tau} \rho \, d\tau$  is dan ook een symbool voor  $\sum_N \rho_i \Delta \tau_i$  waarbij  $\tau$  in een groot ( $N$ ) aantal kleine stukjes  $\Delta \tau_i$  is verdeeld, zonder dat een oneindig fijne verdeling kan worden nagestreefd. In een *continuum-model* van de materie bestaat dit probleem uiteraard niet (zie ook § A.9).

Volgens de *divergentie-stelling* (zie § A.14) kan  $\oint \vec{I} \cdot d\vec{S}$  worden vervangen door  $\int_{\tau} (\text{div } \vec{I}) \, d\tau$ . De stelling van Gauss kan dus in dit geval als volgt worden opgeschreven:

$$\int_{\tau} (\operatorname{div} \vec{I}) \, d\tau = -4\pi G \int_{\tau} \rho \, d\tau.$$

Omdat deze relatie geldig is voor elk willekeurig volume  $\tau$ , moet voldaan zijn aan:

$$\operatorname{div} \vec{I} = -4\pi G\rho. \quad (12.8)$$

Deze vergelijking noemt men de *stelling van Gauss in differentiële vorm* voor gravitatie.

Een soortgelijke redenering voor het elektrische geval levert op:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (12.9)$$

waarin  $\rho$  de *ladingsdichtheid* is van continu verdeelde ruimtelading. Een voorbeeld van ruimtelading is: de elektronen en ionen in een gasontladingsbuis zoals een TL. Ook nu weer is er geen sprake van een echt continuüm;  $\rho$  in een punt P is dan ook gedefinieerd als  $\Delta Q/\Delta\tau$  waarin  $\Delta\tau$  een klein volumetje is rondom P en  $\Delta Q$  de lading in dat volumetje.

Combineren we (12.8) resp. (12.9) met (12.6):  $\vec{I} = -\operatorname{grad} V$ , dan krijgen we voor het gravitationele geval:

$$\nabla^2 V = 4\pi G\rho \quad (12.10)$$

en voor het elektrische geval:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (12.11)$$

Voor het symbool  $\nabla^2$  (de *operator van Laplace*) zie § A16.

De vergelijkingen (12.10) en (12.11) worden de *vergelijking van Poisson*<sup>1</sup> genoemd. Als  $\rho = 0$  (dus als in het beschouwde punt geen massa resp. lading aanwezig is) luiden beide vergelijkingen identiek:  $\nabla^2 V = 0$ .

Voor deze vergelijking is een aparte naam in gebruik: de *vergelijking van Laplace*<sup>2</sup>.

De vergelijkingen van Poisson en Laplace zijn voor theoretische onderzoeken in de natuurkunde van zeer grote betekenis. Immers als men in een conserverend veld de potentiaal kent als functie van de coördinaten, kunnen daar de eigenschappen van het veld direct uit worden afgeleid. De vergelijkingen van Poisson en Laplace geven de differentiaalvergelijkingen voor de potentiaal. In beginsel kan het veld dus bepaald worden door deze vergelijkingen op te lossen. Hoewel een volledige oplossing van de vergelijkingen slechts in bepaalde gevallen mogelijk is, is de waarde van de vergelijkingen er niet minder om.

<sup>1</sup> Poisson, Siméon, 1781–1840

<sup>2</sup> Laplace, Pierre Simon de, 1749–1827

## 12.7. De wetten van Kepler

In 1609 heeft Kepler<sup>3</sup> drie wetten geformuleerd waarmee de bewegingen van de planeten in het gravitatieveld van de zon worden beschreven. Deze wetten zijn geheel gebaseerd op de tot dan toe bekende waarnemingen over de stand van de planeten aan het hemelgewelf op verschillende data en tijdstippen. Pas later heeft Newton, op grond van de wetten van Kepler, zijn gravitatiewet geformuleerd.

De *eerste wet* luidt:

De baan van een hemellichaam dat beweegt in het gravitatieveld van de zon (planeten en kometen dus) is een kegelsnede (dat is een ellips, cirkel, parabool of hyperbool; zie § A19).

*Tweede wet:*

De plaatsvector van een planeet of een komeet doorsnijdt in gelijke tijden gelijke perken, mits als oorsprong is gekozen het middelpunt van de zon.

*Derde wet:*

De kwadraten van de omlooptijden van de planeten verhouden zich tot elkaar als de derde machten van de lange assen van hun ellipsvormige banen.

De tweede wet volgt uit behoudswet 3 en is al in § 5.10 afgeleid.

De eerste wet zal uit de gravitatiewet van Newton worden bewezen (hoewel dat historisch gezien de verkeerde volgorde is!) in § 12.8, de derde wet in § 12.9.

De wetten van Kepler zijn steeds toepasbaar in situaties waarin een bolvormige massa zich beweegt in het gravitatieveld van een andere, veel grotere bolvormige massa; zij zijn dus onder andere van toepassing op manen die bewegen in het gravitatieveld van een planeet.

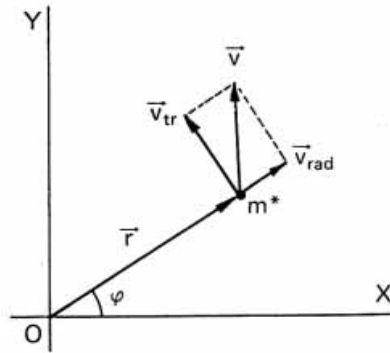
## 12.8. De baanvergelijking

We zullen nu bewijzen dat de baan van een puntmassa  $m^*$  die *niet*-rechtlijnig beweegt in een omgekeerd kwadratisch centraal krachtveld altijd een kegelsnede is. We onderscheiden daarbij afstotende en aantrekkende krachten.

**a. Afstotende kracht.** Op de puntmassa werkt een kracht  $\vec{F} = (c/r^2)\vec{e}_r$  waarin  $c$  een positieve constante is (*niet te verwarren met het symbool  $c$  in § 12.1*). Voorbeeld: de kracht op een alpha-deeltje dat beweegt in het elektrische veld van een zware kern.

De vergelijkingen van de kegelsneden zijn het meest overzichtelijk als men poolcoördinaten gebruikt. Onder verwijzing naar § 1.4 (vooral figuur 1.4) en § 2.3 zij er hier nog eens aan herinnerd dat (zie figuur 12.10) de plaats van de puntmassa is vastgelegd door de coördinaten  $r$  en  $\varphi$  (omdat de kegelsneden vlakke figuren zijn, zijn twee coördinaten voldoende) terwijl zijn snelheid  $\vec{v}$  is ontbonden in de radiale component  $\vec{v}_{\text{rad}} = \dot{r}\vec{e}_r$ , en de transversale component  $\vec{v}_{\text{tr}} = r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$  (zie § 2.3).

<sup>3</sup> Kepler, Johannes, 1571–1630



Figuur 12.10.

De dynamische bewegingsvergelijking

$$m^* \ddot{\vec{r}} = \frac{c}{r^2} \vec{e}_r \quad (12.12)$$

leidt tot twee differentiaalvergelijkingen van de tweede orde:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{c}{m^* r^2} \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0. \end{cases}$$

(Zie formule (2.6) in § 2.3.)

Uit deze twee vergelijkingen kan men de tijd elimineren en zodoende de baanvergelijking  $r = r(\varphi)$  vinden; dit is echter een moeizaam karwei. Daarom zullen we trachten, de baanvergelijking te vinden door behoudswet 1 en behoudswet 3 te combineren. Deze methode biedt meer perspectief omdat we per slot van rekening nu van twee *eerste orde* differentiaalvergelijkingen uitgaan.

*Behoudswet 1:*

$$\frac{1}{2} m^* v^2 + U = E = \text{constant.} \quad (a)$$

Hierin is  $U$  de potentiële energie en  $E$  de totale mechanische energie (de reden waarom we de potentiële energie niet gewoon  $E_p$  noemen is, dat het symbool voor de potentiële energie in de nu volgende afleiding nog vele keren opduikt; het is dan handiger, een symbool zonder index te hanteren).

*Behoudswet 3:*

$$\vec{r} \times m^* \vec{v} = \vec{L} = \overrightarrow{\text{constant.}} \quad (b)$$

Hieruit volgt in de eerste plaats dat de baan een *vlakke* baan is (immers,  $\vec{L}$  staat loodrecht op  $\vec{r}$  en  $\vec{v}$ ) en voorts dat  $L = \text{constant}$ .

$$(a) \Rightarrow \frac{1}{2} m^*(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U = E = \text{constant.} \quad (a')$$

$$(b) \Rightarrow r^2 m^* \dot{\varphi} = L = \text{constant.} \quad (b')$$

In (a') is  $U = c/r$  (als we  $U = 0$  kiezen voor  $r \rightarrow \infty$ ).

We zullen nu trachten,  $t$  te elimineren uit (a') en (b') teneinde zo aan de baanvergelijking te komen. Daarbij vervangen we  $r$  door  $c/U$  (bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen vervangt men vaak een variabele door zijn omgekeerde):

$$(b') \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L}{m^* r^2} = \frac{L U^2}{m^* c^2}$$

$$\text{en voorts: } \dot{r} = \frac{d}{dt} \left( \frac{c}{U} \right) = -\frac{c}{U^2} \dot{U} = -\frac{c}{U^2} \frac{dU}{d\varphi} \dot{\varphi} = -\frac{L}{m^* c} \frac{dU}{d\varphi}$$

$$\text{zodat (a')} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{L^2}{m^* c^2} \left\{ \left( \frac{dU}{d\varphi} \right)^2 + U^2 \right\} + U = E. \quad (a'')$$

Deze differentiaalvergelijking is gemakkelijk op te lossen indien we eerst differentiëren naar  $\varphi$  (het rechterlid wordt dan immers nul):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{L^2}{m^* c^2} \left\{ 2 \frac{dU}{d\varphi} \frac{d^2 U}{d\varphi^2} + 2U \frac{dU}{d\varphi} \right\} + \frac{dU}{d\varphi} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d^2 U}{d\varphi^2} + U = -\frac{m^* c^2}{L^2}. \end{aligned}$$

De oplossing van deze differentiaalvergelijking is:

$$U = -\frac{m^* c^2}{L^2} + A \cos(\varphi + B). \quad (c)$$

De constanten  $A$  en  $B$  kunnen negatief, nul of positief zijn. Op zeker ogenblik is  $r$  minimaal. Bij deze waarde  $r_0$  van  $r$  kiezen we  $\varphi = 0$ . De potentiële energie is dan maximaal;  $A \cos(\varphi + B)$  dus ook. We stellen daarom  $B = 0$ ; de constante  $A$  is dan positief.

Uitdrukking (c) wordt in dit geval:

$$\frac{c}{r} = -\frac{m^* c^2}{L^2} + A \cos \varphi \quad \text{waarin } A = \frac{c}{r_0} + \frac{m^* c^2}{L^2}.$$

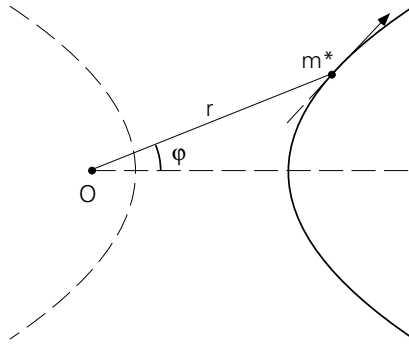
Hieruit volgt voor  $r$  als functie van  $\varphi$ :

$$r = \frac{p}{-1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad \text{waarin } p = \frac{L^2}{m^* c} \quad (\text{dus } p > 0)$$

en 
$$\varepsilon = \frac{L^2 A}{m^* c^2} = 1 + \frac{L^2}{r_0 m^* c} \quad (\text{dus } \varepsilon > 1).$$

De vorm van de baan is een *hyperbool* (zie § A19).

In figuur 12.11 is de baan getekend voor het geval dat  $\varepsilon = 1,25$ . Verderop in de tekst wordt nader ingegaan op enige aspecten van figuur 12.11.



Figuur 12.11. Afstotende kracht

**b. Aantrekkende kracht.** Op de puntmassa werkt een kracht  $\vec{F} = (-c/r^2)\vec{e}_r$  waarin  $c$  weer een *positieve* constante is.

Voorbeeld: planeet of komeet in het gravitatieveld van de zon (in dat geval is  $c = Gm^*m_z$ ) of een elektron in het elektrische veld van een atoomkern.

Een soortgelijke redenering als bij de afstotende kracht kan worden gebruikt. Alleen dienen wij er rekening mee te houden dat nu geldt:

$$m^* \ddot{\vec{r}} = \frac{-c}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{en} \quad U = \frac{-c}{r}.$$

Het resultaat, aangeduid als formule (c), is echter hetzelfde!

Een eenparige cirkelbeweging behoort nu tot de mogelijkheden. In dat geval is  $r$  constant en dus:  $A = 0$ .

In alle andere gevallen bestaat weer een minimale waarde  $r_0$  van  $r$ . Bij deze waarde van  $r$  kiezen we weer  $\varphi = 0$ . De potentiële energie is dan *minimaal*;  $A \cos(\varphi + B)$  dus ook.

Nu is het handiger, voor  $B$  de waarde  $\pi$  te kiezen;  $A$  is dan weer positief. Uitdrukking (c) wordt dan:

$$\frac{-c}{r} = \frac{-m^* c^2}{L^2} - A \cos \varphi \quad \text{waarin} \quad A = \frac{c}{r_0} - \frac{m^* c^2}{L^2}.$$

Hieruit volgt voor  $r$  als functie van  $\varphi$ :

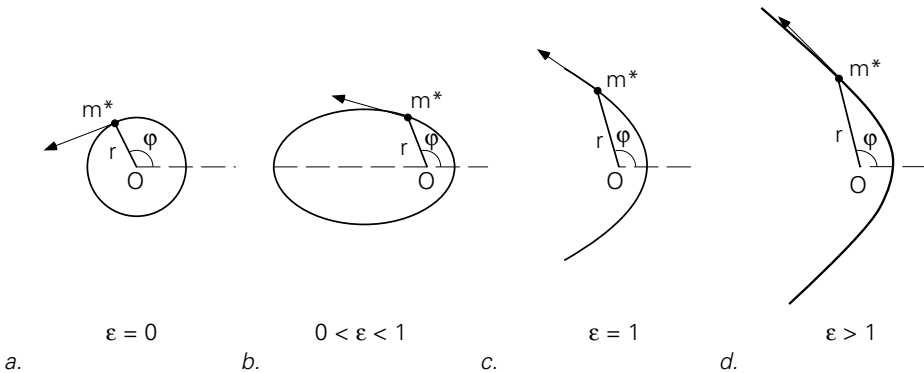
$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad \text{waarin weer} \quad p = \frac{L^2}{m^* c} \quad (\text{dus } p > 0)$$

en  $\epsilon = \frac{L^2 A}{m^* c^2}$  (dus  $\epsilon \geq 0$ ).

Het eindpunt van de vector  $\vec{r}$  beschrijft:

- een cirkel indien  $\epsilon = 0$  (figuur 12.12a).
- een ellips indien  $0 < \epsilon < 1$  (figuur 12.12b).
- een parabool als  $\epsilon = 1$  (figuur 12.12c).
- een hyperbool als  $\epsilon > 1$  (figuur 12.12d).

Voor nadere uitleg van de kegelsneden zij verwezen naar § A19.



Figuur 12.12.

De samenhang van de baanparameters  $p$  en  $\epsilon$  met de energie  $E$  en het baanimpulsmoment  $L$ :

$p$  is een afkorting van  $\frac{L^2}{m^* c}$   $\Rightarrow L = \sqrt{p m^* c}$ .

