

# 15

## Vloeistofmechanica

Een kenmerkend verschil tussen vaste stoffen en vloeistoffen is het ontbreken van een eigen vorm bij de laatste. Elke hoeveelheid vloeistof neemt de vorm aan van het vat waarin het zich bevindt. We kunnen hieruit concluderen dat de cohesie in een vloeistof veel geringer is dan in een vaste stof. Het feit dat vloeistoffen kunnen stromen hangt hiermee natuurlijk samen: delen van een vloeistof zijn blijkbaar veel gemakkelijker ten opzichte van elkaar te verschuiven dan delen van een vaste stof. Met andere woorden: de schuifspanningen in een vloeistof zijn veel zwakker dan die in een vaste stof die op vormverandering wordt belast.

Een kenmerkend verschil tussen gassen en vloeistoffen is dat bij gassen ook nog een eigen oppervlak ontbreekt. Elke hoeveelheid gas neemt het gehele ter beschikking staande volume in beslag. De cohesie in gassen is dus nog veel kleiner dan die in vloeistoffen.

Vrijwel alles wat we ‘vloeistofmechanica’ noemen is ook op gassen van toepassing; ‘mechanica van fluïda’ zou dus eigenlijk een betere benaming zijn omdat men zowel gas als vloeistof een fluïdum kan noemen.

Een vloeistof waarin nooit schuifspanningen kunnen optreden wordt een *wrijvingsloze vloeistof* genoemd. Hoewel men gemakkelijk schenkbaar vloeistoffen als water, alcohol en benzine soms wel als een min of meer wrijvingsloze vloeistof beschrijft, zal het duidelijk zijn dat volkomen wrijvingsloze vloeistoffen onder normale omstandigheden niet bestaan.

De veronderstelling ligt voor de hand dat een ‘ideaal gas’ (dat is een gas waarvoor de wetten van Boyle en Gay-Lussac exact gelden) wel een wrijvingsloos fluïdum zal zijn. De kinetische gastheorie leert ons echter dat schuifspanningen in stromende gassen wel degelijk voorkomen en meestal niet te verwaarlozen zijn. Een ideaal gas is dus *geen* wrijvingsloos fluïdum!

*Superfluïde helium* is een echte wrijvingsloze vloeistof. Het normale kookpunt van helium ligt bij 4,3 K. Door vloeibaar helium te laten koken onder lage druk kan de temperatuur worden verlaagd. Onder 2,2 K (het ‘ $\lambda$ -punt’) vertoont de meest voorkomende helium-isotoop,  $^4\text{He}$ , een eigenaardig gedrag dat alleen kan worden verklaard door aan te nemen dat een deel van de vloeistof volkomen wrijvingsloos (‘superfluïde’) is. Theoretisch is dit verschijnsel slechts te verklaren m.b.v. de wetten van de quantum-fysica. De veel zeldzamer isotoop  $^3\text{He}$  kent ook een superfluïde toestand, maar pas bij extreem lage temperaturen (enkele milli-K).

Schuifspanningen treden op in stromende vloeistoffen indien er snelheidsverschillen

zijn tussen elkaar rakende lagen. Door de moleculaire bewegingen ontstaat er dan impulsuitwisseling tussen de lagen, hetgeen zich als wrijving manifesteert.

### 15.1. Hydrostatica; de wet van Pascal

Men heeft proefondervindelijk vastgesteld dat in de meeste vloeistoffen geen schuifspanningen optreden indien zij in rust verkeren; zie ook paragraaf 15.6. Zulke vloeistoffen zullen we in het vervolg aanduiden als *gewone* vloeistoffen. Water, benzine, alcohol zijn voorbeelden van gewone vloeistoffen.

Vloeistoffen die elastische eigenschappen bezitten zijn geen gewone vloeistoffen. Een voorbeeld hiervan is *stroop*. Roert men met een lepel in een met stroop gevulde kom dan draait de vloeistof, zodra men met het roeren is gestopt, uit zichzelf een stukje terug.

Glycerine (dat door verdunning met water even taai gemaakt kan worden als stroop) vertoont dit gedrag niet! (Maar bijvoorbeeld *haaievinnensoep* weer wel!)

Als gevolg van het ontbreken van schuifspanningen in een in rust verkerende gewone vloeistof kan de spanningstensor (zie paragraaf 14.4) voor een willekeurig punt in de vloeistof als volgt worden geschreven:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

⇒ Voor de kracht  $\vec{F}$  op het scheve zijvlak van een tetraëdrisch volume-elementje (zie figuur 14.11a) geldt in dit geval:

$$F_x = \sigma_{xx}S_x; \quad F_y = \sigma_{yy}S_y; \quad F_z = \sigma_{zz}S_z.$$

De kracht  $\vec{F}$  staat loodrecht op het scheve zijvlak (anders zou  $\vec{F}$  een component langs dat vlak bezitten = een schuifkracht).

$$\Rightarrow \quad \frac{F_x}{F} = \frac{S_x}{S}; \quad \frac{F_y}{F} = \frac{S_y}{S}; \quad \frac{F_z}{F} = \frac{S_z}{S}.$$

Hieruit volgt:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p. \tag{15.1}$$

Hierin wordt  $p$  de *druk* in de vloeistof genoemd.

Uit (15.1) volgt dat de grootte van de kracht op het scheve vlakje alleen afhankelijk is van de grootte van het vlakje en van de plaats waar het zich bevindt, maar *niet van de oriëntatie* van het vlakje. Deze constatering noemt men de *wet van Pascal*<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Pascal, Blaise, 1623–1682

*Uitwendig krachtveld en de gradiënt van p*

Stel, de in rust verkerende gewone vloeistof (massadichtheid  $\rho$ ) bevindt zich in een krachtveld waarvan de veldkracht op een puntmassa recht evenredig is met de massa. De veldkracht per massa noemt men de *veldintensiteit*  $\vec{I}$ . Voorbeelden: zwaartekrachtveld ( $\vec{I} = \vec{g}$ ) en centrifugaalkrachtveld ( $\vec{I} = \omega^2 \vec{r}$  waarin  $\vec{r}$  een vector is recht van de draaiingsas af, wijzend naar de puntmassa). Een volume-elementje  $dx \cdot dy \cdot dz$  ondervindt in zo'n veld een veldkracht  $(\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz) \vec{I}$ . De druk zal plaats-afhankelijk zijn; daardoor ondervindt het volume-elementje een kracht  $\vec{F}$  waarvan de componenten zijn:

$$F_x = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy \cdot dz; \quad F_y = -\left(\frac{\partial p}{\partial y} dy\right) dx \cdot dz; \quad F_z = -\left(\frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dx \cdot dy;$$

kortom een kracht

$$\vec{F} = (-\nabla p) dx \cdot dy \cdot dz.$$

De som van alle krachten op het volume-element is nul want de vloeistof beweegt niet. Dus  $(-\nabla p) dx \cdot dy \cdot dz + \rho \vec{I} dx \cdot dy \cdot dz = \vec{0}$  ofwel:

$$-\nabla p + \rho \vec{I} = \vec{0}. \quad (15.2)$$

Deze relatie tussen druk en veldintensiteit heet de *hoofdwet van de hydrostatica*. Deze hoofdwet is vooral bekend voor het geval dat  $\vec{I} = \vec{g}$  (d.w.z. de vloeistof bevindt zich in het zwaartekrachtveld). Kiest men de eenheidsvector  $\vec{k}$  recht omhoog, dan wordt (15.2) vereenvoudigd tot:  $dp/dz = -\rho g$  ( $p$  varieert dus uitsluitend met de hoogte).

Als de vloeistof *incompressibel* is (onsamendrukbaar) dan volgt uit  $dp/dz = -\rho g$  dat

$$p = -\rho g z + \text{constante}.$$

Kiezen we  $z = 0$  aan het (horizontale) oppervlak van de vloeistof en is  $d$  de diepte onder het vloeistofoppervlak dan is dus  $p = p_0 + \rho g d$ .

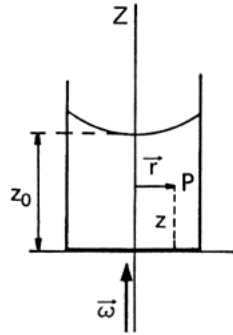
Hierin is  $p_0$  de druk onmiddellijk boven de vloeistof; de term  $\rho g d$  noemt men de *hydrostatiche druk*.

*Voorbeeld*

Een met vloeistof gevuld bekeerglas staat op een horizontale draaitafel die een constante hoeksnelheid  $\vec{\omega}$  bezit (zie figuur 15.1).

De (verticale) draaiingsas valt samen met de symmetrie-as van het bekeerglas. Het is aan de inwendige wrijving in de vloeistof te danken dat deze (op den duur) met het glas mee-roteert.

Voor een stilstaande waarnemer behoort dit voorbeeld *niet* bij de hydrostatica (= de leer van in rust verkerende vloeistoffen); voor een meedraaiende waarnemer wel.



Figuur 15.1.

We zullen de situatie daarom beschouwen vanuit het standpunt van een meedraaiende waarnemer. Voor deze bestaat de veldintensiteit  $\vec{I}$  in een willekeurig punt P uit twee componenten: de zwaartekrachtscomponent  $\vec{g}$  en de centrifugale component  $\omega^2 \vec{r}$  waarin  $\vec{r}$  recht van de draaiingsas af is gericht;  $r$  is de afstand van P tot de draaiingsas.

Uit (15.2) volgt nu:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \rho \omega^2 r = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial r} = +\rho \omega^2 r.$$

Voor de *totale differentiaal*  $dp$  geldt dus:

$$dp = -\rho g dz + \rho \omega^2 r dr. \quad (a)$$

Beschouwen we de vloeistof als *incompressibel*, dan volgt uit (a) voor de druk in de vloeistof:

$$p = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + \text{constante.}$$

Als we de druk van de buitenlucht  $p_0$  noemen:

$$p = \rho g(z_0 - z) + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + p_0.$$

Het oppervlak van de vloeistof heeft de vorm van een omwentelingsparaboloïde, of de vloeistof nu samendrukbaar is of niet.

