

7

De vergelijkingen van Maxwell

7.1. Inleiding

In de jaren zestig van de negentiende eeuw bracht Maxwell vele toen bekende verschijnselen uit de elektriciteit en uit het magnetisme onder in een samenhangende theorie: de theorie van het elektro-magnetische veld. (e.m.-veld). Hij formuleerde toen vier wetten die de basis zijn van zijn theorie. Drie van deze wetten kwamen wij reeds eerder tegen.

a. De *tweede* wet van Maxwell kwamen wij bij de inductie tegen; in integraalvorm is dit vergelijking (6.5) terwijl (6.6) de differentiaalvorm ervan geeft:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (6.5)$$

en

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t}. \quad (6.6)$$

Dit zijn de wetten die de inductie, gevonden door Faraday, beschrijven.

b. De *derde* wet van Maxwell beschrijft het bronvrij zijn van het magnetische veld. Deze wet kwamen wij tegen in hoofdstuk 4.

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.16)$$

en

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (4.15)$$

c. De *vierde* wet van Maxwell hebben wij leren kennen als de stelling van Gauss

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\tau} \rho_v \, d\tau \quad (2.13)$$

en

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v. \quad (2.14)$$

d. De *eerste* wet van Maxwell.

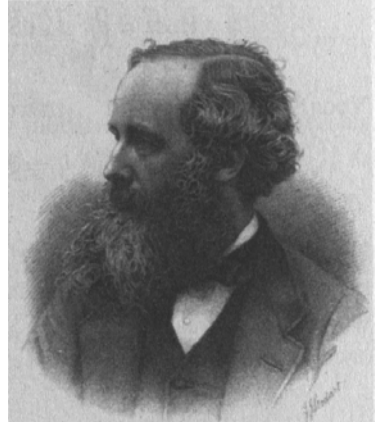
Alleen de tweede wet van Maxwell geeft een relatie tussen een magnetisch- en een elektrisch veld. De derde en de vierde beperken zich tot magnetische- respectievelijk elektrische velden sec. Een grote doorbraak was de formulering van wat nu bekend

staat als de *eerste* wet van Maxwell. Deze wet geeft eveneens een verband tussen tijdsveranderlijke elektrische- en magnetische velden. De vergelijking(en) hiervan kwamen wij nog niet tegen. Zij luiden respectievelijk:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{J}_v + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \quad (7.1)$$

en

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_v + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} . \quad (7.2)$$



James Clerk Maxwell (Edinburg, 1831 – Cambridge, 1879). Grondlegger van de moderne theorie van het elektromagnetisme. Was ook op vele andere gebieden — zoals b.v. thermodynamica en statistische fysica — zeer actief, met originele, briljante ideeën die met grote wiskundige rigueur en elegantie werden geformuleerd.

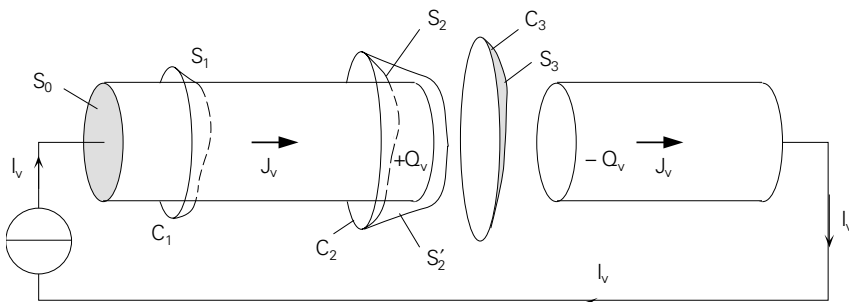
De oplettende lezer zal opmerken dat hem deze wetten toch niet geheel vreemd voorkomen; immers zij zijn gelijk aan de vergelijkingen (5.20) en (5.19), mits de vector $\partial \vec{D} / \partial t = \vec{0}$.

Juist de toevoeging van de term $\partial \vec{D} / \partial t$ is een fundamentele bijdrage van Maxwell geweest.