Om de totale mechanische energie  $E$  te berekenen, vullen we in (a''):

$$U = \frac{c}{r} = \frac{c}{p} (-1 + \epsilon \cos \varphi) \quad \text{resp.} \quad U = -\frac{c}{r} = -\frac{c}{p} (-1 + \epsilon \cos \varphi).$$

Resultaat (in beide gevallen!):

$$E = -\frac{1}{2} \frac{c}{p} (1 - \epsilon^2).$$

Bij afstotende kracht is  $E$  altijd positief (want  $\epsilon > 1$ ).

Bij aantrekkende kracht is  $E$  positief in het geval dat  $\epsilon > 1$  dus als  $m^*$  een hyperbolische baan beschrijft; de totale mechanische energie is 0 als  $m^*$  een parabolische baan beschrijft;  $E < 0$  bij een cirkel- of ellipsbaan.

*Opmerking*

In een *ellips* geldt voor de *lange as* (zie § A 19):

$$2a = \frac{p}{1 + \varepsilon} + \frac{p}{1 - \varepsilon} = \frac{2p}{1 - \varepsilon^2} \Rightarrow E = \frac{-c}{2a};$$

de totale mechanische energie hangt bij een ellipsbaan dus uitsluitend af van de lengte van de lange as!

Een overzicht van de belangrijkste eigenschappen van banen in een omgekeerd kwadratisch krachtveld staat in tabel 12.1.

We zullen nu nog enige speciale aandacht schenken aan de *afstotende* centrale kracht. De baan is altijd een hyperbool. Bij figuur 12.11 (zie terug) behoort de baanvergelijking:

$$r = \frac{1,125}{-1 + 1,25 \cos \varphi} \text{ (cm)}.$$

De coördinaten  $r$  en  $\varphi$  van een willekeurig punt van de baan zijn in de figuur aangegeven. De streepjeslijn stelt de tweede tak van de hyperbool voor (die uiteraard niet deel uitmaakt van de baan!).

In figuur 12.13 zijn de asymptoten van de hyperbool aangegeven alsook de kleinste afstand  $r_0$  tot het krachtcentrum  $O$ , de *botsingsparameter*  $q$  (dat is de afstand van  $O$  tot de asymptoten) en de *verstrooiingshoek*  $\psi$ . De maximale waarde van  $\varphi$  is die waarvoor  $r \rightarrow \infty$ .

$$\Rightarrow \varphi_{\max} = \arccos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Uit figuur 12.13 blijkt:  $\psi = \pi - 2\varphi_{\max}$ .

$$r_0 = r \text{ voor } \varphi = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{p}{-1 + \varepsilon}.$$

$q = f \sin \varphi_{\max}$  waarin  $f$  de brandpuntsafstand is;  $f = \frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}$  (zie § A.19). Ga door berekening na, dat in figuur 12.13:

$$\varphi_{\max} = 0,64 \text{ rad}; \psi = 1,85 \text{ rad}; r_0 = 4,5 \text{ cm en } q = 1,5 \text{ cm}.$$

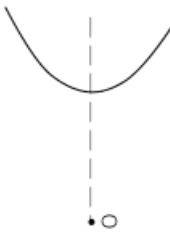
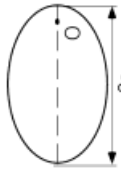


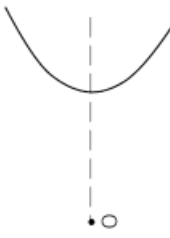



N.B.  $q = b$  (zie § A.19).

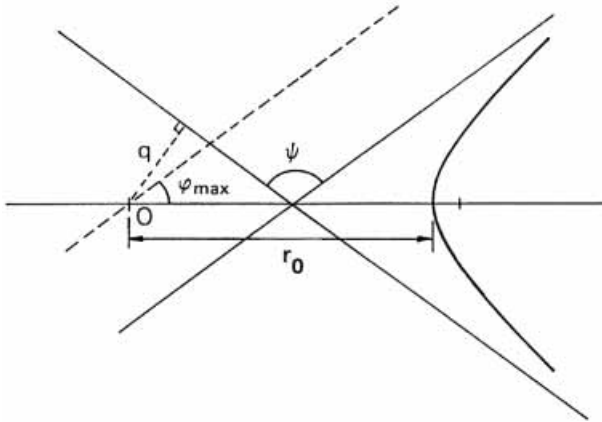
Deze beschouwingen zijn onder andere nodig om de berekeningen van *Rutherford*<sup>4</sup> te volgen, die uit de verstrooiing van alpha-deeltjes in een dun goudplaatje de lading van de verstrooiende (goud-)kernen kon vaststellen en tevens de afstanden tussen die kernen.

---

<sup>4</sup> Rutherford, Ernest, 1871–1937

Tabel 12.1.

<p><i>afstotende kracht</i>  <math>\vec{F} = \frac{c}{r^2} \hat{e}_r</math> en <math>U = \frac{c}{r}</math></p>	<p><i>aantrekkende kracht</i>  <math>\vec{F} = -\frac{c}{r^2} \hat{e}_r</math> en <math>U = -\frac{c}{r}</math></p>		
<p><i>baanvergelijking</i>  <math>r = \frac{p}{-1 + \epsilon \cos \varphi}</math></p>	<p><i>baanvergelijking</i>  <math>r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}</math></p>		
<p>p is een afkorting voor <math>L^2/m^*c \Rightarrow L = \sqrt{pm^*c}</math>.</p>	<p>mechanische energie  <math>E = \frac{1}{2} \frac{c}{p} (\epsilon^2 - 1)</math>.</p>		
<p>hyperboolbaan (<math>\epsilon &gt; 1</math>)</p>  <p><math>E &gt; 0</math></p> <p><math>r_0 = \frac{p}{\epsilon - 1}</math></p>	<p>ellips (<math>0 &lt; \epsilon &lt; 1</math>)</p>  <p><math>E = \frac{-c}{2a}</math></p> <p><math>r_0 = \frac{p}{1 + \epsilon}</math></p>	<p>parabool (<math>\epsilon = 1</math>)</p>  <p><math>E = 0</math></p> <p><math>r_0 = \frac{p}{2}</math></p>	<p>hyperbool (<math>\epsilon &gt; 1</math>)</p>  <p><math>E &gt; 0</math></p> <p><math>r_0 = \frac{p}{1 + \epsilon}</math></p>
<p>hyperboolbaan (<math>\epsilon &gt; 1</math>)</p>  <p><math>E &gt; 0</math></p> <p><math>r_0 = \frac{p}{\epsilon - 1}</math></p>	<p>cirkelbaan (<math>\epsilon = 0</math>)</p>  <p><math>E = \frac{-c}{2p}</math></p> <p><math>r = p</math></p>	<p>parabool (<math>\epsilon = 1</math>)</p>  <p><math>E = 0</math></p> <p><math>r_0 = \frac{p}{2}</math></p>	<p>hyperbool (<math>\epsilon &gt; 1</math>)</p>  <p><math>E &gt; 0</math></p> <p><math>r_0 = \frac{p}{1 + \epsilon}</math></p>



Figuur 12.13.

Als de beginsnelheid  $\vec{v}_0$  (dat is de snelheid op grote afstand van het krachtcentrum) van het deeltje bekend is, alsmede de afstand  $q$  van de drager van  $\vec{v}_0$  tot het krachtcentrum, en als tevens  $c$  en de massa  $m^*$  van het deeltje bekend zijn, dan kunnen  $r_0$  en  $\psi$  berekend worden (immers:  $L = qm^*v_0$ , maar ook:  $L = \sqrt{pm^*c}$ ;  $E = \frac{1}{2} m^*v_0^2$  maar ook:  $E = \frac{1}{2} (c/p) (\varepsilon^2 - 1)$ ; hieruit vinden we  $p$  en  $\varepsilon$  en daarmee  $r_0$  en  $\psi$ .)

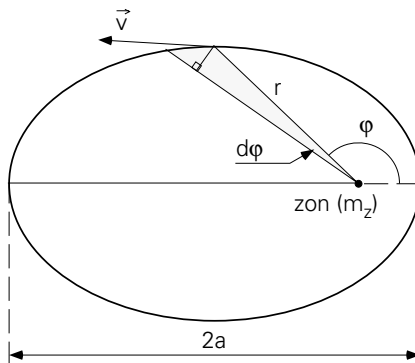
### 12.9. De derde wet van Kepler

De omlooptijd van een planeet is gemakkelijk te berekenen m.b.v. de tweede wet. Deze houdt immers in dat de *perksnelheid*, dat is de per seconde door de plaatsvector doorsneden oppervlakte, constant is (daarbij is dan wel het middelpunt van de zon als een *vast* krachtcentrum beschouwd!).

Wij behoeven dus slechts de oppervlakte van de ellipsbaan te delen door genoemde perksnelheid.

De oppervlakte van een ellips is  $\pi ab$  (zie § A19).

De perksnelheid is (zie figuur 12.14):



Figuur 12.14.

$$\frac{1}{2} \cdot r \cdot r \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} = \frac{1}{2} \frac{L}{m^*}.$$

Hieruit volgt voor de omlooptijd:

$$T = \frac{2m^* \pi ab}{L}.$$

Nu is  $L = \sqrt{pm^*c}$  waarin  $p = b^2/a$  (zie § A19).

$$\Rightarrow T = 2\pi c^{-1/2} m^{*1/2} a^{3/2}.$$

$c$  is in dit geval gelijk aan  $G m^* m_z$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm_z}}.$$

De omlooptijd hangt dus *niet* af van de massa van de planeet (mits we het middelpunt van de zon in goede benadering als een vast krachtcentrum mogen beschouwen; zie ook § 12.10). Vergelijkt men de omlooptijden van verschillende planeten in het gravitatieveld van de zon dan geldt blijkbaar:

$$T^2 \propto a^3.$$

De excentriciteit van de ellips speelt hierin dus geen rol!

## 12.10. Het twee-lichamen probleem

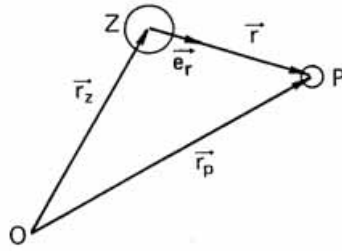
Bij de afleiding van de wetten van Kepler uit de gravitatiewet van Newton zijn we tot nu toe steeds uitgegaan van het bestaan van een *vast* krachtcentrum. Dit is niet helemaal correct.

Beperken we ons tot de wisselwerking tussen een planeet en de zon, dan dienen we te bedenken dat niet alleen de planeet maar ook de zon een versnelling ondervindt. Wegens het grote verschil in massa (de planeet met de grootste massa, Jupiter, is toch nog ruim 1 000 keer zo 'licht' als de zon!) is de tot nu toe gevolgde handelwijze zeker te verdedigen.

Het is echter zeer wel mogelijk, de beweging van een planeet en van de zon in elkaars gravitatieveld exact te beschrijven ten opzichte van een inertiestelsel. In figuur 12.15 zijn de plaatsvector van zon Z en planeet P aangegeven ten opzichte van de oorsprong O van een inertiestelsel.  $\vec{r}$  is de plaatsvector van P ten opzichte van het middelpunt van de zon.  $\vec{e}_r$  is de eenheidsvector  $\vec{r}/r$ . Als we de gravitatiekracht, door de zon op de planeet uitgeoefend,  $\vec{F}_{PZ}$  noemen en de door de zon ondervonden kracht met  $\vec{F}_{ZP}$  aangeven, dan geldt:

$$\vec{F}_{PZ} = f(r)\vec{e}_r \quad \text{en} \quad \vec{F}_{ZP} = -f(r)\vec{e}_r, \quad \text{waarin } f(r) = -c/r^2, \quad \text{waarin } c = Gm^*m_z$$

( $m^*$  = de massa van de planeet;  $m_z$  = de massa van de zon).



Figuur 12.15.

De bewegingsvergelijkingen zijn dus:

$$\begin{cases} m^* \ddot{\vec{r}}_P = -\frac{c}{r^2} \vec{e}_r & \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_P = \frac{-c}{m^* r^2} \vec{e}_r \\ m_Z \ddot{\vec{r}}_Z = +\frac{c}{r^2} \vec{e}_r & \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_Z = \frac{c}{m_Z r^2} \vec{e}_r \end{cases}$$

Conclusie: 
$$\ddot{\vec{r}} = \frac{-c}{\mu r^2} \vec{e}_r$$

waarin  $\mu$  de *gereduceerde massa* is, gedefinieerd door  $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m^*} + \frac{1}{m_Z}$ .

Hieruit volgt de bewegingsvergelijking van de relatieve beweging:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \frac{-c}{r^2} \vec{e}_r. \quad (12.13)$$

Vergelijkt men deze relatie met (12.12) dan kan men het volgende concluderen:

De planeet voert, ten opzichte van het middelpunt van de zon, toch een ellipsbaan uit, waarbij men echter de massa  $m^*$ , in de eerdere beschouwingen over het omgekeerd kwadratisch centrale krachtveld, moet vervangen door  $\mu$ .

Dit heeft als consequentie dat de derde wet van Kepler bij nader inzien niet helemaal correct is:  $\mu$  komt in de plaats van  $m^*$ , en dus:

$$T = 2\pi c^{-1/2} \mu^{1/2} a^{3/2}.$$

De verhouding  $T^2/a^3$  is dus toch enigszins afhankelijk van de massa van de planeet, want als we voor  $c$  invullen:  $Gm^*m_Z$ , dan krijgen we voor de omlooptijd:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{G(m_Z + m^*)}}.$$

Omgekeerd voert ook de zon *ten opzichte van de planeet* een ellipsbaan uit, met P in één der brandpunten.

Ten opzichte van het massamiddelpunt C beschrijven Z en P beide een ellipsbaan, want voor de plaatsvector van P ten opzichte van C geldt:

$$\vec{\rho}_P = \vec{r}_P - \vec{r}_C = \vec{r}_P - \left( \frac{m_Z \vec{r}_Z + m^* \vec{r}_P}{m_Z + m^*} \right) = \frac{\mu \vec{r}}{m^*}.$$

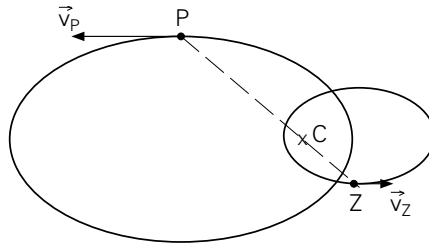
De baan van P ten opzichte van C is dus net zo'n ellips als zijn baan ten opzichte van het middelpunt van de zon; alle afmetingen zijn echter verkleind met een factor  $\mu/m^*$  (deze factor is echter bijna gelijk aan 1).

Voor de plaatsvector van Z ten opzichte van C geldt:

$$\vec{\rho}_Z = \vec{r}_Z - \vec{r}_C = -\frac{\mu \vec{r}}{m_Z}.$$

De factor  $\mu/m_Z$  is  $\ll 1$ , dus  $\rho_Z$  blijft steeds heel klein ten opzichte van  $r$ .

In figuur 12.16 zijn de banen voor de middelpunten van P en Z ten opzichte van C getekend voor de fictieve verhouding  $m^*/m_Z = \frac{1}{3}$ .



Figuur 12.16.

Minder extreme massaverhoudingen dan die tussen planeet en zon komen overigens voor bij *dubbelsterren*, dat zijn stelsels van twee sterren die dicht bij elkaar staan en dus in elkaars gravitatieveld bewegen.

### 12.11. Het equivalente een-dimensionale probleem voor het omgekeerd kwadratische krachtveld

In § 5.11 is het equivalente een-dimensionale probleem voor willekeurige centrale krachtvelden aan de orde gekomen.

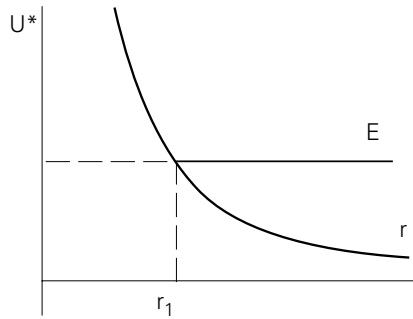
**A.** Wij passen de daar besproken methode toe op een puntmassa met massa  $m^*$  die een gekromde baan beschrijft in een centraal krachtveld waarbij de veldkracht is:  $\vec{F} = f(r)\vec{e}_r$  met  $f(r) = c/r^2$  ( $c$  positief, dus afstotende kracht).