We bewijzen dit door na te gaan, wat de vorm is van de snijlijn van het vloeistofoppervlak met het vlak van tekening. Overall langs het oppervlak is  $p = p_0 \Rightarrow dp = 0$  langs het oppervlak. Uit (a) volgt nu voor de snijlijn van het vloeistofoppervlak met het vlak van tekening:

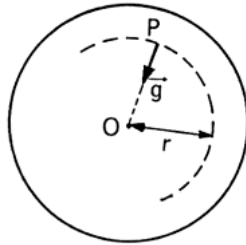
$$0 = -\rho g dz + \rho \omega^2 r dr.$$

Met de randvoorwaarde  $z = z_0$  voor  $r = 0$  volgt uit deze differentiaalvergelijking:

$$z = z_0 + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} r^2; \text{ de snijlijn is dus een parabool.}$$

*Een ruwe schatting van de druk in het middelpunt van de aarde*

Een grote zelfstandige vloeistofmassa in de wereldruimte neemt, ten gevolge van de onderlinge aantrekking van de deeltjes, de bolvorm aan. We zullen nu nagaan hoe de druk in zo'n bol verloopt met de afstand  $r$  tot het middelpunt. Eenvoudshalve beschouwen we de vloeistof als *onsamendrukbaar*. We nemen daarbij aan dat de bol *niet* roteert. De straal van de bol noemen we  $R$ ; de massadichtheid van de vloeistof noemen we  $\rho$ .



Figuur 15.2.

In een punt  $P$  op afstand  $r$  van het middelpunt (zie figuur 15.2) geldt nu:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g$$

waarin  $g$  de gravitatieversnelling in punt  $P$  is. Als de gravitatieversnelling aan het oppervlak  $g_0$  is, dan is  $g = \frac{r}{R} g_0$ . Hieruit volgt:

$$p = -\left(\frac{\rho g_0}{2R}\right) r^2 + C.$$

Als we de druk buiten de vloeistofbol  $\approx 0$  mogen stellen, dan is de integratieconstante  $C$  gelijk aan  $(\rho g_0/2R)R^2$  en dus:

$$p = \left(\frac{\rho g_0}{2R}\right) (R^2 - r^2).$$

Het drukverloop is dus parabolisch.

In het middelpunt van de vloeistofbol is de druk blijkbaar  $\frac{1}{2} \rho g_0 R$ .

We beschouwen nu het inwendige van de aarde als vloeibaar en incompressibel (hetgeen wel een erg ruwe benadering mag worden genoemd!); verder zullen we de rotatie van de aarde buiten beschouwing laten.  $R = 6,3 \cdot 10^6$  m;  $g_0 = 9,8$  m/s<sup>2</sup>; de gemiddelde massadichtheid van de aarde is  $5,5 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>. Met deze waarden vinden we voor de druk in het middelpunt van de aarde ca.  $1,7 \cdot 10^{11}$  Pa =  $1,7 \cdot 10^6$  bar. Hoe

grof we bij deze schatting te werk zijn gegaan, blijkt als we de uitkomst vergelijken met de waarde die door de geoloog Bullen op grond van nauwkeuriger berekeningen is gevonden:  $3,9 \cdot 10^6$  bar, ruim twee keer zo veel dus.

## 15.2. De wet van Archimedes

### *Stelling*

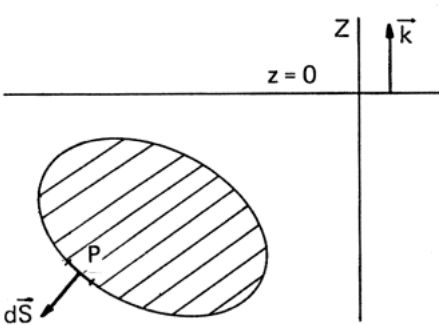
Een in een vloeistof ondergedompeld lichaam ondervindt een opwaartse kracht waarvan de grootte gelijk is aan de zwaartekracht die werkte op de verplaatste vloeistof. Deze stelling staat bekend als de *wet van Archimedes*<sup>2</sup>.

Voor het bewijs bekijken we figuur 15.3. In figuur 15.3a is een lichaam, ondergedompeld in een vloeistof, in doorsnede getekend. In figuur 15.3b is het oppervlak van het lichaam nog eens aangeduid. Het lichaam zelf is echter vervangen door vloeistof van dezelfde samenstelling als de omringende vloeistof. De Z-as is verticaal; de eenheidsvector  $\vec{k}$  is omhoog gericht;  $z = 0$  aan het oppervlak.

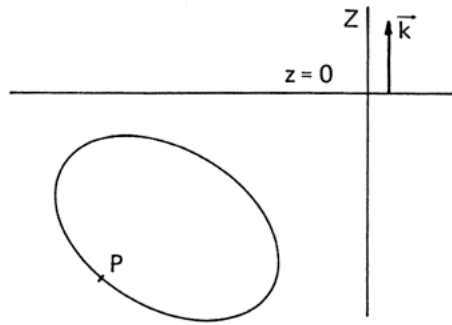
In beide gevallen is de druk  $p$  in de overeenkomstige punten P gelijk; deze wordt volgens (15.2) immers uitsluitend bepaald door:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g.$$

De kracht, door de vloeistof uitgeoefend op een stukje  $dS$  van het oppervlak van het lichaam (gesymboliseerd door de vector  $d\vec{S}$ ) is:  $-p d\vec{S}$ .



Figuur 15.3a.



Figuur 15.3b.

De totale op het lichaam door de vloeistof uitgeoefende kracht is dus:

$$\vec{F} = \iint -p d\vec{S}.$$

Om grootte en richting van  $\vec{F}$  vast te stellen volgen we een redenering die afkom-

<sup>2</sup> Archimedes, 285 v.C.–212 v.C

stig is van Simon Stevin<sup>3</sup>. Daartoe bekijken we eerst de in figuur 15.3b weergegeven situatie.

De door het oppervlak  $S$  omsloten vloeistofmassa is in rust. Blijkbaar compenseert  $\vec{F}$  de zwaartekracht die werkt op de bedoelde vloeistofmassa. Ook valt zijn werklijn samen met die van de zwaartekracht, met andere woorden het massamiddelpunt  $C$  van de vloeistofmassa ligt op de werklijn van  $\vec{F}$ .

Uit het feit dat de drukverdeling langs het oppervlak  $S$  in beide gevallen (figuur 15.3a en 15.3b) dezelfde is, volgt dat  $\vec{F}$  in beide gevallen identiek is. Hiermee is de stelling van Archimedes bewezen.

Ook in figuur 15.3a loopt de werklijn van de opwaartse kracht  $\vec{F}$  dus door het massamiddelpunt  $C$  van de verplaatste vloeistof! Eenvoudshalve zullen we voortaan beweren dat **de opwaartse kracht  $\vec{F}$  aangrijpt in het massamiddelpunt  $C$  van de verplaatste vloeistof.**

#### *Zinken, stijgen, zweven*

Uit de wet van Archimedes blijkt dat een lichaam, losgelaten onder het vloeistofoppervlak, zal zinken als zijn massa groter is dan die van de verplaatste vloeistof en zal stijgen als zijn massa kleiner is dan die van de verplaatste vloeistof.

Zijn beide massa's even groot, dan zal het lichaam stijgen noch zinken: het *zweeft* in de vloeistof.

Als de ballasttanks van een duikboot de juiste vulling hebben (gedeeltelijk water, gedeeltelijk lucht) dan kan de boot zweven in het omringende water. Pompt men nu enig water uit, dan wordt de massa van de duikboot kleiner dan die van het verplaatste water: de boot zal gaan stijgen. Door enig water tot de ballasttanks toe te laten, kan men de duikboot laten zinken.

#### *Drijven*

Voor een drijvend lichaam geldt eveneens de wet van Archimedes, met dien verstande dat de 'verplaatste vloeistof' nu in volume gelijk is aan dat van het ondergedompelde deel van het lichaam.

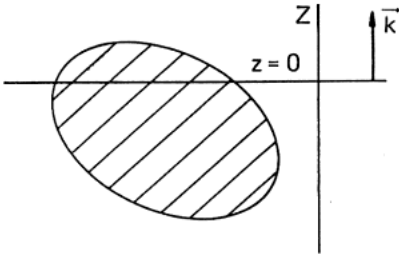
#### *Bewijs*

In figuur 15.4a is een lichaam getekend (in doorsnede) dat drijft. Boven- en onderdeel zijn gescheiden door het vlak  $z = 0$  (het vloeistofoppervlak).

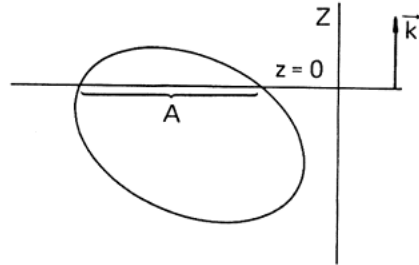
In figuur 15.4b is het oppervlak van het lichaam nog eens aangeduid. Het lichaam zelf is echter, voor wat betreft het bovendeel, vervangen door lucht en, voor wat betreft het onderdeel, vervangen door vloeistof van dezelfde samenstelling als de omringende vloeistof.

---

<sup>3</sup> Stevin, Simon, 1548–1620



Figuur 15.4a.



Figuur 15.4b.

Voor  $z < 0$  geldt:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

waarin  $\rho$  = de massadichtheid van de vloeistof.

Voor  $z > 0$  geldt:

$$\frac{dp}{dz} \approx 0$$

(eigenlijk:  $\frac{dp}{dz} = -\rho g$  waarin  $\rho$  = de massadichtheid van de omringende lucht. Dit effect zullen we nu maar verwaarlozen omdat de massadichtheid van de buitenlucht zeer veel kleiner is dan die van een vloeistof).

Bij de berekening van de opwaartse kracht:

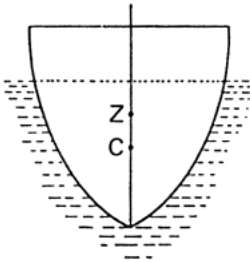
$$\vec{F} = \oint -p \, d\vec{S}$$

kunnen we de integraal in twee delen splitsen: één deel, waarbij wordt geïntegreerd over het oppervlak van het ondergedompelde deel, en één deel, waarbij wordt geïntegreerd over het boven de vloeistof uitstekende deel van het lichaam. In beide gevallen is de doorsnede A (met het vlak  $z = 0$ ) inbegrepen waarbij in de tweede integraal de vector  $\vec{A}$  naar beneden gericht is en in de eerste integraal naar boven. De tweede integraal is nul; de berekening van de eerste integraal is identiek aan de berekening die in het begin van deze paragraaf is uitgevoerd waarbij de volume-integraal slechts gaat over het volume van het ondergedompelde deel van het lichaam.