Op grond van deze vier wetten was hij niet alleen in staat een geünificeerde theorie te geven van elektrische en magnetische velden, maar ook het bestaan van elektromagnetische golven te voorspellen. Ook gaf hij aan, dat licht een e.m.-verschijnsel is. Wij bekijken nu de eerste wet van Maxwell nader.

7.2. Eerste wet van Maxwell; verplaatsingsstroom

a. Wij bekijken de situatie van figuur 7.1 met een cilindrische geleider die onderbroken is en waarvan beide stukken zijn aangesloten op een *stroombron* I_v .



Figuur 7.1.

Zonder veel moeite valt in te zien dat voor een oppervlak S_1 dat een rand C_1 heeft de circuitregel van Ampère geldt:



$$\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_1} \vec{J}_v \cdot d\vec{S}_1.$$

Voor S_2 kan natuurlijk evenzo worden geschreven

$$\oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_2} \vec{J}_v \cdot d\vec{S}_2.$$

Nu is het zo dat bij een bepaalde randkromme C_2 vele oppervlakken S_2 kunnen behoren. Maxwell zag het dilemma, dat als bij C_2 niet S_2 , maar oppervlak S'_2 gekozen wordt, de integraal

$$\iint_{S'_2} \vec{J}_v \cdot d\vec{S}'_2 = 0,$$

omdat op S'_2 geen stroomdichtheid \vec{J}_v bestaat, daar wij S'_2 geheel in het vacuüm leggen. Maxwell kon niet aanvaarden dat plotseling door het nul zijn van de integraal over S'_2 nu ook $\oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$ zou moeten worden, waar C_2 wèl een stroom I_v omsluit. Dit dilemma wordt nog in extra schril licht gezet als wij de circuitregel van Ampère toepassen op oppervlak S_3 met rand C_3 . Ook hier is overal op S_3 de stroomdichtheid nul; maar waar C_2 tenminste nog de stroom I_v omsloot is met C_3 , zelfs dat niet het geval. Volgens Maxwell moest in *alle* vier de gevallen S_1, S_2, S'_2 en S_3 met C_1, C_2 en C_3 tóch voldaan worden aan die circuitregel. De oplossing vond hij als volgt.

Op het rechter zijvlak van de linker cilinder hoort zich een lading $+Q$ op, zodanig dat $dQ_v/dt = I_v$. Ook is:

$$I_v = \iint_S \vec{J}_v \cdot d\vec{S} \Rightarrow \frac{dQ_v}{dt} = \iint_S \vec{J}_v \cdot d\vec{S}. \quad (7.3)$$

Op het linker vlak van de rechter cilinder hoort zich evenveel negatieve lading op. Tussen de beide cilinders ontstaat een elektrisch veld. Het is alsof de beide cilinders met de ruimte ertussen een condensator vormen. Volgens de stelling van Gauss geldt voor het veld van de lading Q_v in die ruimte:

$$Q_v = \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}. \quad (7.4)$$

Combineren van (7.3) en (7.4) geeft:

$$\iint_S \vec{J}_v \cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S},$$

ofwel:

$$\iint_S \vec{J}_v \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S},$$



zodat:

$$\vec{J}_v = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (7.5)$$

De originele gedachte van Maxwell was om in die gevallen waarin een contour (zoals C_3) geen stroom omvat en men toch de circuitregel van Ampère gebruikt, de \vec{J}_v te vervangen door $\partial \vec{D} / \partial t$. Daarmee krijgen wij:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (7.6)$$

Het rechterlid van (7.6) noemde hij de *verplaatsingsstroom* of *verschuivingsstroom*. ($\partial \vec{D} / \partial t$ is dan de verplaatsingsstroomdichtheid).