Bij het raadplegen van § 5.11 wordt  $m$  vervangen door  $m^*$  en  $E_p$  door  $U^*$ .

$$U = \frac{c}{r} \quad \text{en dus:} \quad U^* = \frac{L^2}{2m^*r^2} + \frac{c}{r}.$$

De grafiek van  $U^*$  tegen  $r$  is geschetst in figuur 12.17.

Ook is een (overigens willekeurige) waarde aan  $E$  aangegeven (merk op dat in dit geval alleen een positieve waarde van  $E$  mogelijk is!).



Figuur 12.17.

Uit de figuur blijkt dat  $r$  niet willekeurig klein kan worden (minimale waarde  $r_1$ ) maar wel willekeurig groot.

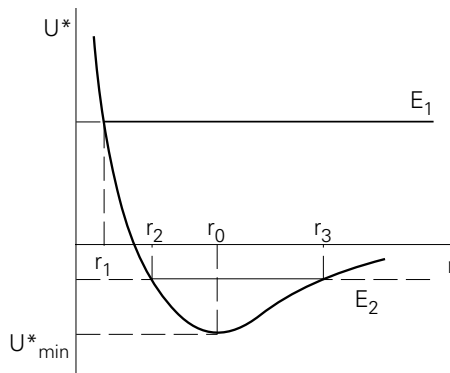
Dit is een voorbeeld van *verstrooiing* van een deeltje in een afstotend centraal krachtveld. In § 12.8 is bewezen dat de baan in dit geval een hyperbool is.

**B.** Nu beschouwen wij een puntmassa in een aantrekkend omgekeerd kwadratisch centraal krachtveld:  $\vec{F} = f(r)\vec{e}_r$  waarin  $f(r) = -c/r^2$  en dus  $U = -c/r$ .

Nu is

$$U^* = \frac{L^2}{2m^*r^2} - \frac{c}{r}.$$

In figuur 12.18 is de grafiek van  $U^*$  tegen  $r$  geschetst voor dit geval. Ook zijn enige mogelijke waarden van  $E$  aangegeven.



Figuur 12.18.

Voor  $E = E_1 > 0$  heeft  $r$  een minimum ( $r_1$ ) maar geen maximum. De puntmassa beschrijft dus geen gesloten baan (in § 12.8 is aangetoond dat de baan een hyperbool is).

Voor  $E = 0$  geldt hetzelfde, met dien verstande dat in dit geval  $\dot{r} = 0$  voor  $r \rightarrow \infty$  (volgens § 12.8 is de baan een parabool).

Voor  $E = E_2$  waarbij  $U^*_{\min} < E_2 < 0$  heeft  $r$  zowel een minimale als een maximale

waarde (resp.  $r_2$  en  $r_3$ ). In § 12.8 is aangetoond dat de baan in dit geval een ellips is;  $p$  en  $\epsilon$  zijn gemakkelijk uit  $r_2$  en  $r_3$  te berekenen!

(N.B.: ga zelf na, dat het minimum in het  $U^*$ - $r$  diagram ligt bij de waarde  $r = p$ ).

Voor  $E = U^*_{\min}$  (de minimale waarde van  $U^*$ ) tenslotte blijkt uit de grafiek dat  $r$  een vaste waarde heeft ( $r_0$ ).

De puntmassa voert nu een eenparige cirkelbeweging uit.

Hoe ziet het equivalente een-dimensionale probleem er nu uit voor het geval dat we een planeet  $P$  (massa  $m^*$ ) en de zon  $Z$  (massa  $m_2$ ) beschouwen als een twee-lichamen systeem, zoals in § 12.10?

Voor de relatieve beweging van  $P$  en  $Z$  in elkaars gravitatieveld geldt, zoals in § 12.10 is uiteengezet:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{c}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{waarin } c = Gm^*m_Z.$$

De enige krachten die op  $P$  en  $Z$  werken zijn de onderlinge krachten  $\vec{F}_{PZ}$  en  $\vec{F}_{ZP}$ ; er werken geen uitwendige krachten op het systeem.

De mutuele potentiële energie is:  $U = -c/r$ .

Zoals in § 6.9 is aangetoond, is het equivalente een-dimensionale probleem in dit geval dat van een fictief deeltje waarvan de massa  $\mu$  is, de kinetische energie  $\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2$  en de potentiële energie:

$$U^* = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{c}{r}.$$

**Overzicht van hoofdstuk 12**

Omgekeerd kwadratisch centraal  
krachtveld:

$$\text{Veld-intensiteit } \vec{I} = \frac{c}{r^2} \vec{e}_r.$$

$$\text{Potentiaal } V = \frac{c}{r} + \text{constante.}$$

$$\vec{I} = -\nabla V.$$

Gravitatieveld van puntmassa  $m$ :  $c = -Gm$ ;  $\vec{F} = m^* \vec{I}$ ;  $E_p = m^* V$ .

Elektrisch veld van puntlading  $Q$ :  $c = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$ ;  $\vec{F} = q\vec{E}$ ;  $E_p = qV$ .

Stelling van Gauss:  $\oiint \vec{I} \cdot d\vec{S} = 4\pi c$  indien 1 krachtcentrum;

$$\oiint \vec{I} \cdot d\vec{S} = 4\pi \sum_1^N c_i \text{ voor } N \text{ krachtcentra.}$$

Voor gravitatie:

$$\oiint \vec{I} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{\text{omvat.}}$$

Voor elektrisch veld:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{omvat.}}$$

Voor gravitatie:

$$\text{div } \vec{I} = -4\pi G \rho = -\nabla^2 V.$$

Voor elektrisch veld:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = -\nabla^2 V.$$

Kepler 1:

Baan van deeltje in omgekeerd kwadratisch centraal krachtveld is kegelsnede.

Kepler 2:

Voerstraal beschrijft in gelijke tijden gelijke perken (in elk centraal krachtveld).

Kepler 3:

De kwadraten van de omlooptijden van de planeten verhouden zich tot elkaar als de derde machten van de lange assen van hun ellipsvormige banen.

Massa  $m^*$  in omgekeerd  
kwadratisch veld:

$$m^* \ddot{\vec{r}} = \frac{c}{r^2} \vec{e}_r \text{ waarin } c > 0 \text{ bij afstotende kracht;}$$

$$m^* \ddot{\vec{r}} = \frac{-c}{r^2} \vec{e}_r \text{ waarin } c > 0 \text{ bij aantrekkende kracht.}$$

Twee-lichamen probleem:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \frac{c}{r^2} \vec{e}_r \text{ resp. } \frac{-c}{r^2} \vec{e}_r.$$

Massa  $m^*$  in omgekeerd  
kwadratisch veld:

$$r = \frac{p}{-1 + \epsilon \cos \varphi} \text{ resp. } \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}$$

$$L = \sqrt{p m^* c} \text{ en } E = -\frac{1}{2} \frac{c}{p} (1 - \epsilon^2).$$

Equivalent ééndimensionaal  
probleem:

$$U^* = \frac{L^2}{2m^* r^2} \pm \frac{c}{r} \text{ resp. } U^* = \frac{L^2}{2\mu r^2} \pm \frac{c}{r}.$$

# 13

## Trillingen

### 13.1. Het belang van de harmonische trilling

**Periodieke functies:** Een functie  $f$  van de tijd  $t$  heet *periodiek* met *periode*  $T$  als geldt:

$$f(t) = f(t + nT)$$

waarin  $n \in \mathbb{N}$ , indien  $T$  de kleinste mogelijke waarde heeft waarvoor deze betrekking geldt.

De belangrijkste periodieke functie van de tijd is van de vorm:

$$f(t) = A \cos(\omega t + \beta)$$

waarin  $A$  en  $\omega$  positieve reële constanten zijn terwijl  $\beta$  een willekeurige reële constante is.

Een periodieke functie van deze vorm zijn we al tegengekomen bij de *harmonische trilling* (§ 4.2). In die paragraaf bleek dat de dynamische bewegingsvergelijking van een deeltje met massa  $m$  dat een harmonische vibratie uitvoert langs de  $X$ -as (met de evenwichtsstand als oorsprong) is:

$$m\ddot{u} + bu = 0. \tag{4.1}$$

De oplossing van (4.1), de kinematische bewegingsvergelijking dus, luidt:

$$u = A \cos(\omega t + \beta)$$

waarin  $\omega = \sqrt{b/m}$  terwijl  $A$  en  $\beta$  uit de randvoorwaarden van (4.1) moeten blijken.

*Fourier*<sup>1</sup> heeft bewezen dat **elke trilling kan worden gezien als een superpositie van harmonische trillingen**.

Daarom wordt aan de harmonische trilling (ook al komt die in zuivere vorm niet zo heel veel voor) zoveel aandacht besteed.

De *stelling van Fourier*, toegepast op trillingen, luidt aldus:

Voor elke periodieke functie  $f$  van de tijd met periode  $T$  geldt:

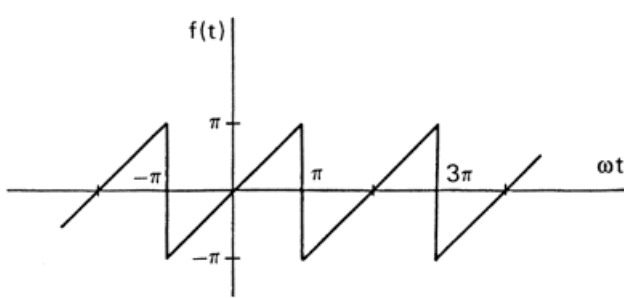
$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t + \beta_n)$$

<sup>1</sup> Fourier, Jean Baptiste, 1768–1830

waarin  $a_0$ ,  $a_n$  en  $\beta_n$  nader te bepalen constanten zijn;  $\omega = 2\pi/T$ ;  $n \in \mathbb{N}^+$ .

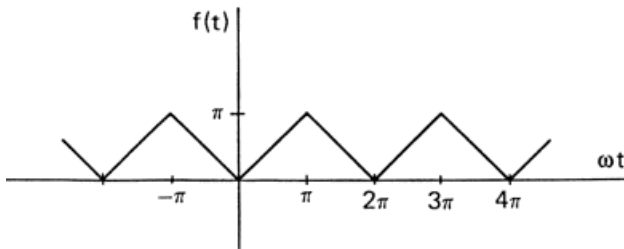
Het bewijs van deze stelling valt, evenals de methode om de constanten  $a_0$ ,  $a_n$  en  $\beta_n$  te berekenen, buiten het kader van dit boek. Wij volstaan met enige voorbeelden van periodieke functies van de tijd.

### a. De zaagtand



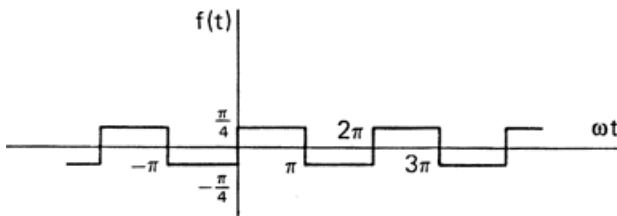
Volgens Fourier is  $f(t) = 2\left\{\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin (2\omega t) + \frac{1}{3} \sin (3\omega t) - \frac{1}{4} \sin (4\omega t) + \dots\right\}$ .

### b. Driehoek



Hier is  $f(t) = \frac{1}{2} \pi - \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{\cos \omega t}{1^2} + \frac{\cos (3\omega t)}{3^2} + \frac{\cos (5\omega t)}{5^2} + \dots \right\}$ .

### c. Blok



Hier is  $f(t) = \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin (3\omega t) + \frac{1}{5} \sin (5\omega t) + \dots$ .

*Fourier-analyse:* Een door een muziekinstrument voortgebrachte toon kan worden beschreven als superpositie van een (sinusvormig met de tijd variërende) grondtoon met frequentie  $\nu_0$  plus boventonen (hogere harmonischen) met frequenties  $n\nu_0$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ). Door elektronische filtering van de door een microfoon opgenomen toon is men in staat, te analyseren hoe sterk de boventonen zijn.

*Fourier-synthese:* Laat men een samenstel van toongeneratoren een zuiver harmonische toon met frequentie  $\nu_0$  genereren en tegelijkertijd boventonen met frequenties  $n\nu_0$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) waarvan de sterkten en de fasen zich net zo verhouden als bij de analyse is gebleken, dan kan een toon worden voortgebracht die niet te onderscheiden is van die van het muziekinstrument.

### 13.2. Lineair gedempte vrije trilling

We bekijken nog eens het geval van een deeltje met massa  $m$  dat een trilling uitvoert langs de  $X$ -as (met  $x = 0$  als evenwichtsstand), onder invloed van een kracht waarvoor geldt:  $F_x = -bx$ .

Meestal zijn er nog één of meer krachten die de beweging van het deeltje beïnvloeden. Zo ondervindt een stalen bol, hangend aan een veer, luchtweerstand, terwijl bovendien de veerkracht niet exact evenredig is met de uitrekking. De som van deze tegenwerkende krachten wordt de *damping* genoemd.

We beschouwen het belangrijke geval van *lineaire damping*, dat is damping waarbij de resulterende tegenwerkende kracht in grootte recht evenredig is met de snelheid. De evenredigheidsconstante geven we aan met het symbool  $r$ .

De dynamische bewegingsvergelijking luidt dan:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + bx = 0. \quad (13.1)$$

Om deze differentiaalvergelijking op te lossen, substitueren we voor  $x$ :  $x = \xi e^{-\alpha t}$  waarin  $\xi = \xi(t)$  terwijl  $\alpha$  een constante is;  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Deze substitutie houdt geen beperking in. Door een geschikte keuze van  $\xi$  kunnen we elke willekeurige reële functie  $x(t)$  verkrijgen (bij een gegeven waarde van  $\alpha$ ).

De reden waarom we deze substitutie uitvoeren is dat, bij geschikte keuze van  $\alpha$ , wij een tweede orde differentiaalvergelijking verkrijgen zonder eerste orde term, hetgeen de oplossing een stuk eenvoudiger maakt.

$$\begin{aligned} \text{Substitueren we } x = \xi e^{-\alpha t}, \text{ dan ook: } \dot{x} &= \dot{\xi} e^{-\alpha t} - \alpha\xi e^{-\alpha t} \\ \text{en: } \ddot{x} &= (\ddot{\xi} - 2\alpha\dot{\xi} + \alpha^2\xi)e^{-\alpha t}. \end{aligned}$$

Voor (13.1) kunnen we nu schrijven:

$$m\ddot{\xi} + (r - 2\alpha m)\dot{\xi} + (m\alpha^2 - r\alpha + b)\xi = 0.$$

Kiezen we nu:

$$\alpha = \frac{r}{2m}, \quad (13.2)$$

dan wordt de vergelijking vereenvoudigd tot:

$$m\ddot{\xi} + (-m\alpha^2 + b)\xi = 0$$

en dus:

$$\ddot{\xi} + (\omega_0^2 - \alpha^2)\xi = 0$$

waarin  $\omega_0 = \sqrt{b/m}$  (de hoekfrequentie in het *ongedempte* geval).

De oplossing van deze differentiaalvergelijking (die weer een sterke gelijkenis vertoont met (4.1)) bekijken we voor drie verschillende situaties:

**a.**  $\alpha < \omega_0$  (*zwakke demping*). In dit geval is de oplossing te schrijven in de volgende vorm:

$$\xi = A \cos(\omega_1 t + \beta) \quad \text{waarin } \omega_1 = \sqrt{|\omega_0^2 - \alpha^2|}.$$

**b.**  $\alpha = \omega_0$  (*kritieke demping*). In dit geval is de differentiaalvergelijking wel bijzonder eenvoudig:

$$\ddot{\xi} = 0 \Rightarrow \dot{\xi} = A \quad (\text{willekeurige reële constante})$$

$$\Rightarrow \xi = At + B \quad (\text{idem}).$$

**c.**  $\alpha > \omega_0$  (*sterke demping*). De tweede afgeleide van  $\xi$  naar de tijd heeft nu hetzelfde teken als  $\xi$ .