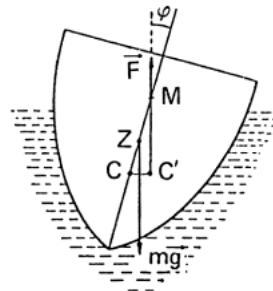
Het aangrijpingspunt van de opwaartse kracht is ook nu weer het massamiddelpunt C van de verplaatste vloeistof. Als we het massamiddelpunt van het drijvende lichaam nu verder met Z (van 'zwaartepunt') aanduiden en het massamiddelpunt van de verplaatste vloeistof met C, dan kunnen we het volgende beweren:

In de evenwichtssituatie van een drijvend lichaam liggen Z en C op dezelfde verticale lijn (zo niet, dan is  $\vec{M}_Z \neq \vec{0}$ , zodat er van evenwicht geen sprake kan zijn); zie figuur 15.5a.

Voor stabiel evenwicht van een drijvend lichaam is het, althans binnen zekere grenzen, niet noodzakelijk dat  $Z$  lager ligt dan  $C$ . Bij een schip is dat in de praktijk ook niet het geval. Voor de stabiliteit is nodig dat het schip na een kleine wenteling om de horizontale as door zijn zwaartepunt ten gevolge van een uitwendige storing, teruggedreven wordt naar de evenwichtsstand. Door de wenteling wordt echter het aangrijpingspunt van de opwaartse kracht verplaatst; bij wenteling over een hoek  $\varphi$  bijvoorbeeld van  $C$  naar  $C'$  (figuur 15.5b). De plaats van  $Z$  wordt niet gewijzigd. De zwaartekracht  $\vec{mg}$  en de opwaartse kracht  $\vec{F}$  vormen nu een koppel dat inderdaad terugdraaiend is als de verticaal door  $C'$  de lijn  $ZC$  snijdt in een punt  $M$  dat op het verlengde van  $CZ$  ligt.  $M$  wordt *metacentrum* genoemd; de afstand  $MZ$  is de *metacentrische hoogte*. Is de metacentrische hoogte bij kleine waarden van hoek  $\varphi$  gelijk aan  $h$ , dan is het teruggedrijvende krachtmoment:



Figuur 15.5a.



Figuur 15.5b.

$$M_Z = -hF \sin \varphi \approx -hF\varphi.$$

Is  $I$  het traagheidsmoment van het schip om de lengte-as door  $Z$ , dan is de differentiaalvergelijking van de zogenaamde rollende beweging van het schip:

$$M_Z = -hF\varphi = I\ddot{\varphi}.$$

De trillingstijd van deze slingeren is dus:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}}.$$

In de praktijk van de scheepsbouw moet natuurlijk ook voor het geval van grotere waarden van  $\varphi$  de stabiliteit onderzocht worden. De waarde van  $h$  hangt uiteraard van  $\varphi$  af.

### 15.3. Hydrodynamica

Het onderzoek van de eigenschappen van *stromende vloeistoffen*, de hydrodynamica, is in het algemeen een zeer ingewikkelde aangelegenheid. We beperken ons in dit boek tot enkele belangrijke aspecten van sommige vloeistofstromingen.

De grondslag van elke dynamische beschouwing zijn de wetten van Newton. Dat geldt ook voor vloeistoffen. Men moet dus de dynamische wetten voor de beweging van een vloeistof afleiden uit de toepassing van de bewegingswet van Newton op een vloeistofdeeltje. Hetgeen ons in het algemeen bij de beschrijving van een vloeistofstroming interesseert zijn echter niet de particuliere lotgevallen van de individuele vloeistofdeeltjes maar veeleer *het overzicht van grootheden als snelheid, druk en dichtheid van de vloeistof in elk vast punt van de ruimte waar de vloeistof stroomt*. Evenwel: elk vast punt wordt in de loop van de tijd telkens door een ander vloeistofdeeltje ingenomen. Reeds in de achttiende eeuw is Euler er echter in geslaagd dynamische vergelijkingen op te stellen voor de vloeistofstroming, gebaseerd op de wetten van Newton, waarin de particuliere lotgevallen van de vloeistofdeeltjes niet meer optreden. In plaats van de beschrijving van de beweging van individuele deeltjes, geven de vergelijkingen van Euler een beschrijving van wat we noemen: het *stromingsveld*, dat is: het geheel van snelheden, drukken en dichtheden in de vloeistof als functie van de plaats in de vaste ruimte. De methode van Euler levert een direct inzicht in de macroscopische gedragingen van een stromende vloeistof; hij is ook zeer vruchtbaar gebleken voor technische toepassingen betreffende de vloeistofstroming. Wij zullen ons daarom in dit boek beperken tot de beschouwingen van Euler.

We voeren eerst enige begrippen in, die in de hydrodynamica gebruikelijk zijn, en die typisch bij het begrip stromingsveld behoren.

#### *Stationaire stroming*

De snelheid, de dichtheid en de druk van de vloeistof zijn in het algemeen functies van de plaats in het stromingsveld en van de tijd. De stroming wordt stationair genoemd indien in elk punt van het stromingsveld de snelheid, druk en dichtheid *onafhankelijk* van de tijd zijn, dat wil zeggen als:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (15.3)$$

#### *Stroomlijn*

Men kan in een stromende vloeistof op een bepaald tijdstip continu verlopende lijnen getrokken denken, die in elk van hun punten de richting van de snelheid ter plaatse aangeven. In elk punt heeft de snelheid dan de richting van de raaklijn aan de door dat punt lopende kromme. Zulke lijnen worden *stroomlijnen* genoemd (vergelijk de veldlijnen in een elektrisch veld). In het algemeen verandert het stroomlijnenveld met de tijd, omdat de snelheidsvectoren in het algemeen functies van de tijd zijn. Een

stroomlijnenveld is een ‘moment-opname’ van de stromingstoestand. Een stroomlijn is dus in het algemeen niet identiek met de baan die een vloeistofdeeltje in de loop van de tijd volgt. Wel is elk infinitesimaal deel van een stroomlijn een infinitesimaal deel van de baan van een deeltje. Uit de definitie volgt nog dat stroomlijnen elkaar niet kunnen snijden.

Een vloeistofdeeltje volgt dus op elk tijdstip, gedurende een infinitesimaal tijdvak, de momentele stroomlijn door het punt waar het zich bevindt. Een infinitesimale verplaatsing  $d\vec{s}$  van een deeltje — langs een stroomlijn dus — heeft de componenten  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Heeft de momentele snelheid ter plaatse de componenten  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ , dan geldt dus:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}.$$

Dit zijn de differentiaalvergelijkingen van de stroomlijnen. Het zijn twee onafhankelijke vergelijkingen.

### *Stroombaan*

De baan die een bepaald vloeistofdeeltje in de loop van de tijd beschrijft, wordt *stroombaan* genoemd. Als de snelheidsvectoren in elk vast punt van het stromingsveld niet van de tijd afhangen, verandert het stroomlijnenveld niet met de tijd. In dat geval bewegen de vloeistofdeeltjes zich langs de stroomlijnen: de stroomlijnen zijn dan tevens stroombanen. Dat is het geval bij stationaire stroming.

## 15.4. De continuïteitsvergelijking

De fenomenologische beschouwingen over vloeistoffen gaan uit van de veronderstelling dat de vloeistof steeds een samenhangend geheel is: er zijn geen lege ruimten tussen delen van de vloeistof. Anders gezegd: de vloeistof vult de ruimte continu. Daaruit volgt: stroomt uit een begrensd deel van de vloeistofruimte een grotere massa vloeistof uit dan er in stroomt, dan moet de dichtheid van de vloeistof binnen die ruimte proportioneel afnemen. De wiskundige uitdrukking voor deze betrekking tussen uitstromende massa vloeistof en de verandering van de dichtheid wordt de *continuïteitsvergelijking* genoemd. De betrekking kan in twee gedaanten uitgedrukt worden: in een ‘integrale vorm’ voor een ruimte van eindige afmetingen, of in differentiële vorm, voor een infinitesimaal gebied. Beide worden in deze paragraaf besproken.

$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$  stelt het volume vloeistof voor dat per tijdseenheid door een oppervlak  $S$  stroomt (zie paragraaf A13). Men noemt dit wel de *flux* of het *volumedebiet*  $\Phi_v$  door het oppervlak  $S$ .

Als  $\rho$  = de massadichtheid van de vloeistof, dan stelt  $\iint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$  de massa voor die per tijdseenheid door het oppervlak  $S$  stroomt (het *massadebiet*  $\Phi_m$  door  $S$ ).

$\oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$  is dus het massadebiet door een gesloten oppervlak.

Is de uitkomst van deze integraal positief, dan wordt blijkbaar de binnen het gesloten oppervlak aanwezige massa verminderd. De massavermindering per seconde is te noteren als  $-\partial m/\partial t$ . De continuïteitsvergelijking luidt dus:

$$\oiint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial m}{\partial t} \quad (15.4)$$

waarin  $m$  = de door het gesloten oppervlak omvatte massa vloeistof.

In het geval van stationaire stroming is  $\frac{\partial m}{\partial t} = 0$  en dus  $\oiint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$ .

(15.4)  $\Rightarrow$  Als de vloeistof incompressibel is, geldt altijd:  $\oiint \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$ , ook als de stroming niet stationair is.

We leiden nu de continuïteitsvergelijking in differentiële vorm af, die een uitspraak doet over de stroomsnelheid in één punt. Daartoe bedenken we dat de omvatte massa in (15.4) gelijk is aan  $\int_V \rho \, dV$  als  $V$  = het volume binnen het gesloten oppervlak. Hieruit volgt:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV.$$

Hiermee wordt (15.4):

$$\oiint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV.$$

Met behulp van de divergentiestelling (zie § A14) kan het linkerlid worden herschreven zodat:

$$\int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \, dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV.$$

Omdat deze gelijkheid waar is voor elk willekeurig volume  $V$ , dus ook voor delen van  $V$ , kunnen we concluderen:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (15.5)$$

Dit is de continuïteitsvergelijking in differentiële vorm. Voor stationaire stroming wordt de vergelijking vereenvoudigd tot:  $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$ . Als de vloeistof incompressibel is, geldt altijd:  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ .

## 15.5. Bewegingsvergelijkingen voor wrijvingsloze fluida

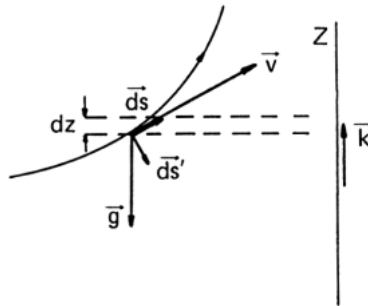
De algemene bewegingsvergelijkingen voor stromende vloeistoffen zijn opgesteld door Euler (1758). We beperken ons in dit boek tot de vergelijkingen van de *stationaire* stroming. De banen van de vloeistofdeeltjes vallen dan samen met de

stroomlijnen. In dit geval kunnen we gemakkelijk de vergelijking voor de beweging langs een stroomlijn opstellen. We veronderstellen nadrukkelijk dat de vloeistof geen inwendige wrijving heeft (dan wel dat de inwendige wrijving te verwaarlozen is).

Bekijk een meestromend *massa*-elementje  $\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ . (Noch  $\rho$ , noch het volume van dit massa-elementje behoeven constant te zijn, als het produkt dat maar wel is). We beperken ons wat het  $\vec{I}$ -veld betreft tot het zwaartekrachtveld, dus  $\vec{I} = \vec{g}$ .

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{F} = m\vec{a} &\Rightarrow (\rho\vec{g} - \nabla p) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \vec{a} \\ &\Rightarrow \rho\vec{g} - \nabla p = \rho\vec{a}. \end{aligned} \quad (15.6)$$

De component van  $\vec{a}$  langs een stroomlijn is  $a_{\text{tan}} = dv/dt$ ; de component van  $\vec{a}$  loodrecht op een stroomlijn is  $a_n = v^2/R$  waarin  $R$  is de kromtestraal. We maken nu op drie verschillende manieren gebruik van (15.6). Zie figuur 15.6 waarin een stroomlijn is afgebeeld die (toevalligerwijze!) in een verticaal vlak ligt (de  $Z$ -as is verticaal, de eenheidsvector  $\vec{k}$  is naar boven gericht). In het algemeen liggen de stroomlijnen niet in één verticaal vlak; de redeneringen veranderen daardoor echter niet.



Figuur 15.6.

**a.** Vermenigvuldig (15.6) links en rechts inwendig met  $d\vec{s}$  (dat is een stukje van de stroomlijn). Het resultaat van deze handeling is:

$$\begin{aligned} -\rho g dz - dp &= \rho ds \frac{dv}{dt} = \rho v dv = \frac{1}{2} \rho d(v^2) \\ \Rightarrow \rho g dz + dp + \frac{1}{2} \rho d(v^2) &= 0. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Dit is de *vergelijking van Euler* (voor stationaire stroming van wrijvingsloze vloeistof, langs een stroomlijn).

Als de vloeistof bovendien incompressibel is, kan men (15.7) primitiveren tot:

$$\rho g z + p + \frac{1}{2} \rho v^2 = C. \quad (15.8)$$

Dit is de *wet van Bernoulli*<sup>4</sup> ( $C$  = een constante, die van stroomlijn tot stroomlijn

<sup>4</sup> Bernoulli, Daniel, 1700–1782

meestal verschillend is). Hoewel (15.8) direct volgt uit de vergelijking van Euler, wordt hij genoemd naar Bernoulli omdat die reeds vóór Euler deze vergelijking heeft afgeleid (1738) uit een beschouwing die men als een uitspraak van de energiewet *avant la lettre* kan opvatten. Er zijn vele toepassingen van de wet van Bernoulli; enkele komen verderop in deze paragraaf ter sprake.

**b.** Vermenigvuldig (15.6) links en rechts inwendig met een lijnstukje  $d\vec{s}'$  dat loodrecht op de stroomlijn staat, en wel in de richting die *van* het kromtemiddelpunt *af* is. Het resultaat hiervan is:

$$-\rho g dz - dp = -\frac{\rho v^2}{R} ds'$$

en dus, als de vloeistof incompressibel is:

$$\frac{\partial p^*}{\partial s'} = \frac{\rho v^2}{R} \quad (15.9)$$

waarin  $p^* = p + \rho g z$ .

Men noemt  $p^*$  de *voor de hoogte gecorrigeerde druk*. Deze is, op een constante na, hetzelfde als het verschil  $p - \text{hydrostatische druk}$ .

**c.** De constante  $C$  in de wet van Bernoulli is van stroomlijn tot stroomlijn in het algemeen verschillend, *tenzij*  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ . Voor het bewijs van deze stelling gaan we weer uit van de relatie (15.6). Nu echter ontbinden wij  $\vec{a}$  op een andere wijze dan zojuist:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z.$$

De eerste term is nul als we alleen stationaire stroming bekijken. De overige drie termen kunnen worden samengevat tot:  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ . Deze laatste uitdrukking is (hetgeen door uitschrijven te bewijzen is) te vervangen door:

$$\frac{1}{2} \nabla (v^2) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}).$$

*Conclusie*

$$\rho \vec{g} - \nabla p = \rho \left\{ \frac{1}{2} \nabla (v^2) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \right\}.$$

Vermenigvuldigt men deze vergelijking nu links en rechts inwendig met  $d\vec{s}$  (stukje stroomlijn) dan is het resultaat:

$$-\rho g dz - dp = \frac{1}{2} \rho d(v^2)$$

want het uitproduct heeft geen component langs de stroomlijn (omdat het

loodrecht staat op  $\vec{v}$ ). Dit leidt weer tot de vergelijking van Euler. Maar, als  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ , dan is het uitproduct zelf nul, zodat hetzelfde resultaat wordt verkregen bij inwendig vermenigvuldigen met een *willekeurig* lijnstukje  $d\vec{s}$ , met andere woorden de vergelijking van Euler (en dus ook die van Bernoulli) is dan geldig langs elke willekeurige lijn.

*Voorbeelden en toepassingen*

**a. Gedwongen wervel** (figuur 15.7). Een glas water staat op een horizontale draaitafel die een constante hoeksnelheid  $\vec{\omega}$  bezit; zie het voorbeeld in § 15.1. De stroming die het water volgens een niet-meedraaiende waarnemer uitvoert wordt een gedwongen wervel genoemd. De stroomlijnen zijn cirkels; in cilindercoördinaten geldt:

$$v_r = 0; \quad v_z = 0; \quad v_\phi = \omega r.$$

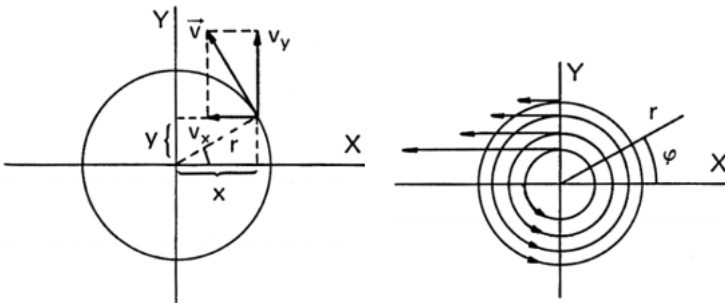
Hieruit volgt voor  $v_x$  en  $v_y$ :

$$v_x = -\omega y \quad \text{en} \quad v_y = +\omega x \quad (\text{zie figuur 15.7}).$$

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{\omega}.$$

Deze stroming is dus *niet* ‘rotatie-vrij’, dat wil zeggen  $\nabla \times \vec{v} \neq \vec{0}$ .

Een in de vloeistof zwevend balletje beweegt met de vloeistof mee; de beweging van het balletje kan worden beschreven als een translatie van zijn massamiddelpunt C (langs één der stroomlijnen) plus een rotatie om de verticale as door C.



Figuur 15.7.

Figuur 15.8.

Voor onder elkaar liggende stroomlijnen is de constante C uit de wet van Bernoulli gelijk; voor naast elkaar liggende (concentrische) stroomlijnen is C verschillend:

$$\frac{dC}{dr} = \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 \right) = 2\rho \omega^2 r.$$

**b. Vrije wervel** (figuur 15.8). De stroming lijkt op een draaikolk; de stroomlijnen zijn cirkels. In cilindercoördinaten geldt:

$$v_r = 0; \quad v_z = 0; \quad v_\phi = \frac{c}{r}$$

waarin  $c$  een constante is (behalve voor zeer kleine waarden van  $r$ ). Hieruit volgt voor  $v_x$  en  $v_y$  (behalve bij  $r = 0$ ):

$$v_x = \frac{-cy}{r^2} \quad \text{en} \quad v_y = \frac{+cx}{r^2}.$$

(Hierin is  $r^2 = x^2 + y^2$  dus *niet*  $x^2 + y^2 + z^2$ !)

rot  $\vec{v}$  is hier wel  $\vec{0}$ , want:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

Deze stroming is dus wel ‘rotatie-vrij’.

Een in de vloeistof zwevend balletje voert een zuivere translatie uit, dat wil zeggen zijn massamiddelpunt  $C$  beweegt langs een stroomlijn maar het balletje roteert *niet* om een as door  $C$ .

De constante  $C$  uit de wet van Bernoulli is overal in de vloeistof even groot. Zo is

$$\frac{\partial C}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = 0$$

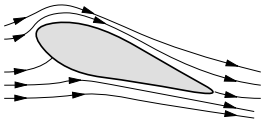
omdat

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho v^2}{r} = \frac{\rho c^2}{r^3}$$

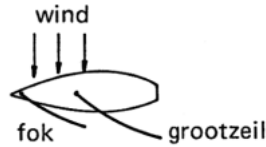
maar

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{2} \rho \frac{c^2}{r^2} \right) = -\frac{\rho c^2}{r^3}.$$

**c.** Een belangrijke toepassing van de wet van Bernoulli is **de ‘lift’ op vliegtuigvleugels**. In figuur 15.9 is een doorsnede van een vliegtuigvleugel geschetst. Het vliegtuig vliegt naar links. De vorm van de vleugel is er de oorzaak van dat er lucht rond de vleugel circuleert (rechtson). Ook stroomt er (ten opzichte van de vleugel) lucht langs de vleugel naar rechts. De totale stroomsnelheid ten opzichte van de vleugel is dus boven beduidend groter dan onder. Volgens Bernoulli is dan de druk onder de vleugel groter dan er boven, hetgeen resulteert in een opwaartse kracht. In figuur 15.9 is het resulterende stroomlijnenbeeld ten opzichte van de vleugel geschetst.



Figuur 15.9.

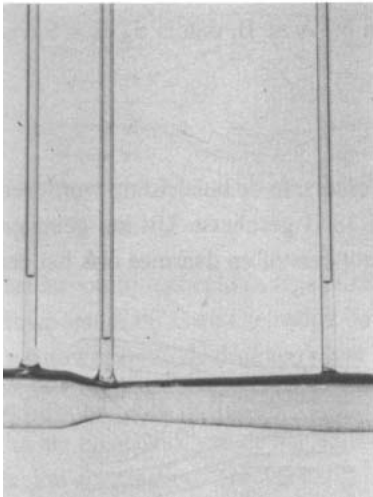


Figuur 15.10.