Maxwell formuleerde zijn *eerste* wet algemeen, ook voor die gevallen waar naast verplaatsingsstroom ook vrije stroom (I_v) is, als:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{J}_v + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}, \quad (7.1)$$

waaruit met de stelling van Stokes de differentiaalvorm daarvan volgt:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_v + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (7.2)$$

b. Een iets andere beschouwing dan hiervoor gaat uit van: $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_v$.

Omdat $\text{div rot } \vec{H}$ identiek 0 is geeft dit $\nabla \cdot \vec{J}_v = 0$. Maar dit kan alleen in het geval van een stationaire toestand. Volgens de continuïteitsvergelijking is dan immers $\partial \rho / \partial t = 0$.

Om in het niet-stationaire geval toch te voldoen aan $\text{div rot } \vec{H} = 0$ voegen wij aan $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_v$ een term toe waarvan de divergentie nul is in stationaire situaties. De continuïteitsvergelijking is:

$$\nabla \cdot \vec{J}_v + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

en wordt met $\rho = \nabla \cdot \vec{D}$:

$$\nabla \cdot \vec{J}_v + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D}) = 0 \rightarrow \nabla \cdot (\vec{J}_v + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = 0. \quad (7.7)$$

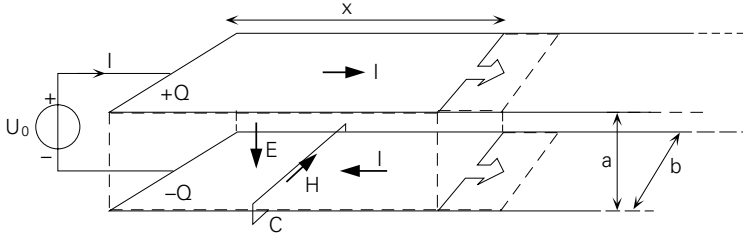
Vervangen wij nu in $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_v$ het rechterlid door $\vec{J}_v + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ dan krijgen wij:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_v + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (7.2)$$

Met de vergelijking van Stokes vinden we dan weer (7.1).

7.3. Een voorbeeld van voortplanting van elektromagnetische verschijnselen

Aan de hand van figuur 7.2 onderzoeken wij met een *zeer vereenvoudigde* beschouwing, hoe e.m.-verschijnselen zich in een vacuüm-ruimte uitbreiden.



Figuur 7.2.

Wij stellen ons voor twee zeer lange platte evenwijdige geleiders met breedte b en afstand a . Als op $t = 0$ de geleiders aan één uiteinde worden verbonden met een spanningsbron U_0 zijn de geleiders ongeladen. Voor $t > 0$ zal aan de bovenste plaat een positieve lading toestromen, die zich naar rechts zal verplaatsen; dit geldt ook voor de onderste plaat maar dan met een even grote negatieve lading. Stel dat op het tijdstip t het “front” van de toegevoerde lading zich over x naar rechts verplaatst heeft en dat de bron dan een lading $+Q$ aan de bovenste plaat heeft kunnen toevoeren. (dus $-Q$ beneden).

Als wij aannemen dat in de ruimte tussen de platen tot aan de lengte x , zich een uniform naar beneden gericht elektrisch veld E heeft opgebouwd, dan kunnen wij daarvoor met de stelling van Gauss schrijven:

$$\epsilon_0 E b x = Q.$$

Daarbij gaan wij er van uit dat overall buiten het systeem de elektrische veldsterkte nul is. Nu geldt verder:

$$E = \frac{U_0}{a}, \quad I = \frac{dQ}{dt} \quad \text{en} \quad \frac{dx}{dt} = v,$$

zodat:

$$I = \epsilon_0 U_0 \frac{b}{a} v. \quad (7.8)$$

Doordat er een stroom I vloeit ontstaat er een magnetisch veld met sterkte H , dat tussen de platen naar achteren (kurketrokkerregel) is gericht. \vec{E} en \vec{H} staan dus loodrecht op elkaar. Van dit \vec{H} -veld nemen wij aan, dat het buiten het stelsel platen nul is, zich slechts *tussen* de platen vormt en daar uniform is. Met de circuitregel van Ampère (toegepast op contour C) blijkt dan:

$$Hb = I.$$

Dan is de door de platen omvatte flux $\Phi = \mu_0 H a x = \frac{\mu_0 a x I}{b}$.