Er zijn nu twee onafhankelijke oplossingen:  $A_1 e^{\omega_1 t}$  en  $A_2 e^{-\omega_1 t}$  waarin  $A_1$  en  $A_2$  willekeurige reële constanten zijn, terwijl weer  $\omega_1 = \sqrt{|\omega_0^2 - \alpha^2|}$

Elke lineaire combinatie voldoet, dus de algemene oplossing is:

$$\xi = A_1 e^{\omega_1 t} + A_2 e^{-\omega_1 t}.$$

Vervangen we nu  $\xi$  weer middels de substitutie  $\xi = x e^{\alpha t}$  dan blijkt de oplossing van (13.1) te zijn:

$$\mathbf{a.} \quad \text{In het geval van zwakke demping: } x = A e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t + \beta). \quad (13.3)$$

$$\mathbf{b.} \quad \text{In het geval van kritieke demping: } x = (At + B) e^{-\alpha t}. \quad (13.4)$$

$$\mathbf{c.} \quad \text{In het geval van sterke demping: } x = A_1 e^{(-\alpha + \omega_1)t} + A_2 e^{(-\alpha - \omega_1)t}. \quad (13.5)$$

De drie oplossingen zien er heel verschillend uit. De oplossingen in geval a en c gelijken veel meer op elkaar, als men in het laatste geval gebruik maakt van de aanduiding *cosh* (cosinus hyperbolicus).

Omdat  $\cosh x$  gedefinieerd is als  $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  (zie ook § A21) kunnen we voor het geval van sterke demping schrijven:

$$x = A e^{-\alpha t} \cosh(\omega_1 t + \beta)$$

waarin  $A = 2\sqrt{A_1 A_2}$  en  $\beta = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{A_1}{A_2} \right)$

Een andere methode om (13.1) op te lossen is aangegeven door *Euler*:

Stel  $x = e^{\lambda t}$  waarin  $\lambda$  een constante is die zodanig bepaald kan worden dat  $x$  voldoet aan (13.1). Door deze substitutie gaat (13.1) over in:

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + r\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0.$$

Deling door  $e^{\lambda t}$  geeft de karakteristieke vergelijking:

$$m\lambda^2 + r\lambda + b = 0.$$

Als  $\lambda$  voldoet aan de karakteristieke vergelijking, dan voldoet  $x$  aan (13.1), en omgekeerd.

Uit de karakteristieke vergelijking blijkt dat er in het algemeen twee oplossingen zijn voor  $\lambda$ :

$$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \text{en} \quad \lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

waarin  $\alpha = r/2m$  en  $\omega_0 = \sqrt{b/m}$ .

Als  $\alpha > \omega_0$  (*sterke demping*), is de algemene oplossing een lineaire combinatie van beide onafhankelijke oplossingen. Dit leidt direct tot de oplossing (13.5).

Als  $\alpha < \omega_0$  (*zwakke demping*), dan zijn zowel  $\lambda_1$  als  $\lambda_2$  *complex*.

Met de eerder ingevoerde afkorting  $\omega_1 = \sqrt{|\omega_0^2 - \alpha^2|}$  kunnen we schrijven:

$$\lambda_1 = -\alpha + j\omega_1 \quad \text{en} \quad \lambda_2 = -\alpha - j\omega_1$$

waarin  $j$  is gedefinieerd door  $j^2 = -1$ .

Elke lineaire combinatie van de oplossingen  $x = e^{\lambda_1 t}$  en  $x = e^{\lambda_2 t}$  is een oplossing van (13.1), dus de algemene oplossing voor het geval van zwakke demping is:

$$x = A_1 e^{(-\alpha + j\omega_1)t} + A_2 e^{(-\alpha - j\omega_1)t}.$$

### Hierin kunnen ook de constanten $A_1$ en $A_2$ complex zijn!

Met behulp van de *stelling van Euler*:  $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$  (zie § A21) kunnen we deze oplossing als volgt herschrijven:

$$x = (A_1 + A_2)e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t) + j(A_1 - A_2)e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t).$$

Omdat  $A_1$  en  $A_2$  in het algemeen complex zijn, schrijven we:

$$A_1 = a_1 + jb_1 \quad \text{en} \quad A_2 = a_2 + jb_2.$$

Hiermee wordt de oplossing:

$$x = [(a_1 + a_2)\cos(\omega_1 t) - (b_1 - b_2)\sin(\omega_1 t) + j\{(b_1 + b_2)\cos(\omega_1 t) + (a_1 - a_2)\sin(\omega_1 t)\}] e^{-\alpha t}.$$

Het linkerlid van deze vergelijking is reëel, dus het imaginaire deel van het rechterlid moet nul zijn  $\Rightarrow a_2 = a_1$  en  $b_2 = -b_1$ :  $A_1$  en  $A_2$  zijn *toegevoegd complex (complex geconjugueerd)*.

Blijft over:  $x = \{2a_1\cos(\omega_1 t) - 2b_1\sin(\omega_1 t)\} e^{-\alpha t}$  waarin  $a_1$  en  $b_1$  willekeurige reële constanten zijn. Deze oplossing is gelijkwaardig met (13.3):

$$x = A e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t + \beta)$$

indien  $a_1$  en  $b_1$  zo worden gekozen dat  $A \cos \beta = 2a_1$  en  $A \sin \beta = 2b_1$ .

Als  $\alpha = \omega_0$  (*kritieke demping*), heeft de karakteristieke vergelijking slechts één oplossing:

$$\lambda = -\alpha.$$

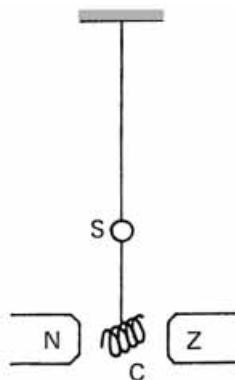
De algemene oplossing in het geval van kritieke demping:

$$x = (At + B)e^{-\alpha t} \quad (13.4)$$

vinden we nu, door kritieke demping te beschouwen als een limietgeval van sterke of zwakke demping voor  $\omega_1 \rightarrow 0$ .

### *Toepassing*

Zwakke en sterke demping zijn goed te demonstreren met behulp van een spiegelgalvanometer. Weliswaar betreft het hier niet een uitwijking  $x$  maar een hoekverdraaiing  $\varphi$ , maar verder is het principe hetzelfde als bij rechtlijnige vibratie.



*Figuur 13.2.*

Een *spiegelgalvanometer* bestaat uit een spoeltje  $C$ , opgehangen aan een lange draad en geplaatst tussen de polen van een permanente magneet (zie figuur 13.2; de aansluitingen van het spoeltje zijn niet getekend). Men laat een smalle lichtbundel invallen op het vlak boven  $C$  gemonteerde spiegel  $S$ . Ergens op de muur tegenover  $S$  is een lichtvlekje te zien dat te danken is aan de door  $S$  gereflecteerde lichtbundel. Voert men een elektrische stroom door  $C$  dan zal deze zich draaien tengevolge van het Lorentzkoppel dat  $C$  nu ondervindt. De draad wordt daardoor *getordeerd* (verwronnen) waardoor een tegenwerkend krachtmoment  $\vec{T}$  wordt opgewekt.  $T$  is recht evenredig met de hoek waarover  $C$  is gedraaid.

We voeren nu het volgende experiment uit: men voert een kortdurende stroomstoot door  $C$  en verbreekt daarna de aansluitingen.  $C$  voert hierna een harmonische rotatie-trilling uit (zie § 8.10). Deze rotatietrilling is vrijwel *ongedempt*.

Sluit men nu de galvanometer kort (door de aansluitingen geleidend met elkaar te verbinden) dan ontstaan inductiestromen die een afremmend koppel veroorzaken waarvan het krachtmoment recht evenredig is met de hoeksnelheid (mits het magnetisch veld een *radieel* veld is). De lichtvlek op de muur *kruipt* naar de evenwichtsstand (*sterke* demping dus). Als we de galvanometer niet echt hadden kortgesloten, maar de aansluitingen via een weerstand geleidend met elkaar hadden ver-

bonden, waren de inductiestromen minder sterk geweest. Door een grotere of kleinere weerstand te kiezen, kan men de demping zelf regelen.

### 13.3. Zwakke demping

Een stalen bol hangt, onder water, aan een veer. Men trekt de bol vanuit de evenwichtsstand een stukje omlaag en laat hem dan (op tijdstip  $t = 0$ ) los. Er treedt nu een zwak gedempte harmonische trilling op. Noemt men de uitwijking onder de evenwichtsstand  $x$ , dan geldt (13.3):

$$x = A e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t + \beta)$$

waarin  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$  als  $\omega_0 = \sqrt{b/m}$ .

De factor vóór de cosinus-functie,  $A e^{-\alpha t}$ , wordt de *amplitude* genoemd.

Uit de randvoorwaarden  $x(0) \neq 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  volgt:

$$A = \frac{\omega_0}{\omega_1} x(0) \text{ en } \beta = -\arctg\left(\frac{\alpha}{\omega_1}\right).$$

In figuur 13.3 is het diagram van  $x$  tegen  $t$  getekend voor de genoemde randvoorwaarden. De streepjeslijn geeft de amplitude aan. Merk op, dat de amplitude op tijdstip  $t = 0$  iets groter is dan de uitwijking  $x(0)$ .

Aan het diagram is duidelijk te zien waarom men de zwak gedempte harmonische trilling een *oscillatorische* beweging noemt.

De tijd die verstrijkt tussen twee passages van de evenwichtsstand (in dezelfde richting!) wordt de *trillingstijd* of periode  $T_1$  genoemd. Uit (13.3) blijkt dat  $T_1 = 2\pi/\omega_1$ . Men noemt  $\omega_1$  de (*hoek*)frequentie (of ook wel de *eigenfrequentie*) van het zwak gedempte systeem.

$x$  is maximaal als  $\dot{x} = 0$  en  $x > 0$ . Men kan gemakkelijk nagaan dat  $x$  maximaal is als  $t = k \cdot T_1$  ( $k \in \mathbf{N}$ ).

De potentiële energie van het trillende deeltje is, als we  $E_p = 0$  kiezen voor  $x = 0$ :

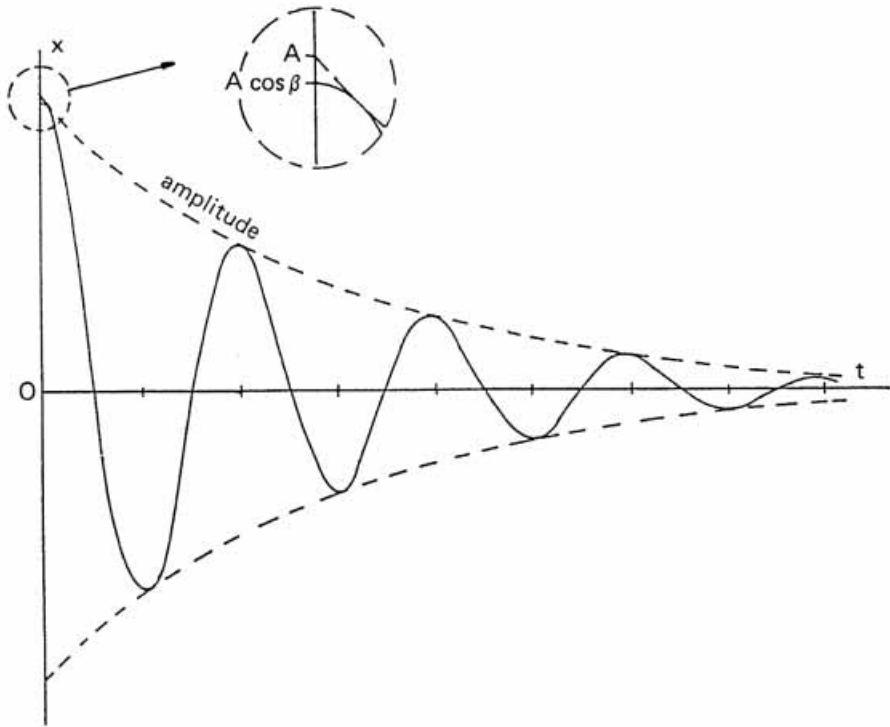
$$E_p = \frac{1}{2} b x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 e^{-2\alpha t} \cos^2(\omega_1 t + \beta).$$

Kinetische energie:

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m A^2 e^{-2\alpha t} \left\{ -\alpha \cos(\omega_1 t + \beta) - \omega_1 \sin(\omega_1 t + \beta) \right\}^2.$$

Hieruit volgt voor de totale mechanische energie van het trillende deeltje, na enig rekenwerk:

$$E_p + E_k = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 e^{-2\alpha t} + \frac{1}{2} m \alpha^2 A^2 e^{-2\alpha t} \cos 2(\omega_1 t + \beta) + \frac{1}{2} m \alpha \omega_1 A^2 e^{-2\alpha t} \sin 2(\omega_1 t + \beta).$$



Figuur 13.3.

Als  $\alpha \ll \omega_0$  kan men de laatste twee termen steeds verwaarlozen ten opzichte van de eerste. In dat geval is blijkbaar  $E_p + E_k \approx \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 e^{-2\alpha t}$ , met andere woorden de mechanische energie van het trillende deeltje is bij benadering recht evenredig met het kwadraat van de amplitude.

Onder de *relaxatietijd*  $\tau$  verstaat men de tijd waarin het kwadraat van de amplitude met een factor  $e$  is afgenomen. Voor  $\alpha \ll \omega_0$  is  $\tau$  dus een maat voor de afname van de mechanische energie van het trillende deeltje in de loop van de tijd.

Uit de definitie volgt:

$$A^2 e^{-2\alpha(t+\tau)} = \frac{1}{e} A^2 e^{-2\alpha t} \Rightarrow 2\alpha\tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{1}{2\alpha}.$$

Soms verstaat men onder de relaxatietijd de tijd waarin de amplitude zelf met een factor  $e$  is afgenomen. Ga na dat deze relaxatietijd gelijk is aan  $1/\alpha$ .

De *kwaliteit*  $Q$  van het zwak gedempte systeem is als volgt gedefinieerd:

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \omega_1 \tau.$$

Blijkbaar is de kwaliteit hoog als de energie van het trillende deeltje (bij gegeven eigenfrequentie) maar langzaam afneemt, met andere woorden  $Q$  is groot als  $\alpha \ll \omega_0$ .

*Stelling*

Voor  $Q \gg 1$  is  $2\pi/Q \approx$  de relatieve energie-dissipatie per trillingstijd.

*Bewijs*

Omdat voor  $\alpha \ll \omega_0$  de energie van het trillende deeltje in goede benadering evenredig is met het kwadraat van de amplitude, is:

$$\begin{aligned} \frac{E(t) - E(t + T_1)}{E(t)} &\approx \frac{e^{-2\alpha t} - e^{-2\alpha(t+T_1)}}{e^{-2\alpha t}} = 1 - e^{-2\alpha T_1} \approx \\ &\approx 1 - (1 - 2\alpha T_1) = 2\alpha T_1 = \frac{2\pi}{Q}. \end{aligned}$$

Soms definieert men de kwaliteit  $Q$  als  $\omega_0 \tau$ . Voor systemen van hoge kwaliteit ( $\alpha \ll \omega_0$ ) is er relatief weinig verschil tussen  $\omega_1$  en  $\omega_0$  en dus ook tussen de ene en de andere definitie van  $Q$ . Voor systemen van lage kwaliteit is het relatieve verschil wel groot: een systeem is kritiek gedempt als  $Q = 0$  volgens onze definitie. Hanteert men de definitie  $Q = \omega_0 \tau$  dan is een systeem kritiek gedempt als  $Q = 0,5$ . Overigens is het niet zo moeilijk aan te tonen dat het verschil tussen de op beide manieren gedefinieerde kwaliteiten reeds bij  $Q \approx 3,5$  tot 1% is teruggebracht.