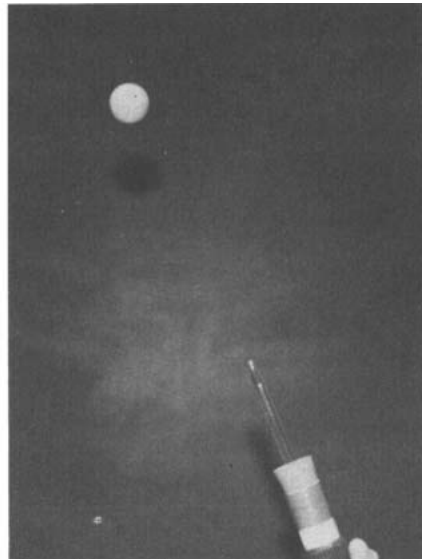
**d. De werking van de fok op een zeilboot.** In figuur 15.10 is een bovenaanzicht geschetst van een naar links varende zeilboot. De wind staat dwars op de boot. De tussen fok en grootzeil stromende lucht wordt door de smaller wordende opening versneld zodat aan die kant de druk op het grootzeil extra laag is. Aan de achterkant van het grootzeil is de druk juist extra groot vanwege de relatie (15.9).

**e.** Blaast men krachtig door een verticaal gehouden buisje dat op korte afstand boven een horizontaal gehouden blad papier uitmondt (figuur 15.11), dan blijkt het papier niet weggestoten te worden, maar juist naar de monding toe te worden gedreven. De verklaring berust op de wet van Bernoulli. De luchtdruk van de omgeving zij  $p_0$ . Bij de monding van het buisje moet de ingeblazen lucht door een smalle opening ontwijken, zodat de lucht daar een grote snelheid krijgt. Bij voldoende grote stroomsnelheid wordt de druk er lager dan de omgevingsdruk. De druk aan de andere zijde van het papier is  $p_0$ . Het papier ondervindt daardoor een naar het buisje gerichte kracht, die groter kan zijn dan het gewicht van het papier.

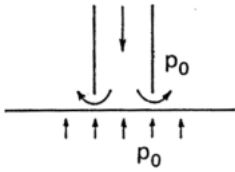
*Twee foto's ter illustratie van de wet van Bernoulli:*



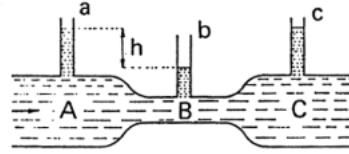
*In de vernauwing is de druk het laagst.*



*Het tafeltennisballetje blijft zweven in de luchtstroom.*



Figuur 15.11.



Figuur 15.12.

**f. Meetbuis van Venturi.** Stel dat een vloeistof door een horizontale buis stroomt die een vernauwing bevat; zie figuur 15.12. Bij A en C zijn de doorsneden even groot. De verticale zijbuisjes dienen als manometers die de plaatselijke vloeistofdrukken registreren. Manometer b wijst een lagere druk aan dan de manometers a en c. Dat volgt direct uit de wet van Bernoulli. Omdat de buis horizontaal loopt geldt:

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

$$\Rightarrow p_B = p_A + \frac{1}{2} \rho (v_A^2 - v_B^2).$$

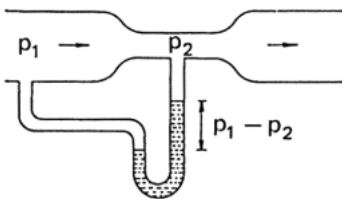
Daar wegens de onsamendrukbaarheid  $v_B > v_A$ , is  $p_B < p_A$ . Waar de stroomsnelheid toeneemt, neemt de druk af. Dat moet men ook verwachten: om de vloeistofdeeltjes te versnellen, is een passend drukverloop vereist. Bevatten de manometers dezelfde vloeistof als door de buis stroomt, dan is

$$\rho gh = \frac{1}{2} \rho (v_B^2 - v_A^2).$$

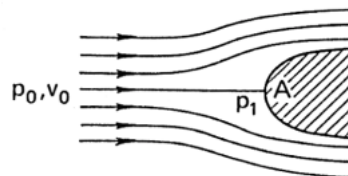
Zijn  $S_A$  en  $S_B$  de oppervlakten van de doorsneden bij A en B, dan is  $S_A v_A = S_B v_B$ . Uit beide betrekkingen samen volgt:

$$v_A = \sqrt{2ghS_B^2 / (S_A^2 - S_B^2)}.$$

Praktisch wordt dit toegepast in de meetbuis van Venturi. In de buisleiding wordt een buis geschakeld van de gedaante als in figuur 15.13 is geschetst. Uit het gemeten drukverschil volgt onmiddellijk de snelheid van de vloeistof en daarmee ook het per tijdseenheid doorstromende volume vloeistof.



Figuur 15.13.



Figuur 15.14.

**g. Stuwung door een hindernis.** Stel dat in een uniforme vloeistofstroming, waar de snelheid aanvankelijk overal  $\vec{v}_0$  is, een hindernis wordt aangebracht van de

gedaante als in figuur 15.14 is voorgesteld. Dan stroomt de vloeistof om de hindernis heen en de stroomlijnen verlopen als in de figuur is geschetst. Aan de voorkant wordt de stroming gestuwd. In het midden, bij A, is de stroomsnelheid nul. Stel de druk is er  $p_1$ . Vergelijk nu twee punten op de stroomlijn door A: het punt A zelf en een punt op enige afstand er vóór, waar de stroming nog als ongestoord beschouwd kan worden. Dan geldt:

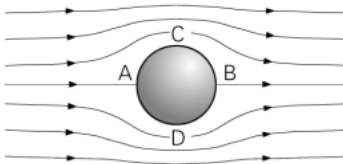
$$p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 = p_1.$$

Het punt A wordt het *stuwpunt* genoemd. Tengevolge van het feit dat de snelheid er nul is, is de druk daar  $\frac{1}{2} \rho v_0^2$  groter dan op enige afstand in de ongestoorde stroom. De term  $\frac{1}{2} \rho v_0^2$  wordt daarom de *stuwdruk* genoemd.

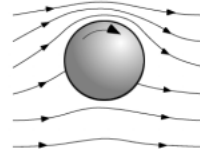
**h. Magnus-effect.** Als een roterend object zich bevindt in een luchtstroom, dan ondervindt het een kracht die loodrecht staat op de bewegingsrichting van de lucht. Dit effect is genoemd naar zijn ontdekker Magnus<sup>5</sup>. Een toepassing is de opwaartse beweging van een tennisbal die met ‘back-spin’ wordt weggeslagen.

We beschouwen een tennisbal die naar links beweegt. Voor een met dezelfde snelheid meebewegende waarnemer lijkt het middelpunt van de bal in rust te verkeren in een naar rechts bewegende luchtstroom. In figuur 15.15 is het stroomlijnenbeeld voor deze waarnemer getekend in twee verschillende gevallen:

1. De bal roteert niet (figuur 15.15a);
2. De bal roteert rechtsom (figuur 15.15b).



Figuur 15.15a.



Figuur 15.15b.

Het stroomlijnenbeeld in figuur 15.15a vertoont axiale symmetrie; A en B zijn beide stuwpunten; bij C en D stroomt de lucht sneller dan elders. De netto kracht op de bal (ten gevolge van de drukverdeling langs het oppervlak) is nul.

In figuur 15.15b treffen we een geheel ander stroomlijnenbeeld aan. Doordat de lucht aan het oppervlak van de bal blijft kleven, is de stroomsnelheid aan de bovenkant van de bal extra groot (in vergelijking met de situatie in figuur 15.15a) en aan de onderkant extra klein. Uit de wet van Bernoulli volgt dat dan de druk aan de bovenkant kleiner is dan aan de onderkant, met het gevolg dat een opwaartse kracht resulteert. De spinnende bal blijft daardoor langer in de lucht dan een niet-roterende bal die met dezelfde beginsnelheid is weggeslagen.

<sup>5</sup> Magnus, Kurt, 1887–1962.

## 15.6. Inwendige wrijving

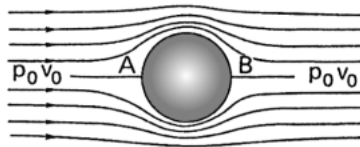
In de voorafgaande paragraaf zijn de belangrijkste eigenschappen van wrijvingsloze vloeistoffen behandeld. Hoewel gewone vloeistoffen niet wrijvingsloos zijn, zijn de conclusies van § 15.5 toch goed bruikbaar in al die gevallen waarin inwendige wrijving slechts een geringe rol speelt.

Een geval waarin de invloed van inwendige wrijving niet kan worden verwaarloosd, is de *paradox van d'Alembert*<sup>6</sup>:

Als men een lang cilindrisch lichaam, bijvoorbeeld een ronde stok, door een vloeistof beweegt in een richting loodrecht op de lichaamsas, wordt aan de voorzijde de vloeistof uiteengedreven; aan de achterzijde stroomt hij langs het lichaam terug. Deze stroming van de vloeistof is niet stationair. Ten opzichte van een met het lichaam meebewegend coördinatenstelsel is de stroming echter wel stationair. In dit stelsel is het lichaam in rust terwijl de vloeistof er om heen stroomt. Ten opzichte van dit coördinatenstelsel verlopen de stroomlijnen voor een ideale vloeistof als in figuur 15.16 is voorgesteld. Op enige afstand van de cilinder is de stromingssnelheid overal  $\vec{v}_0$ , en de druk  $p_0$ . Beschouw nu de stroomlijn door A. In A is de stroomsnelheid nul. Volgens de wet van Bernoulli geldt dus:

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 = p_A.$$

Aan de andere zijde vinden we dezelfde waarde voor  $p_B$ , dus  $p_A = p_B$ . Het lijkt er dus op dat de door de vloeistof bewogen cilinder geen resulterende kracht, dus geen weerstandskracht, zou ondervinden!



Figuur 15.16.

In werkelijkheid constateert men een vrij grote weerstandskracht. Deze moet een gevolg zijn van de *viscositeit* (inwendige wrijving) van de vloeistof. De invloed van de viscositeit ten aanzien van het bieden van weerstand heeft echter twee duidelijk verschillende aspecten.