We nemen gemakshalve aan dat de weerstand in het circuit te verwaarlozen is. Uit de spanningswet van Kirchhoff volgt dan: $U_0 - \frac{d\Phi}{dt} = 0$. Met $v = \frac{dx}{dt}$ vinden wij dan

$$U_0 = \mu_0 I \frac{a}{b} v. \quad (7.9)$$

U_0 uit (7.9) invullen in vergelijking (7.8) levert

$$I = \epsilon_0 \mu_0 I v^2,$$

zodat:

$$v^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \text{ dus } v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (7.10)$$

Dit is de snelheid waarmee de elektro-magnetische ordeverstoring van de ruimte zich in vacuüm voortplant.

Vullen wij de waarden in, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$ en $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$, dan levert dit:

$$v = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} \rightarrow v = c \approx 300.000 \text{ km/s}.$$

Deze snelheid is gelijk aan de lichtsnelheid c .

Merk op dat de snelheid \vec{v} dezelfde richting heeft als de vector $\vec{E} \times \vec{H}$. Wij komen hierop terug in § 7.4 en 7.5.

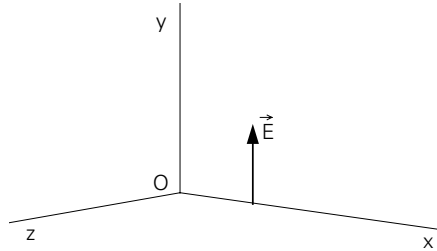
Hoewel wij drastische vereenvoudigingen aanbrachten en bepaald géén wetenschappelijk sluitend betoog gaven, is het verrassend, toch deze correcte waarde te vinden, voor de snelheid waarmee e.m.-verschijnselen (als licht en radiogolven) zich in vacuüm voortplanten.

N.B. Men heeft de snelheid van het licht in vacuüm vastgesteld in S.I.-eenheden op 299.792.458 m/s.

7.4. Golfvergelijking

a. Wij bekijken een deel van de luchtledige ruimte waarin geen stromen vloeien en geen lading aanwezig is. Dus $\rho = 0$ en $\vec{J} = \vec{0}$. Hierin beschouwen wij een coördinaatstelsel zodanig gekozen dat het elektrische veld evenwijdig is aan de y -as. Dat veld is een functie van de tijd t en verder slechts een functie van x , zodat: $\vec{E} = E(x,t)\vec{j}$. Volgens de tweede wet van Maxwell geldt:





Figuur 7.3.

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E(x,t) & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (7.11)$$

Hiermee is in te zien dat:

1. \vec{H} evenwijdig is aan de z-as en dus $\vec{H} \perp \vec{E}$.
2. $\vec{H} = \vec{H}(x,t)$, zodat ook H, net als E, slechts afhangt van x en t.

Uit (7.11) volgt:

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial H(x,t)}{\partial t}. \quad (7.12a)$$

Gebruiken wij de eerste wet van Maxwell: $\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, dan wordt deze in dit geval:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H(x,t) \end{vmatrix} = -\vec{j} \cdot \frac{\partial H(x,t)}{\partial x} = \vec{j} \epsilon_0 \frac{\partial E(x,t)}{\partial t},$$

waaruit volgt:

$$-\frac{\partial H(x,t)}{\partial x} = \epsilon_0 \frac{\partial E(x,t)}{\partial t}. \quad (7.13a)$$

Uit (7.12a) is af te leiden:

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 H(x,t)}{\partial x \partial t}. \quad (7.12b)$$

Uit (7.13a) volgt evenzo:

$$\epsilon_0 \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 H(x, t)}{\partial t \partial x}. \quad (7.13b)$$

Uit (7.12b) en (7.13b) volgt dan:

$$\frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial t^2}. \quad (7.14)$$

Een vergelijking van de vorm van (7.14) noemt men een (in dit geval één-dimensionale) *golfvergelijking*. In plaats van (7.14) hadden wij uit de vergelijkingen (7.12a) en (7.13a) ook kunnen afleiden de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 H(x, t)}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 H(x, t)}{\partial t^2}. \quad (7.15)$$

De vergelijkingen (7.14) en (7.15) heten golfvergelijkingen, omdat zij sinusvormige golven als oplossing hebben.

b. Oplossingen.