De *dempingsverhouding* is de factor waarmee de amplitude in één trillingstijd is afgenomen, dit is:

$$\frac{A e^{-\alpha t}}{A e^{-\alpha(t+T_1)}} = e^{\alpha T_1}.$$

Onder het *logaritmisch decrement*  $\Lambda$  verstaat men de natuurlijke logaritme van de dempingsverhouding. Uit deze definitie volgt:

$$\Lambda = \alpha T_1.$$

Hoe kleiner  $\Lambda$ , des te groter is de kwaliteit  $Q$ .

Samenhang:

$$Q = \omega_1 \tau = \frac{\omega_1}{2\alpha} = \frac{\pi}{\alpha T_1} = \frac{\pi}{\Lambda}.$$

*Conclusie*

**hoe zwakker de demping, des te langer  $\tau$ , des te kleiner  $\Lambda$  en des te groter  $Q$ .**

*De energiedissipatie bij een zwak gedempte harmonische oscillator*

De mechanische energie van het trillende deeltje is:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} b x^2.$$

De energiedissipatie per seconde is dus:

$$-\frac{dE}{dt} = -m\dot{x}\ddot{x} - b\dot{x}^2 = -\dot{x}(m\ddot{x} + b\dot{x}).$$

Omdat  $m\ddot{x} + r\dot{x} + bx = 0$  volgt hieruit:

$$-\frac{dE}{dt} = r\dot{x}^2.$$

Dit resultaat kan ook zo worden gevonden: de door de wrijvingskracht  $-r\dot{x}$  op de oscillator (het trillende deeltje) bij een infinitesimale verplaatsing  $dx$  verrichte arbeid is:

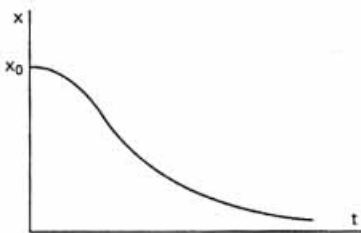
$$-r\dot{x} dx = -r\dot{x} \frac{dx}{dt} dt = -r\dot{x}^2 dt \Rightarrow \frac{dE}{dt} = -r\dot{x}^2.$$

### 13.4. Kritieke demping en sterke demping

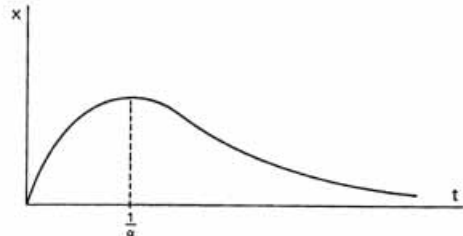
Kritieke demping is zowel te beschouwen als het limietgeval van zwakke demping voor  $\alpha \uparrow \omega_0$  alsook als het limietgeval van sterke demping voor  $\alpha \downarrow \omega_0$ . Gaan we voor een kritiek gedempt systeem uit van de randvoorwaarden  $x = x_0$  en  $\dot{x} = 0$  op  $t = 0$ , dan wordt de algemene oplossing (13.4) herleid tot:

$$x = x_0(\alpha t + 1)e^{-\alpha t}.$$

In figuur 13.4 is het diagram van  $x$  tegen  $t$  geschetst voor de genoemde randvoorwaarden.



Figuur 13.4.



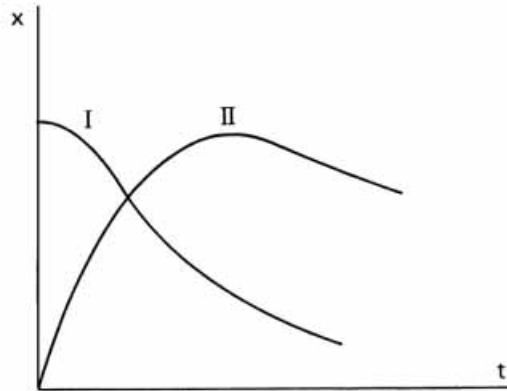
Figuur 13.5.

Als we van andere randvoorwaarden uitgaan (het systeem ondervindt een krachtstoot waardoor het plotseling een snelheid bezit maar nog geen noemenswaardige uitwijking heeft):  $x = 0$  en  $\dot{x} = v_0$  op  $t = 0$ , dan wordt (13.4) herleid tot:

$$x = v_0 t e^{-\alpha t}.$$

In figuur 13.5 is het diagram van  $x$  tegen  $t$  geschetst voor dit geval. Het maximum van  $x$  wordt bereikt als

$$\frac{d}{dt}(t e^{-\alpha t}) = 0 \quad \text{dus als } t = \frac{1}{\alpha}.$$



Figuur 13.6.

In figuur 13.6 zijn twee  $x$ - $t$  diagrammen geschetst voor een *sterk gedempt* systeem. Kromme I voor de randvoorwaarden:  $x(0) \neq 0$  en  $\dot{x}(0) = 0$ ; kromme II voor de randvoorwaarden:  $x(0) = 0$  en  $\dot{x}(0) = v_0$ .

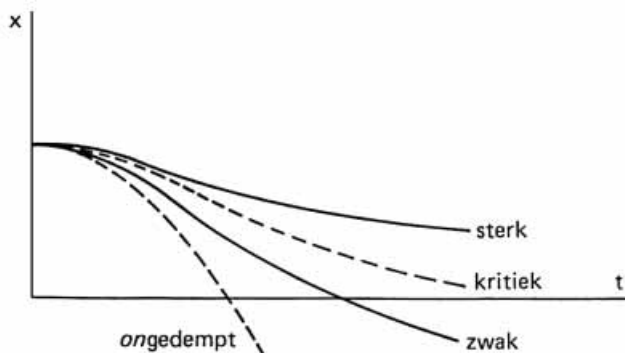
In figuur 13.7 tenslotte zijn de  $x$ - $t$  diagrammen voor sterke, kritieke, zwakke demping en voor het *ongedempte* geval in één tekening weergegeven, en wel voor de randvoorwaarden  $x(0) \neq 0$  en  $\dot{x}(0) = 0$ . In alle gevallen zijn  $m$  en  $b$  dezelfde, slechts  $r$  is verschillend. Voor de diagrammen die behoren bij sterke en kritieke demping is de  $t$ -as de asymptoot.

### 13.5. Elektrisch analogon (I)

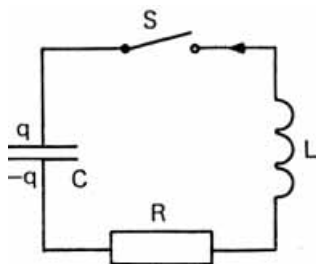
We beschouwen een serieschakeling van een condensator (capaciteit  $C$ ), een spoel (zelfinductie  $L$ ) en een weerstand  $R$ . Het circuit is onderbroken door een schakelaar  $S$  (zie figuur 13.8).

De spoel heeft zelf ook enige weerstand; de waarde hiervan is inbegrepen in de voor de aparte weerstand opgegeven waarde  $R$ . De lading van de bovenste plaat van de condensator noemen we  $q$ ; die van de onderste plaat is  $-q$ . De waarde van  $q$  op tijdstip  $t = 0$  noemen we  $q_0$ .

Op  $t = 0$  sluiten we  $S$ . Vanaf dat ogenblik gaat er een elektrische stroom  $i$  lopen die we positief rekenen als hij in de aangegeven richting loopt. Volgens de tweede wet van Kirchhoff geldt, vanaf  $t = 0$ :



Figuur 13.7.



Figuur 13.8.

$$\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} + iR = 0 \quad \text{waarin } i = \frac{dq}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0. \quad (13.6)$$

Deze differentiaalvergelijking is identiek met (13.1) als we de volgende substituties in acht nemen:

$$m \rightarrow L, \quad r \rightarrow R, \quad b \rightarrow \frac{1}{C}.$$

In het *ongedempte* geval zal  $q$  harmonisch met de tijd variëren:

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t) \quad \text{waarin } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

In het geval van *zwakke demping* ( $\alpha < \omega_0$  waarbij  $\alpha = R/2L$ ) geldt, met de randvoorwaarden  $q = q_0$  en  $\dot{q} = 0$  op  $t = 0$ :

$$q = A e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t + \beta)$$

$$\text{waarin } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}, \quad A = \frac{\omega_0}{\omega_1} q_0 \quad \text{en } \beta = -\arctg(\alpha/\omega_1).$$

De *relaxatietijd*  $\tau = 1/(2\alpha) = L/R$  en de *kwaliteit*  $Q = \omega_1 \tau \approx \omega_0 \tau = (1/R)\sqrt{L/C}$  voor niet te kleine  $Q$ . De in het circuit opgeslagen (elektrische en magnetische) energie is:

$$E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L \dot{q}^2;$$

de energiedissipatie is:

$$-\frac{dE}{dt} = i^2 R = R \dot{q}^2.$$

## 13.6. Gedwongen trillingen

Bij tal van fysische verschijnselen en bij vele technische constructies treedt een trillend systeem op dat door een kracht waarvan grootte en richting periodiek veranderen, uitgeoefend door een ander systeem, tot een trilling met een bepaalde frequentie gedwongen wordt. Men spreekt dan van een *gedwongen trilling*.

Een voorbeeld is het trilplaatje van een microfoon. Door middel van geluidsgolven, afkomstig bijvoorbeeld van een vioolsnaar, wordt het trilplaatje in trilling gebracht

met een gedwongen, van buitenaf opgelegde, frequentie. In een luidspreker trilt het trilplaatje omdat het gekoppeld is met de stroom-oscillaties van een versterker die het plaatje een bepaalde frequentie opleggen. Onder bepaalde omstandigheden kan het gedwongen trillend systeem grote amplituden bij één bepaalde frequentie krijgen, ook al is de op het systeem werkende kracht zwak. Men spreekt dan van *resonantie*. Voorbeelden zijn de heftige trillingen die de carrosserie van een auto bij een bepaalde omwentelingssnelheid van de motoras krijgt; de registratie van aardbevingsgolven door een seismograaf; een op een bepaalde golflengte afgestemde radio: een elektrische trillingskring in de ontvanger resonanceert dan met de opgevangen elektromagnetische trillingen van één bepaalde frequentie. Een fraai fysisch voorbeeld is de absorptie van licht van een bepaalde golflengte door materie: een atomaire of moleculaire systeem is dan tot resonantie gebracht door lichttrillingen van één bepaalde frequentie en absorbeert daarmee de energie van de opvallende straling.

We merken nog op: de kracht die op het trillende systeem (systeem A) werkt, wordt uitgeoefend door een tweede systeem (B) dat met systeem A op een of andere wijze gekoppeld is. Systeem A neemt daarbij energie op — het *absorbeert* energie — van systeem B. Het bestaan van de ‘koppeling’ impliceert echter dat A een terugwerking uitoefent op B. Als deze terugwerking energetisch onbelangrijk is, hetzij omdat de terugkoppeling tussen de systemen zwak is (bijvoorbeeld vioolsnaar en microfoon), ofwel omdat systeem B zo energierijk is dat de terugstromende energie verwaarloosbaar klein is (bijvoorbeeld versterker en luidspreker), dan kunnen we de gedragingen van systeem A onderzoeken door de terugkoppeling geheel buiten beschouwing te laten. Deze situatie bedoelen we als we zonder meer spreken van gedwongen trillingen. Is de terugkoppeling wel belangrijk, dan spreken we van *gekoppelde trillende systemen*. Deze worden in § 13.11 behandeld.

We gaan weer uit van het geval van de lineair gedempte trilling van § 13.2, maar nu werkt er bovendien een langs de X-as gerichte uitwendige kracht  $\vec{F}$  op het systeem, die een functie van de tijd is. Wij beschouwen hiervan twee bijzondere gevallen.

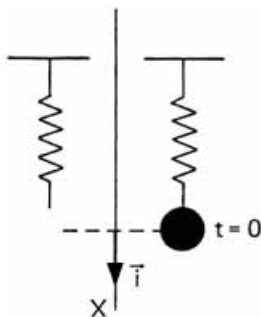
**a. De kracht is constant.** Stel,  $F_x > 0$ . De bewegingsvergelijking is dan:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + bx = F.$$

De oplossing is die van de homogene vergelijking (13.1) plus de particuliere oplossing  $x = F/b$ .

#### *Voorbeeld*

Aan het ondereinde van een verticaal hangende veer met bindingssterkte  $b$  haakt men een stalen bol met massa  $m$  ( $\gg$  de massa van de veer). De positie van de bol duidt men aan met  $x = 0$ ; de X-as is verticaal waarbij de eenheidsvector  $\vec{i}$  omlaag wijst. Het systeem is zwak gedempt.



Figuur 13.9.

Men laat de bol nu los (beginsnelheid nul; zie figuur 13.9). Het is duidelijk dat  $x = 0$  nu *niet* de evenwichtsstand aangeeft! De bewegingsvergelijking is in dit geval:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + bx = mg.$$

De oplossing is:

$$x = A e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t + \beta) + \frac{mg}{b}$$

waarin (gezien de randvoorwaarden:  $x = 0$  en  $\dot{x} = 0$  op  $t = 0$ ), voor het geval dat  $\alpha \ll \omega_0$ :

$$\beta = \pi \text{ en } A = \frac{mg}{b} \Rightarrow x = \frac{mg}{b} \{ 1 - e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t) \}.$$

**b. De kracht varieert harmonisch met de tijd:**  $F_x = \hat{F} \cos \omega t$ , vanaf  $t = 0$ ;  $\hat{F}$  is een positieve constante.

In dit geval is de bewegingsvergelijking:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + bx = \hat{F} \cos(\omega t). \quad (13.7)$$

De oplossing van deze niet-homogene lineaire differentiaalvergelijking is de som van een particuliere oplossing en een complementaire oplossing, dat is de oplossing van de homogene differentiaalvergelijking (13.1).

Bedenken we dat, wat ook de oplossing van (13.1) moge zijn, deze altijd (met uitzondering van het *ongedempte* geval) tendeert naar  $x = 0$  voor  $t \rightarrow \infty$ , dan is het niet moeilijk in te zien dat we de particuliere oplossing moeten zoeken als een oplossing die de beweging beschrijft, lang nadat de *opgelegde kracht*  $\hat{F} \cos(\omega t)$  is begonnen, op het systeem te werken, dus lang na  $t = 0$ .

In dat geval kunnen we ons niet anders voorstellen dan een periodieke beweging waarbij  $x$  op dezelfde wijze als  $F_x$  met de tijd varieert, met dien verstande dat er wel een *faseverschil*  $\varphi$  zal bestaan tussen  $F_x$  en  $x$ . Daarom *proberen* we als oplossing van (13.7):

$$x = \hat{x} \cos(\omega t - \varphi). \quad (13.8)$$

Dit 'proberen' houdt in, dat we (13.8) invullen in (13.7) waarna we een relatie overhouden met vele sinussen en cosinussen. Door te bedenken dat deze relatie op elk tijdstip  $t$  (lang na  $t = 0$ ) moet gelden, kunnen we er achter komen, welke waarde we voor  $\varphi$  en voor  $\hat{x}$  dienen te kiezen, wil (13.8) inderdaad een oplossing van (13.7) zijn.