### *Traagheidsstroming*

Als de boven beschouwde cilinder met niet te kleine snelheid wordt voortgetrokken, treedt achter de cilinder een *turbulente beweging* op: de vloeistof heeft een onregelmatige beweging, er treden *vloeistofwervels* op die men ziet losraken en die daarna een zelfstandig bestaan voeren. Dat betekent dat de oorspronkelijk in rust verkerende

<sup>6</sup> d'Alembert, Jean-Baptiste, 1717–1783

vloeistofdeeltjes een kinetische energie hebben gekregen, die ontleend moet zijn aan de arbeid die verricht is om het lichaam door de vloeistof te bewegen. De oorspronkelijk in rust verkerende vloeistofdeeltjes hebben dus een versnelling gekregen, die het bewegende lichaam ervaart als een traagheidskracht, die er door de vloeistof op wordt uitgeoefend. Daarom spreekt men van *traagheidsweerstand*. De stroming van de vloeistof noemt men *traagheidsstroming*.

De eigenlijke weerstandskracht op het lichaam kan men als volgt beschrijven. Aan de voorkant van het bewegende lichaam dat met de snelheid  $\vec{v}$  beweegt, is de stuwdruk  $\frac{1}{2}\rho v^2$ . Aan de achterkant is de druk zeer veel kleiner wegens de grote snelheid van de turbulent bewegende vloeistof. Aan de voorkant ondervindt het lichaam dus een grotere kracht dan aan de achterkant. Men schrijft daarom de weerstandswet in de gedaante:

$$F = c_w \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot S$$

waarin  $S$  de oppervlakte van de grootste doorsnede van het lichaam loodrecht op de bewegingsrichting is (bijvoorbeeld voor een bolvormig lichaam:  $\pi r^2$ ). De factor  $c_w$  is de *weerstandcoëfficiënt* die van de gedaante van het lichaam afhangt. De weerstandskracht hangt dus niet af van de inwendige wrijving! De inwendige wrijving is echter wel de directe oorzaak van het ontstaan van de turbulentie. We gaan in het kader van dit boek hier echter niet nader op in.

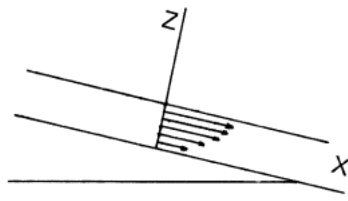
Bij vele personenauto's is  $c_w$  tegenwoordig circa 0,3.

### *Laminaire stroming*

Een ander aspect van de invloed van de viscositeit constateert men bij het vergelijken van de weerstandskrachten die enerzijds een zwak viskeuze vloeistof als water aan een lichaam biedt en anderzijds een sterk viskeuze vloeistof als glycerine, of dikke olie of stroop. Beweegt men een lichaam door een van de laatstgenoemde vloeistoffen, dan ervaart men een grotere weerstandskracht dan bij dezelfde snelheid in water, terwijl er in de sterk viskeuze vloeistof geen turbulente beweging optreedt. De viscositeit remt de vrije beweging van de vloeistofdeeltjes. De arbeid die men tegen de weerstandskracht in moet verrichten wordt nu geheel in warmte omgezet. Men spreekt in dit geval van *wrijvingsstroming*. Deze stroming kan ook optreden in vloeistoffen met geringe viscositeit, maar dan slechts bij zeer geringe snelheid van het lichaam.

In een wrijvingsstroming stroomt de vloeistof voort in laagjes die over elkaar heen-schuiven. Men spreekt daarom ook wel van *laminaire stroming*.

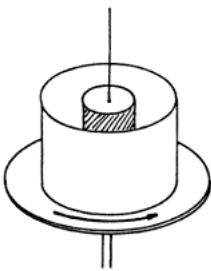
Om het karakter van de inwendige wrijving nader te leren kennen, bekijken we een eenvoudig geval van laminaire stroming: filmstroming langs een hellend vlak (zie figuur 15.17).



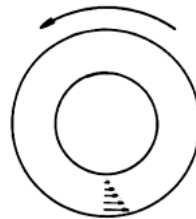
Figuur 15.17.

Men laat vloeistof langs een niet al te scheef opgestelde vlakke plaat omlaag stromen. Door de hellingshoek klein te houden bereikt men dat de stromingssnelheid niet erg groot wordt; de stroming is dan niet turbulent. Bij een constante toevoer van vloeistof bovenaan de plaat ontstaat een stationaire situatie waarbij men in de vloeistof laagjes kan onderscheiden die over elkaar bewegen. De snelheid in de onderste laag is nul (de vloeistof 'plakt' aan de plaat vast), die in de bovenste laag is het grootst. In figuur 15.17 is met pijltjes een zgn. snelheidsprofiel aangegeven (verderop zal worden bewezen dat de vorm van het snelheidsprofiel parabolisch is). De snelheid in éénzelfde laag is overal even groot. Men kan dit snelheidsverloop onderzoeken door op verschillende plaatsen in de stromende vloeistof druppeltjes inkt te injecteren.

Laminaire stroming treedt ook op in de *rotatie-viscosimeter*. Een vat in de vorm van een groenteblik is geplaatst op een horizontale draaitafel en draait met niet te grote constante hoeksnelheid rond (figuur 15.18). In het vat (en coaxiaal daarmee) hangt een massieve cilinder. Deze is even hoog als het vat en raakt bijna de bodem. De tussenruimte is geheel gevuld met vloeistof. Men constateert nu een snelheidsprofiel zoals weergegeven in figuur 15.19 (door wat aluminiumpoeder op het oppervlak van de vloeistof te strooien).



Figuur 15.18.



Figuur 15.19.

De aan het vat klevende vloeistof tracht de rest mee te sleuren. Ten gevolge daarvan ondervindt de cilinder een krachtmoment. Uit experimenteel onderzoek blijkt dat een dunne laag vloeistof die aan het binnenoppervlak van het vat grenst, door adhesiekrachten zich daaraan hecht en tijdens de beweging dezelfde snelheid heeft als die binnenwand. Evenzo is een dunne laag vloeistof grenzend aan de massieve cilinder in rust. Er is dus geen eigenlijke wrijving tussen de vloeistof en de wanden, maar er zijn schuifkrachten tussen de vloeistoflagen onderling. Vandaar de naam *inwendige*

wrijving.

Uit de hoek waarover de ophangdraad is getordeerd kan men nagaan hoe groot het krachtmoment is. In het speciale geval dat de straal van de doorsnede van de cilinder maar weinig van die van het vat verschilt constateert men dat het krachtmoment recht evenredig is met de lineaire snelheid van de binnenwand van het vat en omgekeerd evenredig met de afstand  $\Delta r$  tussen cilinderoppervlak en wand van het vat. Een dergelijke evenredigheid geldt ook voor de schuifspanning aan het cilinderoppervlak:  $\tau = \eta \Delta v / \Delta r$  waarin  $\Delta v$  staat voor het snelheidsverschil tussen de vloeistof bij de binnenwand van het vat en bij het cilinderoppervlak. De constante  $\eta$  noemt men de *viscositeit* van de vloeistof (eigenlijk de *dynamische* viscositeit, ter onderscheiding van de kinematische viscositeit

$$\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\eta}{\rho} \quad \text{waarin } \rho = \text{de massadichtheid van de vloeistof}.$$

Het is nu niet zo'n gewaagde stap om te komen tot de veronderstelling dat bij laminaire stroming de schuifspanning, door naburige laagjes op elkaar uitgeoefend, recht evenredig is met de snelheidstoename per meter, gemeten loodrecht op de snelheid (zie figuur 15.17):

$$\tau = \eta \left| \frac{dv_x}{dz} \right|. \quad (15.10)$$

Deze voor het eerst door Newton geformuleerde relatie geldt *niet* voor alle vloeistoffen, bijvoorbeeld niet voor tixotrope verf (een gelei-achtige verf die bij het uitstrijken dun vloeibaar is en toch niet nadrupt). Vloeistoffen waarvoor de relatie (15.10) wel geldt heten *Newtonse vloeistoffen*.

Viscositeit bij kamertemperatuur	
	$\eta$ (kg m <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> )
Water	1,0 · 10 <sup>-3</sup>
Alcohol	1,2 · 10 <sup>-3</sup>
Glycerol	1,5
Lucht	1,8 · 10 <sup>-5</sup>

De viscositeit van vloeistoffen neemt in het algemeen af bij temperatuurverhoging. Zo kan zware stookolie alleen worden verpompt bij een temperatuur die aanmerkelijk hoger ligt dan kamertemperatuur. De viscositeit van *gassen* neemt daarentegen juist toe bij verhogen van de temperatuur.

Uit de relatie (15.10) blijkt een essentieel verschil tussen vaste stoffen en vloeistoffen. Terwijl bij vaste stof binnen zekere grenzen de vervormende kracht recht evenredig is met de *grootte* van de deformatie, is bij vloeistoffen de vervormende kracht evenredig met de *snelheid* van de deformatie.

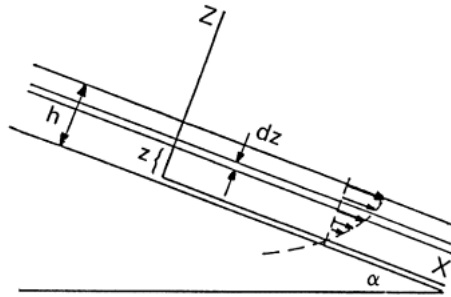
In het voorbeeld van de laminaire filmstroming langs een hellend vlak dienen we de schuifspanning (in overeenstemming met de in § 14.3 gemaakte afspraak) aan te geven met  $\tau_{zx}$ . Bekijken we de schuifkrachten per vierkante meter in het vlak  $z = z_0$  (waarin  $z_0$  een willekeurige waarde van  $z$  is met dien verstande dat  $0 < z_0 < \text{de dikte van de vloeistoffilm}$ ) dan stellen we het volgende vast:

De schuifkracht heeft de richting van de eenheidsvector  $\vec{i}$  als we letten op de schuifkracht, uitgeoefend op het fluïdum met  $z < z_0$  (door het fluïdum met  $z > z_0$ ), maar de schuifkracht wijst in de richting van  $-\vec{i}$  als we kijken naar de schuifkracht, uitgeoefend op het fluïdum met  $z > z_0$  (door het fluïdum met  $z < z_0$ ). Dit laatste is in de stromingsleer gebruikelijk. Daarom schrijft men:

$$\tau_{zx} = -\eta \frac{dv_x}{dz}. \quad (15.10a)$$

Deze relatie wordt wel genoemd de *elementaire wet voor de viscositeit*. Er zij hierbij nog eens nadrukkelijk gewezen op het feit dat deze relatie alleen geldt in het geval van laminaire stroming, terwijl de relatie niet voor alle vloeistoffen juist is.