De vergelijking $\vec{E}(x, t) = E_0 \sin\{\omega(t - \frac{x}{v})\} \vec{j}$ beschrijft een zich in de positieve richting van de x-as voortplantende golf met hoekfrequentie ω . Een punt op een afstand x van de oorsprong is in fase achter, vandaar het min-teken. De tijd die de golf nodig heeft om het punt x te bereiken is $\frac{x}{v}$. Substitutie van $\vec{E}(x, t)$ in (7.14) geeft $v = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, zoals wij in § 7.3 ook vonden.

Wij weten al, dat de magnetische veldsterkte \vec{H} loodrecht staat op \vec{E} en we gaan nu na welke vorm de bij $\vec{E}(x, t)$ behorende vector $\vec{H}(x, t)$ heeft. \vec{E} en \vec{H} moeten voldoen aan de vergelijking:

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial H(x, t)}{\partial t}. \quad (7.12a)$$

Substitutie van $E(x, t)$ levert:

$$\mu_0 \frac{\partial H(x, t)}{\partial t} = + \frac{\omega}{v} E_0 \cos\{\omega(t - \frac{x}{v})\}.$$

Aan deze vergelijking wordt voldaan door een veld:

$$H(x, t) = \frac{E_0}{\mu_0 v} \cdot \sin\{\omega(t - \frac{x}{v})\}.$$

Voor de zich voortplantende elektromagnetische golf kan men dus zeggen:

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \sin\{\omega(t - \frac{x}{v})\} \vec{j} \quad (7.16)$$

en

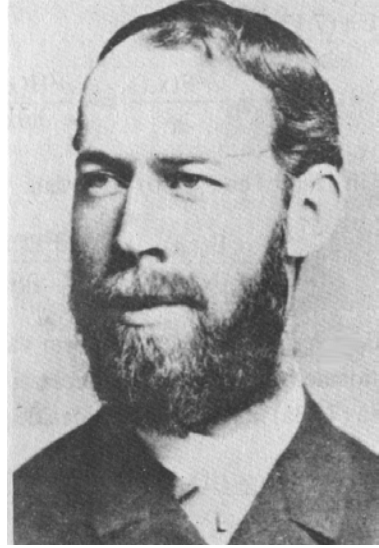


$$\vec{H}(x,t) = H_0 \sin\left\{\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right\} \vec{k}, \quad (7.17)$$

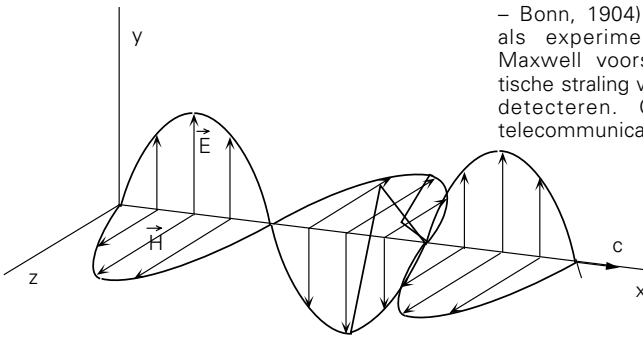
met $H_0 = \frac{E_0}{\mu_0 v}$. Met $v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, kunnen wij ook schrijven:

$$H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0. \quad (7.18)$$

De resultaten zijn geschetst in figuur 7.4 (zie ook vraagstuk 7.5 van Vraagstukken Elektriciteit en Magnetisme). Daar wordt ook bewezen dat de elektro-magnetische stralingsenergie *gelijkelijk* verdeeld is over de elektrische resp. de magnetische component.