De *complexe rekenwijze* is echter overzichtelijker. Daartoe redeneren we als volgt: als  $x = \hat{x} \cos(\omega t - \varphi)$  een oplossing is van (13.7), dan is  $x = \hat{x} \sin(\omega t - \varphi)$  een oplossing van dezelfde vergelijking waarin  $\hat{F} \cos \omega t$  is vervangen door  $\hat{F} \sin \omega t$ . Zo is  $\hat{x} \cos(\omega t - \varphi) + j \hat{x} \sin(\omega t - \varphi)$  (waarin  $j$  is gedefinieerd door  $j^2 = -1$ ) een oplossing van dezelfde vergelijking waarin  $\hat{F} \cos(\omega t)$  is vervangen door  $\hat{F} \cos \omega t + j \hat{F} \sin \omega t = \hat{F} e^{j\omega t}$  (*stelling van Euler*, zie § A21).

In plaats van rechtstreeks een particuliere oplossing van (13.7) te zoeken, kunnen we dus net zo goed proberen een oplossing te vinden van:

$$m\ddot{X} + r\dot{X} + bX = \mathbf{F} \quad (13.7a)$$

waarin  $\mathbf{F} = \hat{F} e^{j\omega t}$  en  $X = \hat{x} e^{j(\omega t - \varphi)} = \hat{x} \cos(\omega t - \varphi) + j \hat{x} \sin(\omega t - \varphi)$ .

Omdat  $\dot{X} = j\omega X$  en  $\ddot{X} = -\omega^2 X$ , leidt (13.7a) tot:

$$\begin{aligned} (-m\omega^2 + b) \hat{x} + j \omega r \hat{x} &= \hat{F} e^{j\varphi} \\ \Rightarrow (-m\omega^2 + b) \hat{x} + j \omega r \hat{x} &= \hat{F} (\cos \varphi + j \sin \varphi). \end{aligned}$$

De reële delen van linker- en rechterlid zijn aan elkaar gelijk; de imaginaire delen eveneens.

$$\Rightarrow \begin{cases} (-m\omega^2 + b) \hat{x} = \hat{F} \cos \varphi. \\ \omega r \hat{x} = \hat{F} \sin \varphi. \end{cases}$$

Deelt men beide vergelijkingen op elkaar, dan blijkt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega r}{-m\omega^2 + b} = \frac{2\omega\alpha}{-\omega^2 + \omega_0^2} \quad (13.9)$$

Kwadrateert men beide vergelijkingen om ze daarna bij elkaar op te tellen, dan blijkt:

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}}{\sqrt{(-m\omega^2 + b)^2 + \omega^2 r^2}} = \frac{\hat{F}/m}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4\omega^2 \alpha^2}} \quad (13.10)$$

Uit het voorgaande volgt: *Als* we voor  $\varphi$  en  $\hat{x}$  de door (13.9) en (13.10) gegeven

waarden *kiezen*, dan is (13.8) de gezochte particuliere oplossing van (13.7). Deze wordt ook wel de *stationaire oplossing* genoemd, omdat (13.8) een *ongedempte* harmonische trilling beschrijft. Merk op dat (13.8) geen constanten bevat die door de beginsituatie worden bepaald (men drukt dit weleens zo uit: ‘De stationaire bewegingstoestand is de beweging van een systeem dat vergeten is, hoe het is begonnen’).

(N.B. In de stationaire toestand is het gemiddelde vermogen, door de opgelegde kracht afgegeven aan het trillende systeem, even groot als het gemiddelde vermogen dat door de damping wordt gedissipeerd; zie § 13.10).

De volledige oplossing van (13.7) is, zoals eerder vermeld, de oplossing van de homogene vergelijking (13.1) plus de stationaire oplossing. Voor een zwak gedempt systeem dus:

$$x = A e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t + \beta) + \hat{x} \cos(\omega t - \varphi).$$

Voor  $t \rightarrow \infty$  blijft alleen de stationaire oplossing over (het systeem ‘heeft de stationaire toestand bereikt’). De ingewikkelde trillingsbeweging bij kleine  $t$  wordt het *inschakelverschijnsel* genoemd.

Omdat  $\sin \varphi$  in elk geval positief is (immers  $\omega \hat{x} = \hat{F} \sin \varphi$ ), volgt uit (13.9) voor het faseverschil  $\varphi$  tussen  $F_x$  en  $x$ :

$$\varphi = \arctan \left( \frac{2\omega\alpha}{-\omega^2 + \omega_0^2} \right) \text{ voor } \omega < \omega_0; \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ voor } \omega = \omega_0;$$

$$\varphi = \pi - \arctan \left( \frac{2\omega\alpha}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \text{ voor } \omega > \omega_0.$$

Voor het faseverschil tussen  $F_x$  en de snelheid  $v_x$  gebruikt men het symbool  $\delta$ ; nu is

$$v_x = \dot{x} = -\omega \hat{x} \sin(\omega t - \varphi) = +\omega \hat{x} \cos\left(\frac{1}{2}\pi + \omega t - \varphi\right),$$

$$\text{en dus: } v_x = \hat{v} \cos(\omega t - \delta) \text{ waarin } \hat{v} = \omega \hat{x} \text{ en } \delta = \varphi - \frac{1}{2}\pi.$$

### c. De kracht is niet harmonisch maar wel periodiek:

$$F_x = \sum_1^{\infty} \hat{F}_n \cos(n\omega t + \alpha_n) \quad \text{waarin } n \in \mathbb{N}^+ \text{ (zie ook § 13.1).}$$

De stationaire oplossing van de bewegingsvergelijking

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + bx = \sum_1^{\infty} \hat{F}_n \cos(n\omega t + \alpha_n)$$

is dan:  $x = \sum_1^{\infty} \hat{x}_n \cos(n\omega t + \beta_n)$

waarin  $\hat{x}_n = \frac{\hat{F}_n}{\sqrt{\{-m(n\omega)^2 + b\}^2 + (n\omega)^2 r^2}}$

en  $\beta_n = \alpha_n - \arctan\left(\frac{(n\omega)r}{-m(n\omega)^2 + b}\right)$ .

Hierbij is aangenomen dat het superpositiebeginsel geldt, m.a.w. het systeem “gedraagt zich lineair”.

### 13.7. Resonantie

**a.** Men spreekt van *amplitude-resonantie* als de gedwongen frequentie  $\omega$  een zodanige waarde heeft dat  $\hat{x}$  maximaal is. Uit (13.10) blijkt dat deze resonantie-(hoek-)frequentie  $\omega_r$  gelijk is aan:

$$\sqrt{\frac{b}{m} - \frac{r^2}{2m^2}}, \quad (13.11)$$

of ook, met  $\omega_0 = \sqrt{b/m}$  en  $\alpha = r/2m$ :

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}.$$

(Merk op dat de resonantiefrequentie *niet* gelijk is aan de eigenfrequentie

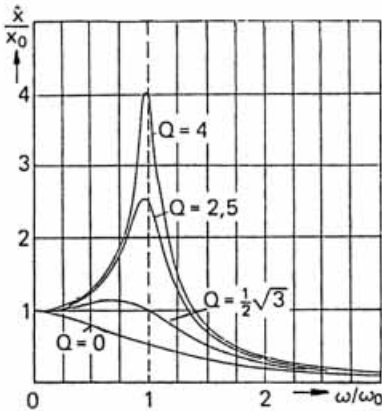
$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.)$$

Voor  $\omega = \omega_r$  heeft  $\hat{x}$  de waarde  $\hat{F}/r\omega_1$  (Ga dit na!).

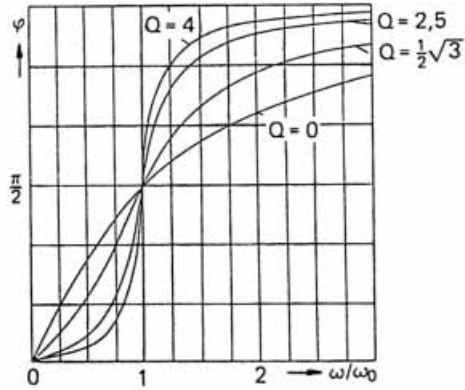
Uit (13.11) is direct duidelijk dat amplitude-resonantie alleen kan optreden bij zwak gedempte systemen waarvan  $r < \sqrt{2mb}$  dus waarvan de kwaliteit  $Q > 0,5$  (voor  $Q \stackrel{\text{def}}{=} \omega_1\tau = \omega_1/2\alpha$ ).

In figuur 13.10 zijn enige diagrammen van amplitude tegen frequentie geschetst voor verschillende waarden van  $Q$ . Terwille van de onderlinge vergelijkbaarheid zijn dimensieloze variabelen gebruikt (voor de abscis:  $\omega/\omega_0$  waarin  $\omega_0$  de eigenfrequentie van het ongedempte systeem is; voor de ordinaat:  $\hat{x}/x_0$  waarin  $x_0$  de uitwijking ten gevolge van een constante kracht  $\hat{F}$  zou zijn:  $x_0 = \hat{F}/b$ ).

Aan figuur 13.10 zien we direct dat  $\omega_r$  voor kleine  $Q$  belangrijk kleiner is dan  $\omega_0$ ; voor grote  $Q$  is  $\omega_r \approx \omega_0$ . Voorts valt op dat de resonantiepiek des te scherper is naarmate  $Q$  groter is.



Figuur 13.10.



Figuur 13.11.

Bij zeer grote waarden van  $\omega$  is de amplitude van de gedwongen trillingen zeer klein (voor elke  $Q$ ); het trillende systeem blijft dan vrijwel in rust.

**b.** Uit wat aan het eind van § 13.6, onderdeel b, is opgemerkt, blijkt dat voor het faseverschil  $\delta$  tussen  $F_x$  en  $v_x$  geldt  $\delta = 0$  voor  $\omega = \omega_0$  (men spreekt dan van *faseresonantie*);  $\delta$  is negatief voor  $\omega < \omega_0$  (bij kleine  $\omega$  loopt de snelheid dus in fase vóór op de dwingende kracht) en positief voor  $\omega > \omega_0$ .

Men spreekt van *snelheidsresonantie* als de gedwongen frequentie  $\omega$  een zodanige waarde heeft dat  $\hat{v}$  (d.w.z.  $\omega \hat{x}$ ) maximaal is. Deze eis komt erop neer dat

$$\frac{\hat{F} / m}{\sqrt{\left(-\omega + \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)^2 + 4\alpha^2}}$$

maximaal moet zijn. Het is evident dat aan deze eis voldaan is indien  $\omega = \omega_0$ .

*Snelheidsresonantie is dus identiek met faseresonantie!*

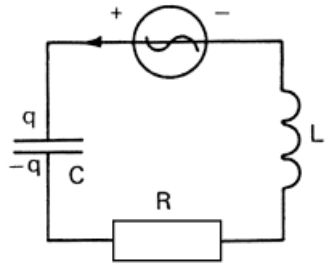
In figuur 13.11 is  $\varphi$  uitgezet tegen  $\omega/\omega_0$  voor verschillende waarden van  $Q$ . Aan de figuur valt op dat  $\varphi \approx 0$  voor kleine waarden van  $\omega$  (het systeem volgt de opgelegde kracht zonder noemenswaardig faseverschil) terwijl  $\varphi \rightarrow \pi$  voor grote waarden van  $\omega$  (in dat geval is het systeem dus vrijwel in tegenfase met de opgelegde kracht!).

### 13.8. Elektrisch analogon (II); impedantie

Men sluit een sinuswisselspanningsbron (bronspanning  $u = \hat{u} \cos \omega t$ ) aan op een serieschakeling van een condensator (capaciteit  $C$ ), een weerstand  $R$  en een spoel (zelfinductie  $L$ ) waarvan de weerstand reeds is opgenomen in  $R$ ; zie figuur 13.12.

$\omega$  is niet extreem groot, dat wil zeggen de golflengte van elektromagnetische golven met cirkelfrequentie  $\omega$  is heel groot, in vergelijking met de afmetingen van het circuit. Het plus- en het minteken geven aan, bij welke polariteit we  $u$  positief rekenen; het pijltje geeft aan, bij welke stroomrichting we de stroomsterkte  $i$  positief rekenen.

Volgens de tweede wet van Kirchoff geldt:



Figuur 13.12.

$$u - \frac{q}{C} - iR - L \frac{di}{dt} = 0 \quad \text{met } i = \frac{dq}{dt}$$

$$\Rightarrow L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \hat{u} \cos(\omega t). \quad (13.12)$$

De relatie (13.12) is volledig analoog met (13.7), indien men de volgende substituties uitvoert:

$m \rightarrow L$ ,  $r \rightarrow R$ ,  $b \rightarrow 1/C$  en  $F \rightarrow \hat{u}$ .

De stationaire oplossing van (13.12) is dan ook te schrijven als:

$$q = \hat{q} \cos(\omega t - \varphi)$$

waarin  $\varphi$  en  $\hat{q}$  gevonden kunnen worden met behulp van (13.9) en (13.10), mits bovengenoemde substituties in acht worden genomen.

Bij elektrische netwerken zoals dat van figuur 13.12 is men echter in het algemeen meer geïnteresseerd in de *stroomsterkte* dan in de lading (van de condensator). Voor deze stroomsterkte geldt (in de stationaire toestand):

$$i = \hat{i} \cos(\omega t - \delta)$$

waarin  $\delta$  het faseverschil tussen spanning en stroom is.

Omdat  $i = dq/dt$  is

$$\begin{aligned} \hat{i} \cos(\omega t - \delta) &= -\omega \hat{q} \sin(\omega t - \varphi) \\ &= +\omega \hat{q} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega t - \varphi\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{i} = \omega \hat{q} \quad \text{en} \quad \delta = \varphi - \frac{\pi}{2}.$$

Voor  $u$  kan men ook schrijven:  $u = \text{Re}(U)$  waarin  $U = \hat{u} e^{j\omega t}$ .

Voor  $i$  kan men ook schrijven:  $i = \text{Re}(I)$  waarin  $I = \hat{i} e^{j(\omega t - \delta)}$ .

Uit  $i = dq/dt$  volgt:

$$\ddot{q} = \text{Re}(j\omega I), \quad \dot{q} = \text{Re}(I) \quad \text{en} \quad q = \text{Re}\left(\frac{I}{j\omega}\right) + \text{constante};$$

deze constante is echter nul in het stationaire geval.

Analoog aan de overgang van (13.7) naar (13.7a) kunnen we ook, in plaats van (13.12) rechtstreeks op te lossen voor het stationaire geval, kijken naar de oplossing van:

$$j\omega LI + RI + \frac{I}{j\omega C} = U. \quad (13.12a)$$

De verhouding  $U/I$  noemt men de *complexe impedantie*  $Z$  van de serieschakeling van condensator, weerstand en spoel. Blijkbaar is  $Z = j\omega L + R + 1/j\omega C$ .

Onder de *absolute impedantie*  $|Z|$  van de serieschakeling verstaat men

$$\sqrt{ZZ^*} = \sqrt{\frac{UU^*}{II^*}} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}}.$$

Hierin is  $Z^*$  de *complex geconjugeerde* van  $Z$ .

$$\Rightarrow |Z| = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}.$$

Men spreekt van *stroomresonantie* als de opgedwongen frequentie  $\omega$  een zodanige waarde heeft dat  $\hat{i}$  maximaal is (bij gegeven  $\hat{u}$ ).  $|Z|$  is dan minimaal  $\Rightarrow d|Z|/d\omega = 0$  voor de bedoelde waarde van  $\omega$ .

$$\Rightarrow \text{Stroomresonantie heeft plaats voor } \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

$\hat{i}$  heeft dan de waarde  $\hat{u}/R$ ;  $\delta$  is dan nul (de stroom loopt dan in fase vóór noch achter op de spanning). Merk op dat *stroomresonantie* overeenkomt met het mechanische geval van *snelheidsresonantie*.

Ook in het mechanische geval kan men het begrip *impedantie* invoeren. Hiertoe beschouwen we de *snelheid*  $\dot{x}$  van het trillende deeltje. Hiervoor geldt:

$$\dot{x} = \hat{v} \cos(\omega t - \delta)$$

waarin  $\delta$  het faseverschil tussen de opgelegde kracht en de snelheid is. Omdat

$$\dot{x} = -\omega \hat{x} \sin(\omega t - \varphi) = +\omega \hat{x} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega t - \varphi\right)$$

is blijkbaar:  $\hat{v} = \omega \hat{x}$  terwijl  $\delta = \varphi - \frac{\pi}{2}$ ; *snelheidsresonantie* treedt op bij  $\delta = 0$ .