Thans zijn wij in staat, te bewijzen dat de filmstroming in figuur 15.17 een parabolisch snelheidsprofiel bezit (zie figuur 15.20). Stel de dikte van de film is  $h$ ; de massadichtheid van de vloeistof is  $\rho$ ; de viscositeit is  $\eta$ ; de hellingshoek van het vlak is  $\alpha$ . Daar de stroming stationair is, is de snelheid in een vlak  $z = z_0$  overal even groot.



Figuur 15.20.

Beschouw nu een dunne planparallelle laag vloeistof, evenwijdig aan het vlak, met dikte  $dz$ . De zwaartekracht is, per vierkante meter:  $\rho g dz$ . De  $x$ -component hiervan is  $\rho g dz \sin \alpha$ . (De  $z$ -component van de zwaartekracht wordt gecompenseerd door het verschil in druk aan boven- en ondervlak). De ( $x$ -component van de) schuifkracht op het ondervlak is, per vierkante meter:  $\tau_{zx}$  en op het bovenzak:

$$-(\tau_{zx} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} \cdot dz).$$

Omdat de stroming stationair is, is de resultante van al deze  $x$ -componenten nul:

$$\rho g \sin \alpha \cdot dz + \tau_{zx} - \left( \tau_{zx} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} dz \right) = 0$$

en dus, omdat  $\tau_{zx} = -\eta \frac{dv_x}{dz}$ :

$$\rho g \sin \alpha + \eta \frac{d^2 v_x}{dz^2} = 0.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{dv_x}{dz} = -\frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} \cdot z + C_1.$$

De integratieconstante

$$C_1 = \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} h$$

omdat  $dv_x/dz = 0$  voor  $z = h$  (geen schuifspanning langs het vrije oppervlak!).

Hieruit volgt:

$$v_x = \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} \left( hz - \frac{1}{2} z^2 \right) + C_2.$$

De integratieconstante  $C_2$  is echter nul, want  $v_x = 0$  voor  $z = 0$ .

$v_x$  is dus een parabolisch functie van  $z$ : het snelheidsprofiel heeft de vorm van een parabool.

### *Opmerking*

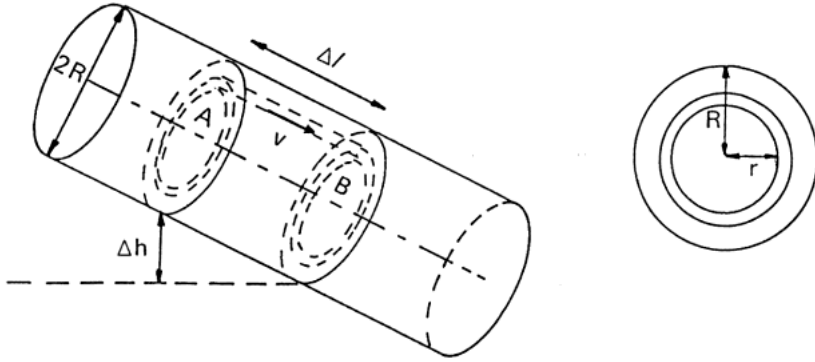
Bij de berekening is stilzwijgend verondersteld dat de breedte van de laag vloeistof zeer groot is ('oneindig' groot). Immers als de laag in de breedte begrensd is, bijvoorbeeld tussen twee verticale vlakken, dan zou langs deze vlakken de stroomsnelheid nul moeten zijn. Er zou dus ook een snelheidsverloop in de breedte zijn. Is de afstand van de vlakken echter zeer groot ten opzichte van  $h$ , dan kan de invloed daarvan op enige afstand van de breedte-begrenzing verwaarloosd worden. Men zegt dat de *randeffecten* verwaarloosd worden.

## **15.7. Laminaire stroming door een buis; formule van Poiseuille**

Door een cirkelcilindrische buis stroomt een viskeuze vloeistof. De straal van de buis is  $R$ ; de viscositeit van de vloeistof is  $\eta$ . Stel dat de stroming laminair is. Dat betekent hier dat de vloeistoflagen als dunne cilinderschillen (hulzen) over elkaar heen schuiven. De stroming is stationair.

De snelheid  $v$  van de vloeistof is een functie van  $r$  (afstand tot de cilinder-as). Om  $v(r)$  te berekenen, bestuderen we een deel van de buis, gelegen tussen de doorsneden

A en B (zie figuur 15.21). De lengte van dit deel van de buis noemen we  $\Delta l$ . De druk in het midden van A is  $p_A$ ; de druk in het midden van B is  $p_B$ ;  $p_A > p_B$ . Het drukverschil  $p_A - p_B$  noemen we  $\Delta p$ ; het hoogteverschil tussen de middens van A en B noemen we  $\Delta h$ .



Figuur 15.21.

Beschouw een dunne huls coaxiaal met de buis, waarvan de binnenstraal  $r$  is en de dikte  $dr$ . De stroomsnelheid aan de binnenkant van dit laagje zij  $v$ ; de snelheid aan de buitenkant is dan  $v + (dv/dr) dr$  (waarin  $dv/dr$  ongetwijfeld negatief is). Noemen we de schuifspanning aan de binnenzijde  $\tau$  dan is die aan de buitenzijde  $\tau + (d\tau/dr) dr$ . De oppervlakte van een dwarsdoorsnede van de huls is  $2\pi r dr$ . Op de huls werkt dientengevolge een voortstuwende kracht  $\Delta p \cdot 2\pi r dr$ . Bovendien werkt op de huls de zwaartekracht  $mg = \rho g \cdot 2\pi r dr \cdot \Delta l$ ; de component hiervan in lengterichting is:

$$mg \cdot \frac{\Delta h}{\Delta l} = \rho g \cdot 2\pi r dr \cdot \Delta h.$$

De vectorsom van alle op de huls werkende krachten is nul (omdat er geen versnelling is). Voor de lengterichting geldt dus:

$$\Delta p \cdot 2\pi r dr + \rho g \cdot 2\pi r dr \cdot \Delta h + \tau \cdot 2\pi r \cdot \Delta l - \left( \tau + \frac{d\tau}{dr} \cdot dr \right) \cdot 2\pi (r + dr) \cdot \Delta l = 0$$

ofwel (na deling door  $2\pi dr$ ):

$$(\Delta p + \rho g \cdot \Delta h)r - \tau \cdot \Delta l - \frac{d\tau}{dr} \cdot r \cdot \Delta l - \frac{d\tau}{dr} \cdot dr \cdot \Delta l = 0.$$

De eerste drie termen zijn eindig; de laatste is infinitesimaal en mag dus worden weggelaten. Resultaat:

$$\Delta p \cdot r - \frac{d(\tau r)}{dr} \cdot \Delta l = 0.$$

Hierin is  $\Delta p + \rho g \cdot \Delta h$  vervangen door  $\Delta p^*$  net als in formule (15.9). Primitiveren levert op:

$$r\tau \cdot \Delta l = \frac{1}{2} \Delta p^* \cdot r^2 + C_1.$$

De integratieconstante  $C_1 = 0$  omdat deze relatie ook geldt voor  $r = 0$ . Nu mogen we door  $r$  delen (omdat de relatie per slot van rekening ook geldt voor  $r \neq 0$ ). Resultaat:

$$\tau \cdot \Delta l = \frac{1}{2} \Delta p^* \cdot r$$

$$\Rightarrow -\eta \frac{dv}{dr} \cdot \Delta l = \frac{1}{2} \Delta p^* \cdot r$$

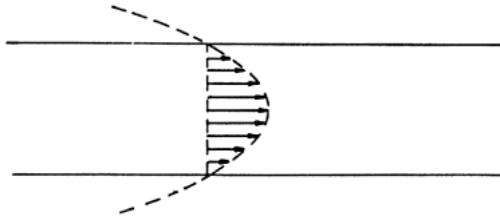
$$\Rightarrow v = -\frac{\Delta p^*}{4\eta \cdot \Delta l} \cdot r^2 + C_2.$$

$$v = 0 \text{ voor } r = R \Rightarrow C_2 = \frac{\Delta p^* R^2}{4\eta \cdot \Delta l}.$$

*Conclusie*

$$v = \frac{\Delta p^*}{4\eta \cdot \Delta l} (R^2 - r^2).$$

Ook in dit geval is het snelheidsprofiel dus parabolisch (zie figuur 15.22).



Figuur 15.22.

Voor de snelheid in het midden geldt blijkbaar:

$$v_{\max} = \frac{\Delta p^* R^2}{4\eta \cdot \Delta l}.$$

Het *volumedebiet* door een ringvormige doorsnede (straal  $r$ , breedte  $dr$ ) is  $v \cdot 2\pi r \, dr$ . Voor het volumedebiet door de buis geldt derhalve:

$$\Phi_v = \int_0^R v \cdot 2\pi r \, dr = \frac{\pi \cdot \Delta p^*}{2\eta \cdot \Delta l} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr$$

$$\Rightarrow \Phi_v = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p^*}{\Delta l}.$$

Deze formule is door Poiseuille<sup>7</sup> (1840) langs experimentele weg gevonden. Met behulp van deze uitdrukking voor het volumedebiet kan men, door de vloeistof onder een bekend drukverschil door een buis te laten stromen, de viscositeit van de vloeistof meten.

De formule geldt slechts onder het voorbehoud dat de stroming laminair is. Bij te grote snelheden treedt turbulentie op.

De over de doorsnede gemiddelde snelheid is:

$$\langle v \rangle = \frac{\Phi_v}{\pi R^2}.$$

Merk op dat  $\langle v \rangle = \frac{1}{2} v_{\max}$ .

Opmerkelijk is dat  $\Phi_v$  evenredig is met de vierde macht van  $R$ . Dat houdt in, dat, om éénzelfde debiet te verkrijgen, bij een buis met tweemaal zo grote diameter het drukverschil met een factor 16 kan worden gereduceerd!

## 15.8. De kengrootheid van Reynolds

Traagheidsstromingen en wrijvingsstromingen treden niet alleen op bij het bewegen van lichamen door een vloeistof (of, omgekeerd, bij het stromen van een vloeistof langs een obstakel), maar beide zijn ook mogelijk als een vloeistof over een vlak of door een buis stroomt.