Heinrich Rudolf Hertz (Hamburg, 1857 – Bonn, 1904). Voornamelijk bekend als experimentator, die de door Maxwell voorspelde elektro-magnetische straling wist op te wekken en te detecteren. Grondlegger van de telecommunicatie



Figuur 7.4.

Wat uit de beschouwingen duidelijk blijkt is, dat e.m.-golven:

1. *transversaal, dus gepolariseerd zijn.*
2. *in vacuüm (en isotrope media) gekenmerkt worden door $\vec{E} \perp \vec{H}$ (terwijl deze vectoren beide weer loodrecht op de voortplantingssnelheid staan.) De vector $\vec{E} \times \vec{H}$ heeft de richting van de voortplantingssnelheid.*
3. *zich voortplanten met lichtsnelheid $c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ (in vacuüm)*

De door Maxwell voorspelde e.m.-golven werden experimenteel door Hertz gevonden. Hij onderzocht polarisatie, reflectie, refractie en interferentie: alle verschijnselen bleken in overeenstemming met die welke al bekend waren voor zichtbaar licht. Zichtbaar licht onderscheidt zich slechts door de golflengte λ van andere e.m.-straling (voor zichtbaar licht in vacuüm is $400 \text{ nm} < \lambda < 800 \text{ nm}$).

7.5. Voortplanting van elektro-magnetische veldenergie; de vector van Poynting

Tegenwoordig is het algemeen bekend dat bij elektromagnetische straling ook energietransport plaats vindt. Het ligt voor de hand dat dat geschiedt in de richting van de snelheid. Daarom richten wij onze aandacht op de vector $\vec{E} \times \vec{H}$, waarvan wij de divergentie bekijken:

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}).$$

In dat deel van de vrije ruimte waar $\vec{J}_v = \vec{0}$, geldt in vacuüm:

$$\nabla \times \vec{H} = + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (7.2)$$

Dan geldt ook:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (6.6)$$

Substitutie geeft:

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Dit kunnen wij integreren over een volume τ , omsloten door een oppervlak S .

$$\int_{\tau} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) d\tau = - \int_{\tau} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\tau - \int_{\tau} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\tau.$$

De eerste integraal in het rechterlid is de toename van de elektrische veldenergie per tijdseenheid in τ en de tweede integraal de toename van de magnetische veldenergie in τ per tijdseenheid. Het rechterlid in zijn geheel is dus (vanwege de mintekens) de elektro-magnetische veldenergie die het volume τ per tijdseenheid verlaat via het oppervlak S , dat τ omsluit. Het linkerlid van de laatste vergelijking kan met de divergentiestelling worden geschreven als:

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}.$$

Deze vorm is dus op zijn beurt gelijk aan de via het oppervlak S vanuit τ uitgestraalde elektromagnetische veldenergie.

De norm $\|\vec{E} \times \vec{H}\|$ is dus de energie die per tijdseenheid door een oppervlak van 1 m^2 gaat, dat loodrecht staat op de richting van $\vec{E} \times \vec{H}$, d.w.z. de voortplantingsrichting van de golf. Wij definiëren nu een vector \vec{S} (die wij goed moeten onderscheiden van het oppervlak S) met

$$\vec{S} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{E} \times \vec{H}. \quad (7.19)$$

Men noemt \vec{S} de *vector van Poynting* (1852–1914). Deze geeft de richting en de dichtheid van het getransporteerde elektromagnetische vermogen.

7.6. Overzicht van hoofdstuk 7

Wetten van Maxwell:

1. $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{J}_v + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S};$
 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_v + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$
2. $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$
 $\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$
3. $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0;$
 $\nabla \cdot \vec{B} = 0.$
4. $\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_\tau \rho_v \, d\tau;$
 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v;$

lichtsnelheid in vacuüm $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$

Vector van Poynting: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}.$