Gebruikmakend van de *complexe notatie*:  $\dot{x} = \text{Re}(V)$  waarin  $V = \hat{v} e^{j(\omega t - \delta)}$  blijkt:

$$\ddot{x} = \text{Re}(j\omega V) \quad \text{en} \quad x = \text{Re}\left(\frac{V}{j\omega}\right) + \text{constante};$$

deze constante is echter nul in het stationaire geval.

Hiermee kan (13.7) voor het stationaire geval worden vervangen door:

$$j\omega mV + rV + \frac{bV}{j\omega} = F. \quad (13.7a)$$

Onder de *complexe mechanische impedantie*  $Z_m$  van het trillende systeem zullen we verstaan:

$$Z_m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F}{V}.$$

Blijkbaar is  $Z_m = j\omega m + r + b/j\omega$ .

De *absolute* mechanische impedantie  $|Z_m|$  is als volgt gedefinieerd:

$$|Z_m| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{Z_m Z_m^*} = \sqrt{\frac{\mathbf{F}\mathbf{F}^*}{\mathbf{V}\mathbf{V}^*}}$$

(waarin  $\mathbf{F}^*$  de complex geconjugeerde van  $\mathbf{F}$  en  $\mathbf{V}^*$  de complex geconjugeerde van  $\mathbf{V}$  is).

$$\Rightarrow |Z_m| = \frac{\widehat{F}}{\widehat{v}} = \sqrt{\left(m\omega - \frac{b}{\omega}\right)^2 + r^2}.$$

### 13.9. Energetische beschouwing van de gedwongen trilling

Bij verschijnselen waarbij oscillerende systemen zijn betrokken, staat de geobserveerde grootte meestal in nauw verband met de energie van het systeem. Typische voorbeelden zijn de radio, de trilholt, de absorptie van lichtgolven door materie. De energetische beschouwing in deze paragraaf blijft beperkt tot een mechanisch systeem.

Voor het vermogen  $P$ , afgegeven door de opgelegde kracht, geldt:

$$\begin{aligned} P &= \vec{F} \cdot \vec{v} = \widehat{F} \cos(\omega t) \cdot \widehat{v} \cos(\omega t - \delta) \\ &= \widehat{F} \widehat{v} \cos(\omega t) \{ \cos(\omega t) \cos \delta + \sin(\omega t) \sin \delta \}. \end{aligned}$$

Het gemiddelde vermogen  $\langle P \rangle$ , afgegeven door de opgelegde kracht, is:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T P \, dt = \frac{\widehat{F}\widehat{v}}{T} \int_0^T \{ (\cos^2(\omega t) \cos \delta + \cos(\omega t) \sin(\omega t) \sin \delta) \} \, dt = \\ &= \frac{\widehat{F}\widehat{v}}{T} \cdot \frac{1}{2} T \cos \delta = \frac{1}{2} \widehat{F} \widehat{v} \cos \delta. \end{aligned} \quad (13.13)$$

Het *gedissipeerde* vermogen  $P_d$  is  $r\dot{x}^2$  (zie § 13.3, laatste regel).

$$\Rightarrow P_d = r \widehat{v}^2 \cos^2(\omega t - \delta).$$

Het gemiddeld gedissipeerde vermogen is derhalve:

$$\langle P_d \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P \, dt = \frac{r\widehat{v}^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - \delta) \, dt = \frac{1}{2} r \widehat{v}^2. \quad (13.14)$$

In een stationaire situatie is het, gelet op de algemene wet van behoud van energie, niet denkbaar dat er gemiddeld meer of minder vermogen gedissipeerd zou worden dan aan het systeem wordt toegevoerd. (13.13) moet dus wel hetzelfde voorstellen als (13.14).

*Bewijs*

$$\cos \delta = \sin \varphi = \frac{\omega r}{\sqrt{(-m\omega^2 + b)^2 + \omega^2 r^2}}; \text{ zie (13.9)}$$

Voorts is

$$\hat{v} = \omega \hat{x} = \frac{\omega \hat{F}}{\sqrt{(-m\omega^2 + b)^2 + \omega^2 r^2}}.$$

Hieruit volgt dat  $\hat{F} \cos \delta = r \hat{v}$  en dus ook  $\frac{1}{2} \hat{F} \hat{v} \cos \delta = \frac{1}{2} r \hat{v}^2$ , en dat was wat we wilden bewijzen!

*Conclusie*

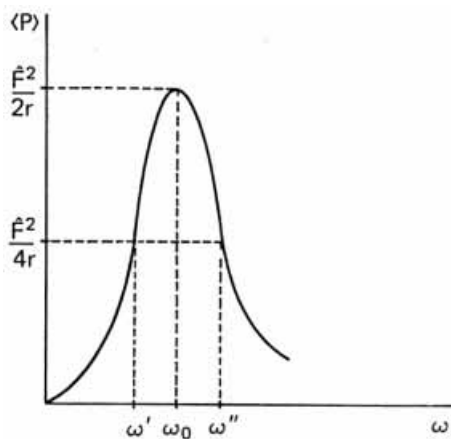
$$\langle P \rangle = \langle P_d \rangle.$$

### 13.10. Absorptiekromme, bandbreedte en kwaliteit; absorptie en dispersie

Uit (13.14) blijkt dat het gedissipeerde vermogen maximaal is bij snelheidsresonantie, dus als  $\omega = \omega_0$ . Ook kan men zeggen dat het door het systeem *geabsorbeerde* vermogen dan maximaal is (immers:  $\langle P \rangle = \langle P_d \rangle$ ).

Bij  $\omega = \omega_0$  is  $\hat{v} = \frac{\hat{F}/m}{2\alpha} = \frac{\hat{F}}{r}$  zodat:  $\langle P_d \rangle = \frac{1}{2} \frac{\hat{F}^2}{r}$ .

In figuur 13.13 is de *absorptiekromme* weergegeven, dit is het door het systeem geabsorbeerde vermogen  $\langle P \rangle$ , uitgezet tegen  $\omega$ .



Figuur 13.13.

Onder de *bandbreedte* van de absorptiekromme verstaat men  $\omega'' - \omega'$ , dit is het verschil tussen de hoekfrequenties waarbij het geabsorbeerde vermogen de helft is

van het maximaal geabsorbeerde vermogen.

### Stelling

De kwaliteit  $Q$  is gelijk aan

$$\frac{\omega_1}{\omega'' - \omega'}$$

### Bewijs

Als  $\omega = \omega'$  of  $\omega = \omega''$  dan is  $\langle P \rangle = \frac{1}{4} \hat{F}^2 / r$ .

$$\Rightarrow \frac{1}{2} r \hat{v}^2 = \frac{1}{4} \frac{\hat{F}^2}{r} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} r \omega^2 \hat{F}^2 / m}{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4\omega^2 \alpha^2} = \frac{1}{4} \frac{\hat{F}^2}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{2r^2 \omega^2 / m^2}{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4\omega^2 \alpha^2} = 1$$

$$\Rightarrow (\text{met } \alpha = r/2m) \quad 8\omega^2 \alpha^2 = (-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4\omega^2 \alpha^2 \Rightarrow 4\omega^2 \alpha^2 = (-\omega^2 + \omega_0^2)^2$$

$$\Rightarrow 2\alpha\omega = -\omega^2 + \omega_0^2 \quad \vee \quad 2\alpha\omega = \omega^2 - \omega_0^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 + 2\alpha\omega - \omega_0^2 = 0 \quad \vee \quad \omega^2 - 2\alpha\omega - \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega' = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} \quad \text{en} \quad \omega'' = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}$$

### Conclusie

$$\omega'' - \omega' = 2\alpha.$$

Nu is  $Q$  gedefinieerd als

$$\omega_1 \tau = \frac{\omega_1}{2\alpha} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\omega_1}{\omega'' - \omega'}.$$

N.B. Voor hoge kwaliteit is  $\omega_1 \approx \omega_0$  en dus:  $Q \approx \omega_0 / (\omega'' - \omega')$ .

Aan deze relatie kan men goed zien dat ook de absorptie-resonantiepiek des te scherper is naarmate  $Q$  groter is; kent men de vorm van de resonantiepiek, dan kan men  $Q$  hiermee berekenen.

De stationaire oplossing van (13.7) is, zoals bekend:  $x = \hat{x} \cos(\omega t - \varphi)$ ; dit is de relatie (13.8). Omdat  $\cos(\omega t - \varphi) = \cos(\omega t) \cdot \cos \varphi + \sin(\omega t) \cdot \sin \varphi$  kan men ook schrijven:

$$x = A \sin(\omega t) + D \cos(\omega t)$$

waarin  $A = \hat{x} \sin \varphi$  en  $D = \hat{x} \cos \varphi$ .

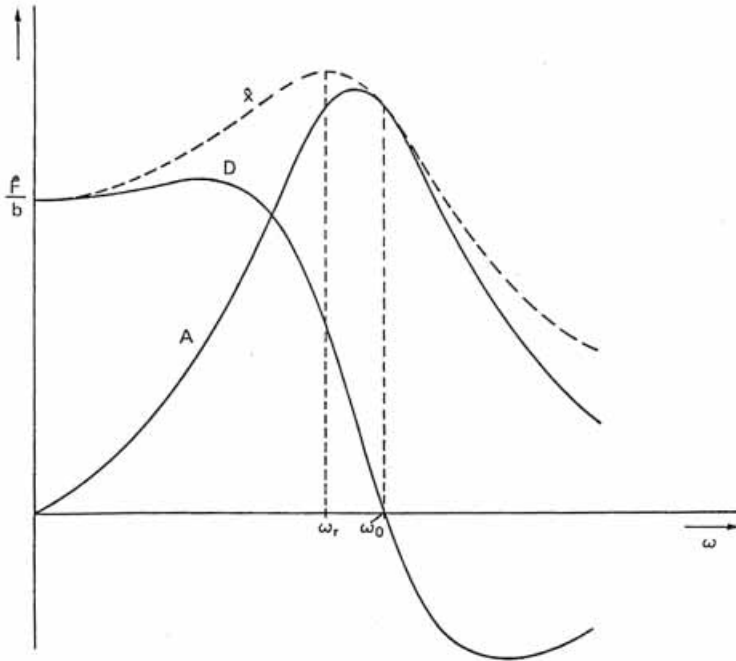
Het symbool A heeft te maken met *absorptie* en het symbool D met *dispersie*; deze begrippen komen nog ter sprake.

De term  $A \sin(\omega t)$  loopt  $\frac{\pi}{2}$  in fase *achter* op de opgelegde kracht; de term  $D \cos(\omega t)$  is *in fase* met de opgelegde kracht.

Met behulp van (13.9) en (13.10) vinden we:

$$A = \frac{\widehat{F}\omega r}{(-m\omega^2 + b)^2 + \omega^2 r^2} \quad \text{en} \quad D = \frac{\widehat{F}(-m\omega^2 + b)}{(-m\omega^2 + b)^2 + \omega^2 r^2}.$$

In figuur 13.14 zijn  $\widehat{x}$ , A en D uitgezet tegen  $\omega$  (voor  $Q = 1,2$ ).



Figuur 13.14.

Het gemiddeld door het systeem geabsorbeerde vermogen  $\langle P \rangle$  is, volgens (13.13):

$$\frac{1}{2} \widehat{F} \widehat{v} \cos \delta = \frac{1}{2} \widehat{F} \omega \widehat{x} \sin \varphi = \frac{1}{2} \widehat{F} \omega A.$$

Voor  $\omega = \omega_0$  is  $\langle P \rangle$  maximaal; A bereikt zijn top bij een  $\omega$  die kleiner is dan  $\omega_0$ .

In de optica ziet men dat D te maken heeft met de voortplantingssnelheid van elektromagnetische golven in een medium (de gedwongen oscillator is dan een elektron in een atoom).

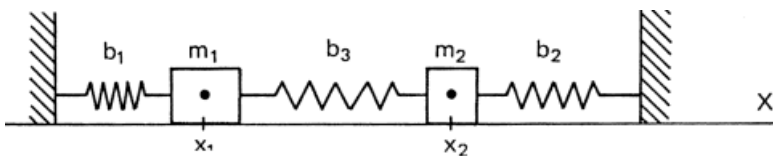
De helling van de D-curve is positief voor kleine  $\omega$ . De brekingsindex hangt dan van de frequentie van de elektromagnetische golven aldus af: bij grotere  $\omega$  kleinere brekingsindex (*anomale dispersie*).

In de buurt van  $\omega = \omega_0$  is de helling van de D-curve negatief; de brekingsindex is dan groter naarmate  $\omega$  groter is (*normale dispersie* of kleurschifting). Bij grote  $\omega$  is de dispersie weer anomaal.

### 13.11. Gekoppelde oscillatoren

In het voorgaande hebben we de gedwongen trillingen onderzocht die een oscillator uitvoert onder invloed van een periodiek veranderende kracht die er *door een ander systeem* op wordt uitgeoefend. We hebben daarbij uitdrukkelijk verondersteld dat het eerstgenoemde systeem geen terugwerking op het dwingende systeem heeft. Anders gezegd: het eerste systeem (het gedwongen systeem) absorbeert energie van het dwingende systeem, maar er stroomt geen energie terug van het eerste naar het tweede systeem (althans: deze terugstroming is verwaarloosbaar klein verondersteld). Oefenen de twee systemen echter wederzijds invloeden op elkaar uit die niet te verwaarlozen zijn, dan spreekt men van *gekoppelde trillingssystemen*. In dat geval is er een wederkerige overdracht van energie tussen beide systemen. Gekoppelde oscillatoren kennen we in verschillende gebieden van de natuurkunde en van de techniek. Voorbeelden zijn gekoppelde elektrische trillingsketens (inductieve en capacitieve koppelingen, zoals die onder andere in radio-ontvangers en in elektronische schakelingen voorkomen); vibraties van atomen in een molecuul en van ionen in een kristalrooster; trillingen van snaren (de trillingen van de deeltjes van de snaar zijn afhankelijk van elkaar). We beperken ons hier tot *ongedempte* trillingen van twee gekoppelde harmonische oscillatoren.

Om de gedachten te bepalen, beschouwen wij twee massa-veer systemen: een blok met massa  $m_1$  ligt op een volkomen glad horizontaal oppervlak en is d.m.v. een massaloze veer met veerconstante  $b_1$  bevestigd aan een vast punt. Een blok met massa  $m_2$  ligt op hetzelfde gladde oppervlak en is door middel van een massaloze veer met veerconstante  $b_2$  bevestigd aan een tweede vast punt. De blokken zijn door middel van een derde massaloze veer met veerconstante  $b_3$  met elkaar verbonden (zie figuur 13.15).



Figuur 13.15.

De plaatscoördinaten van de blokken (op de in de figuur aangegeven X-as) zijn  $x_1$  en  $x_2$ . Wij geven de evenwichtsstanden aan met  $x_{10}$  en  $x_{20}$ , en definiëren nu de *uitwijkingen*

$$u_1 \stackrel{\text{def}}{=} x_1 - x_{10} \quad \text{en} \quad u_2 \stackrel{\text{def}}{=} x_2 - x_{20}.$$

De bewegingsvergelijkingen luiden dan:

$$\text{en } \left. \begin{aligned} m_1 \ddot{u}_1 &= -b_1 u_1 - b_3(u_1 - u_2) \\ m_2 \ddot{u}_2 &= -b_2 u_2 + b_3(u_1 - u_2) \end{aligned} \right\} \quad (13.15)$$

Om deze twee differentiaalvergelijkingen waaraan gelijktijdig moet worden voldaan (*simultane* vergelijkingen) op te lossen, onderzoeken we eerst of het mogelijk is dat, als bijzonder geval, beide systemen harmonisch trillen met gelijke frequenties. A priori staat dat natuurlijk niet vast.