Of in een bepaald geval de stroming van een vloeistof een traagheidsstroming dan wel een wrijvingsstroming is, blijkt af te hangen van een viertal factoren: de viscositeit  $\eta$ ; de dichtheid van de vloeistof  $\rho$ ; de snelheid van de vloeistof (of van het er door bewegende lichaam)  $v$ ; en een lengte  $l$  die meebepalend is voor het gedrag van de stroming. Deze meebepalende lengte is bijvoorbeeld een afmeting van een omstroemd voorwerp of de diameter van een buis waar de vloeistof doorheen stroomt. Een grote waarde van  $\eta$  bevordert het ontstaan van een wrijvingsstroming; grote waarden van  $\rho$ ,  $v$  en  $l$  bevorderen het ontstaan van turbulentie, dus van traagheidsstroming. *Reynolds*<sup>8</sup> heeft uit theoretische bespiegelingen over een omvangrijk experimenteel onderzoek betreffende de stromingsmogelijkheden afgeleid dat de waarde van de verhouding  $\rho v l / \eta$  min of meer beslissend is voor het optreden van de beide stromingen. Deze verhouding is een dimensieloze grootheid, die *de kengrootheid van Reynolds* wordt genoemd:

$$Re = \rho v l / \eta.$$

<sup>7</sup> Poiseuille, Jean-Louis, 1799–1869

<sup>8</sup> Reynolds, Osborne, 1842–1912

Is  $Re$  groter dan een bepaalde kritieke waarde dan is de stroming turbulent. Is  $Re$  kleiner dan de kritieke waarde dan is de stroming laminair. Hoe groot de kritieke waarde in een speciaal geval is, moet uit experimenten worden afgeleid. De kritieke waarde kan door bijkomstige effecten beïnvloed worden (bijvoorbeeld of de wand van een buis waar de vloeistof doorheen stroomt meer of minder glad is).

Er zijn bij de stroming van vloeistoffen zoveel factoren in het spel, dat het niet mogelijk is, algemeen geldende uitspraken te geven. De kengrootheid van Reynolds geeft slechts een ruwe indicatie. Of een stroming laminair dan wel turbulent is, hangt ook af van de ‘voorgeschiedenis’. Draait men een kraan een weinig open, dan is de stroming in de uitredende straal, althans dicht bij de kraan, laminair. Draait men de kraan nu wijd open, dan wordt de stroming turbulent. Draait men de kraan nu weer bijna dicht, dan blijft de stroming turbulent tot de kraan bijna geheel gesloten is. Het dan weer laminaire straaltje water is veel dunner dan de straal die in het begin van het experiment uit de kraan kwam.

*Filmstroming* langs een hellend vlak is laminair indien  $Re < ca. 1000$ . In dat geval is

$$Re = \frac{\rho \langle v \rangle h}{\eta}$$

waarin  $\langle v \rangle$  de gemiddelde stroomsnelheid is.

Ook voor stroming door een buis geldt dat deze laminair is, indien  $Re < ca. 1000$  als we in dit geval voor  $Re$  kiezen:  $\rho \langle v \rangle R / \eta$ .

## 15.9. Weerstandstroming; formule van Stokes

Wij komen nog even terug op de *paradox van d’Alembert*: als een lichaam met geringe snelheid wordt voortbewogen door een sterk viskeuze vloeistof dan is de stroming om het lichaam laminair. De weerstandskracht blijkt in dit geval recht evenredig te zijn met de viscositeit:

$$F = c\eta$$

waarin de constante  $c$  nog kan afhangen van de snelheid van het lichaam ten opzichte van de vloeistof alsook van de afmetingen van het lichaam.

In het algemeen is het niet mogelijk op grond van de elementaire wet voor de viscositeit de weerstandskracht te berekenen die een lichaam bij beweging door een viskeuze vloeistof ondervindt, ook al is de stroming laminair. Een belangrijk geval waarin de berekening exact mogelijk is, is de weerstandskracht die een *bol* bij laminaire stroming ondervindt. De wiskundige berekening gaat het niveau van dit boek ver te boven en wordt daarom hier achterwege gelaten. Hij is het eerst uitgevoerd door *Stokes*<sup>9</sup> (1850); het resultaat is de naar hem genoemde formule:

<sup>9</sup> Stokes, George Gabriel, 1819–1903

$$F = 6\pi\eta rv$$

waarin  $r$  = de straal van de bol;  $v$  = de snelheid t.o.v. de vloeistof;  $\eta$  = de viscositeit van de vloeistof. De formule is slechts geldig zolang de stroming laminair is. Dat is hier het geval als  $Re = \rho vr/\eta < 1$ . De formule geldt met dezelfde beperking voor de beweging van een bolletje in een gas. Hij heeft in de natuurkunde enige toepassingen gevonden; onder andere bij de beroemde bepaling van de lading van het elektron door Millikan en bij de theorie over de brownbeweging door Einstein.

Uit een dimensie-beschouwing kan men inzien dat de weerstandskracht lineair moet afhangen van  $\eta$ ,  $r$  en  $v$ . Veronderstellen we namelijk redelijkerwijs dat de weerstandskracht af zal hangen van  $\eta$ ,  $r$  en  $v$ , dan kunnen we stellen:

$$F = f\eta^\alpha r^\beta v^\gamma$$

waarin  $f$  een dimensieloze constante voorstelt. De dimensies van beide leden van deze betrekking moeten gelijk zijn. Dat is:

$$MLT^{-2} = (ML^{-1}T^{-1})^\alpha \cdot L^\beta \cdot (LT^{-1})^\gamma.$$

Hieruit volgt:  $\alpha = 1$ ;  $-\alpha + \beta + \gamma = 1$ ;  $-\alpha - \gamma = -2$  en dus:  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ . We vinden:  $F = f\eta rv$ . Dit is de formule van Stokes als  $f = 6\pi$ . De waarde van  $f$  kan uiteraard niet uit een dimensie-analyse afgeleid worden.

### *Toepassingen*

**1.** Een bolletje dat in een vloeistof zinkt, ondervindt de volgende krachten: de zwaartekracht, de opwaartse kracht van de vloeistof, en de weerstandskracht van de vloeistof. Is de dichtheid van het bolletje  $\rho$ , die van de vloeistof  $\rho_v$ , dan is de bewegingsvergelijking:

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_v)g - 6\pi\eta rv = \frac{4}{3}\pi r^3\rho \frac{dv}{dt}.$$

Uit het feit dat de weerstandskracht evenredig is met de snelheid volgt dat de beweging na enige tijd eenparig wordt (theoretisch na oneindig lange tijd). Voor deze 'eindsnelheid' geldt:

$$\frac{dv}{dt} \rightarrow 0$$

en dus:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v = \frac{2}{9}(\rho - \rho_v) \frac{gr^2}{\eta}.$$

Volgens deze formule kan de viscositeit van een vloeistof berekend worden uit de gemeten limietwaarde van  $v$ .

**2.** De beweging van kleine vloeistofdruppels in lucht (*mist*) is reeds besproken in §

4.1 (eerste voorbeeld).

**3.** Bij de beweging van in een vloeistof gesuspendeerde deeltjes (*brownbeweging*, veroorzaakt door de botsingen van de vloeistofmoleculen tegen het deeltje) onder vinden de deeltjes een weerstandskracht van de vloeistof waar de formule van Stokes voor geldt. Deze werd door Einstein gebruikt in zijn theorie over de brownbeweging.

**4.** Door Millikan werd de formule van Stokes gebruikt bij zijn bekende metingen van de elementaire lading van het elektron. Een oliedruppeltje waarvan de straal  $r$  is, en dat een elektrische lading  $e$  draagt, wordt zwevende gehouden in een elektrisch veld waarvan de veldsterkte  $E$  is. Als de dichtheid van de olie  $\rho$  is, en die van de lucht  $\rho_1$ , dan geldt voor de zwevingstoestand:

$$\frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_1) g = eE.$$

Om met behulp hiervan  $e$  te kunnen bepalen, moet de straal  $r$  van het druppeltje bepaald worden. Dat gebeurt op indirecte manier door het druppeltje, bij uitgeschakeld elektrisch veld, vrij te laten vallen. Zodra de eenparige beweging is ingetreden, geldt:

$$\frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_1) g = 6\pi\eta r v$$

waarin  $v$  de valsnelheid is en  $\eta$  de viscositeit van de lucht. Het bleek echter dat de formule van Stokes in dit geval nog een correctie behoefde die de grens van de fenomenologische vloeistoftheorie in het licht stelt. Ten gevolge van de geringe afmetingen van de oliedruppeltjes moet er rekening gehouden worden met de moleculaire structuur van het gas! De formule van Stokes geldt slechts zolang de straal van het bolletje groot is ten opzichte van de gemiddelde vrije weglengte  $\lambda$  van de moleculen van het gas. Dat was bij de metingen van Millikan niet meer het geval. Door Cunningham werd aangetoond dat de formule van Stokes gecorrigeerd moet worden door een factor  $1/(1 + \alpha\lambda/r)$  waarin  $\alpha$  een dimensieloze factor is (zie: R.A. Millikan, *Electrons*, Chicago, rev. ed. 1947).

**Overzicht van hoofdstuk 15**

Wet van Pascal:	De grootte van de kracht op een vlakje in een punt van in rust verkerende vloeistof is <i>onafhankelijk</i> van de oriëntatie van dat vlakje.
Hoofdwet van de hydrostatica:	$-\nabla p + \rho \vec{I} = \vec{0}$ .
Stationaire stroming:	$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}; \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ .
Continuïteitsvergelijking:	$\oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial m}{\partial t} \Leftrightarrow \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ .
Euler:	$\rho g \, dz + dp + \frac{1}{2} \rho \, d(v^2) = 0$ (langs een stroomlijn, voor stationaire stroming van wrijvingsloze vloeistof).
Als $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ :	dan geldt Euler ook langs een willekeurige lijn.
Bernoulli:	$\rho g z + p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constant}$ (langs een stroomlijn, voor stationaire stroming van <i>incompressibele</i> wrijvingsloze vloeistof).
Dwars op stroomlijn:	$\frac{\partial p^*}{\partial s'} = \frac{\rho v^2}{R}$ , waarin $p^* = p + \rho g z$ .
Traagheidsweerstand:	$F = c_w \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot S$ (turbulente stroming).
Kengrootheid van Reynolds:	$Re = \rho v l / \eta$ .
Laminaire stroming:	$\tau_{zx} = -\eta \frac{dv_x}{dz}$ (Newtonse vloeistoffen).
Poiseuille:	$\Phi_v = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta p^*}{\Delta l}$ .
Stokes:	Stromingsweerstand van een bol is $6\pi\eta r v$ mits $Re \ll 1$ .