Wij zullen aantonen dat dit inderdaad mogelijk is en dat wij daarmee tevens de algemene oplossing van de vergelijkingen kunnen vinden!

Wij onderzoeken dus nu of er een oplossing van beide vergelijkingen bestaat van de gedaante:

$$u_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{en} \quad u_2 = A_2 \cos(\omega t + \psi)$$

waarin  $A_1$  en  $A_2$  positieve constanten zijn (amplitudes);  $\varphi$  en  $\psi$  zijn willekeurige reële constanten (beginfasen).

Door deze gesuggereerde oplossing in (13.15) in te vullen kunnen we nagaan of zo'n oplossing mogelijk is en zo ja, welke waarde  $\omega$  dan heeft.

Ook in dit geval wordt wel gebruik gemaakt van de *complexe notatie*. Dit heeft echter vooral zin als de op te lossen differentiaalvergelijkingen, behalve de nulde- en tweede-orde termen, ook een eerste-orde term bevatten (dus termen met  $\dot{u}_1$  resp.  $\dot{u}_2$ ). Daar dit in (13.15) niet het geval is, zullen wij hier *niet* de methode met complexe notatie toepassen.

Invullen in (13.15) geeft:

$$\left. \begin{aligned} (-m_1 \omega^2 + b_1 + b_3)u_1 &= b_3 u_2 \\ (-m_2 \omega^2 + b_2 + b_3)u_2 &= b_3 u_1 \end{aligned} \right\} \quad (13.16)$$

$$\Rightarrow \frac{b_3}{-m_1 \omega^2 + b_1 + b_3} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{-m_2 \omega^2 + b_2 + b_3}{b_3}, \quad (13.17)$$

$$\text{en dus: } b_3^2 = (m_1 \omega^2 - b_1 - b_3) \cdot (m_2 \omega^2 - b_2 - b_3). \quad (13.18)$$

Deze vierkantsvergelijking voor  $\omega^2$  heeft twee (positieve) oplossingen. Omdat  $\omega$  niet negatief kan zijn, zijn er dus ook twee oplossingen voor  $\omega$  die we respectievelijk  $\omega_1$  en  $\omega_2$  zullen noemen.

Gaan we uit van een bepaalde waarde voor  $A_1$  en  $\varphi$  dan geeft invullen van  $\omega_1$  of  $\omega_2$  in (13.16) de bijbehorende waarden van  $A_2$  en  $\psi$ .

De veronderstelling dat een harmonische beweging mogelijk is waarbij beide systemen dezelfde frequentie hebben (zo'n beweging wordt een *eigen trilling* van het

gekoppelde systeem genoemd) wordt hierdoor bevestigd.  $\omega_1$  en  $\omega_2$  worden de *eigenfrequenties* van het gekoppelde systeem genoemd.

Voor  $b_3 \rightarrow 0$  (*zwakke koppeling*) nadert (13.18) tot:

$$0 = (m_1\omega^2 - b_1)(m_2\omega^2 - b_2).$$

Hieruit volgt voor de eigenfrequenties in dit geval:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{b_1}{m_1}} \quad \text{en} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{b_2}{m_2}},$$

dat zijn de frequenties van de *ongekoppelde* systemen.

Als  $b_1/m_1 = b_2/m_2$  dan is er slechts één eigenfrequentie; in dat geval heet het zwak gekoppelde systeem tweevoudig *ontaard*.

Als  $b_3$  niet te verwaarlozen is, zijn  $\omega_1$  en  $\omega_2$  in elk geval verschillend; door de koppeling wordt de tweevoudige ontaarding van een systeem met  $b_1/m_1 = b_2/m_2$  dus opgeheven.

Het onderzoek van de algemene oplossing van de vergelijkingen (13.15) is zeer ingewikkeld. De typische bijzonderheden kunnen we echter ook ontdekken als we ons beperken tot een gekoppeld systeem waarbij  $m_1 = m_2 = m$  en  $b_1 = b_2 = b$ . In dat geval gaat (13.18) over in:

$$b_3^2 = (m\omega^2 - b - b_3)^2$$

$$\Rightarrow \quad b_3 = -m\omega^2 + b + b_3 \quad \text{of} \quad b_3 = +m\omega^2 - b - b_3.$$

De eerste mogelijkheid leidt tot:  $\omega_1 = \sqrt{b/m}$ .

De tweede mogelijkheid leidt tot:  $\omega_2 = \sqrt{\frac{b + 2b_3}{m}}$ .

Er zijn voor  $u_1$  dus twee onafhankelijke oplossingen, namelijk

$$u_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{en} \quad u_1 = B_1 \cos(\omega_2 t + \varphi_2);$$

de algemene oplossing voor  $u_1$  is derhalve:

$$u_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_1 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

waarin  $A_1$  en  $B_1$  positieve reële constanten zijn.

Evenzo is de algemene oplossing voor  $u_2$  van de vorm:

$$u_2 = A_2 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2).$$

De acht constanten  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\psi_1$  en  $\psi_2$  zijn niet onafhankelijk van elkaar. Zij moeten immers voldoen aan de relatie (13.15), waarin  $m_1 = m_2 = m$  en  $b_1 = b_2 = b$ .

Invullen van de algemene oplossingen van  $u_1$  en  $u_2$  in de eerste vergelijking van (13.15) geeft:

$$\begin{aligned} &(-m_1\omega_1^2 + b + b_3)A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + (-m_2\omega_2^2 + b + b_3)B_1 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = \\ &= b_3 \{ (A_2 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2)) \} \end{aligned}$$

dus, omdat  $\omega_1 = \sqrt{b/m}$  en  $\omega_2 = \sqrt{(b+2b_3)/m}$ :

$$\begin{aligned} &b_3 A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - b_3 B_1 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = \\ &= b_3 A_2 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + b_3 B_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2). \end{aligned} \quad (13.19a)$$

Invullen van de algemene oplossingen van  $u_1$  en  $u_2$  in de tweede vergelijking van (13.15) leidt tot:

$$\begin{aligned} &A_2 \cos(\omega_1 t + \psi_1) - B_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2) = \\ &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_1 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (13.19b)$$

Optellen van (13.19a) en (13.19b) geeft:  $B_1 = B_2$  en  $\psi_2 = \varphi_2 \pm \pi$ .

Aftrekken van (13.19a) en (13.19b) geeft:  $A_1 = A_2$  en  $\psi_1 = \varphi_1$ .

Hieruit volgt voor de uitwijkingen  $u_1$  en  $u_2$ :

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ u_2 &= A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - B \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (13.20)$$

Alleen als de verhouding  $\omega_1/\omega_2$  een *rationeel* getal is, stellen  $u_1$  en  $u_2$  *periodieke* bewegingen voor. In het algemeen echter zal de verhouding  $\omega_1/\omega_2$  geen rationeel getal zijn; de resulterende bewegingen van beide blokken zijn dan (hoewel te schrijven als som van twee harmonische bewegingen) *niet* periodiek!

De waarden van  $A$ ,  $B$ ,  $\varphi_1$  en  $\varphi_2$  worden bepaald door de begincondities. Wij zullen drie gevallen nader bekijken.

**a.** Op tijdstip  $t = 0$  is  $u_1 = l$ ,  $u_2 = l$ ,  $\dot{u}_1 = 0$  en  $\dot{u}_2 = 0$ .

Beide massa's hebben dus op  $t = 0$  even grote uitwijkingen; ze worden beide op  $t = 0$  zonder beginsnelheid losgelaten. Uit (13.20) volgt dan:

$$\left. \begin{aligned} l &= A \cos \varphi_1 + B \cos \varphi_2 \\ l &= A \cos \varphi_1 - B \cos \varphi_2 \end{aligned} \right\}$$

en, na differentiëren van (13.20) naar  $t$ :

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\omega_1 A \sin \varphi_1 - \omega_2 B \sin \varphi_2 \\ 0 &= -\omega_1 A \sin \varphi_1 + \omega_2 B \sin \varphi_2 \end{aligned} \right\}$$

Uit deze vier vergelijkingen volgt:  $\varphi_1 = 0$ ;  $A = l$ ;  $B = 0$ .

$\Rightarrow u_1 = u_2 = l \cos(\omega_1 t)$ ; de massa's trillen harmonisch met cirkelfrequentie  $\omega_1$  in fase met elkaar, met even grote amplitudes. De middelste veer (de koppeling) zou in dit geval dus gerust mogen ontbreken!

**b.** Op  $t = 0$  is  $u_1 = -l$ ,  $u_2 = l$ ,  $\dot{u}_1 = 0$  en  $\dot{u}_2 = 0$ .

Beide massa's hebben dus op  $t = 0$  even grote, maar tegengesteld gerichte, uitwijkingen. Ze worden beide op  $t = 0$  zonder beginsnelheid losgelaten.

Met behulp van (13.20) vinden we in dit geval:  $\varphi_2 = \pi$ ;  $A = 0$ ;  $B = l$ .

$\Rightarrow u_1 = -l \cos(\omega_2 t)$  en  $u_2 = +l \cos(\omega_2 t)$ ; de massa's trillen harmonisch met cirkelfrequentie  $\omega_2$  in tegenfase met elkaar, weer met even grote amplitudes.

**c.** Op  $t = 0$  is  $u_1 = l$ ,  $u_2 = 0$ ,  $\dot{u}_1 = 0$  en  $\dot{u}_2 = 0$ .

Alleen  $m_1$  heeft dus een uitwijking  $l$  op tijdstip  $t = 0$ ;  $m_2$  bevindt zich dan in de evenwichtsstand. Beide worden op  $t = 0$  zonder beginsnelheid losgelaten.

Met behulp van (13.20) vinden we nu:  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ;  $A = B = \frac{1}{2} l$ .

Bij deze begincondities geldt dus:

$$\left\{ \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} l \cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2} l \cos(\omega_2 t). \\ u_2 &= \frac{1}{2} l \cos(\omega_1 t) - \frac{1}{2} l \cos(\omega_2 t). \end{aligned} \right.$$

Dit geval is extra interessant als  $\omega_2$  maar weinig groter is dan  $\omega_1$  (*zwakke koppeling*:  $b_3 \ll b$ ). Immers:

$$u_1 = \frac{1}{2} l (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = l \left\{ \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \right\} \cdot \left\{ \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \right\}.$$

We kunnen de beweging van blok 1 dus beschrijven als een *harmonische trilling* met cirkelfrequentie  $\omega = (\omega_2 + \omega_1)/2$  waarbij de *amplitude*, dat wil zeggen

$$2l \cos \frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1) t,$$

langzaam in de tijd varieert (figuur 13.16a): de beweging van blok 1 vertoont *zwevingen*. Onder de *zweivingsduur* verstaat men de tijd waarin de *trillingsenergie* van blok 1, na maximaal te zijn geweest, opnieuw maximaal wordt.

Deze trillingsenergie is evenredig met het kwadraat van de amplitude, dus met  $\cos^2 \left\{ \frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1) t \right\}$ .

De tijdsduur tussen twee achtereenvolgende maxima van deze functie is  $2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$ , zoals men gemakkelijk zelf kan nagaan.

De *zweivingsfrequentie* (het aantal zwevingen per s) is dus

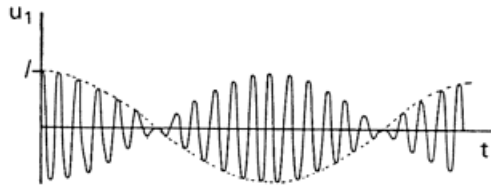
$$\frac{1}{2\pi}(\omega_2 - \omega_1) = \nu_2 - \nu_1.$$

Voor de beweging van blok 2 geldt:

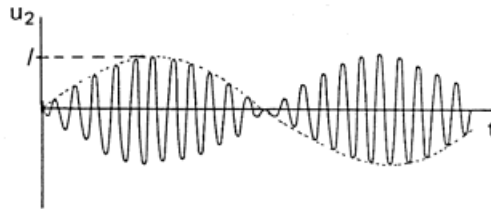
$$u_2 = \frac{1}{2}l(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = l \left\{ \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t \right\} \cdot \left\{ \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)t \right\}.$$

De beweging van blok 2 lijkt dus sterk op die van blok 1, met dien verstande, dat de 'harmonische' trilling van blok 2  $\frac{\pi}{2}$  in fase achterloopt op die van blok 1, terwijl ook de 'amplitude' van blok 2  $\frac{\pi}{2}$  in fase achterloopt op die van blok 1. Zie figuur 13.16b. Daar de energie van een harmonische oscillator evenredig is met het kwadraat van de amplitude, is er dus een periodieke uitwisseling van energie tussen de twee oscillatoren!

Figuur 13.16a.



Figuur 13.16b.



#### *Opmerking*

Bij (13.20) is vermeld dat  $u_1$  en  $u_2$  slechts dan *periodieke* bewegingen voorstellen als de verhouding  $\omega_1/\omega_2$  rationeel is. Zelfs als dat het geval is, stellen  $u_1$  en  $u_2$  nog lang geen *harmonische* trillingen voor. Wel volgt uit (13.20) dat het *verschil*  $u_2 - u_1$  en ook de *som*  $u_2 + u_1$  harmonisch met de tijd variëren:

$$u_2 - u_1 = -2B \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

en

$$u_2 + u_1 = +2A \cos(\omega_1 t + \varphi_1).$$

## Overzicht van hoofdstuk 13

Lineair gedempte vrije trilling:	$m\ddot{x} + r\dot{x} + bx = 0.$
Afkortingen:	$\omega_0 = \sqrt{\frac{b}{m}}$ en $\alpha = \frac{r}{2m}$ ; $\omega_1 = \sqrt{ \omega_0^2 - \alpha^2 }$
Zwakke demping:	$x = A e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t + \beta).$
Kritieke demping:	$x = (At + B) e^{-\alpha t}.$
Sterke demping:	$x = A e^{-\alpha t} \cosh(\omega_1 t + \beta).$
Zwakke demping:	$A e^{-\alpha t}$ is de <i>amplitude</i> ; $\omega_1$ is de <i>eigen(hoek-)frequentie</i> ; $T_1 = 2\pi/\omega_1$ is de <i>trillingstijd</i> ; Relaxatietijd $\tau = \frac{1}{2\alpha}$ ; Kwaliteit $Q = \omega_1 \tau$ ; Dempingsverhouding is $e^{\alpha T_1}$ ; $\Lambda = \alpha T_1.$
Gedwongen trilling:	$m\ddot{x} + r\dot{x} + bx = F_x(t).$
Voor harmonisch variërende $F_x$ :	$m\ddot{x} + r\dot{x} + bx = \hat{F} \cos(\omega t).$
Stationaire oplossing:	$x = \hat{x} \cos(\omega t - \varphi)$ waarin $\hat{x} = \frac{\hat{F}}{\sqrt{(-m\omega^2 + b)^2 + \omega^2 r^2}},$ terwijl $\text{tg } \varphi = \frac{\omega r}{-m\omega^2 + b}.$
Amplitude-resonantie:	$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$ ; $Q > 0,5.$
Snelheidsresonantie:	bij $\omega = \omega_0.$
Gemiddeld vermogen, afgegeven door de opgelegde kracht:	$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \hat{F} \hat{v} \cos \delta$ waarin $\hat{v}$ = maximale snelheid en $\delta$ = faseverschil tussen opgelegde kracht en snelheid.
Gekoppelde ongedempte oscillatoren:	Twee eigenfrequenties $\omega_1$ en $\omega_2.$
Voor $m_1 = m_2 = m$	
en $b_1 = b_2 = b$ :	$\omega_1 = \sqrt{\frac{b}{m}}$ en $\omega_2 = \sqrt{\frac{b + 2b_3}{m}};$ $\begin{cases} u_1 = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \\ u_2 = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - B \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{cases}$