

Vraagstukken Elektriciteit en Magnetisme

verzameld door ir. W. Buijze
en drs. R. Roest

© VSSD

Eerste druk 1992

Tweede druk 1994

Derde druk 2003

DUP Blue Print is een imprint van:

Delft University Press

P.O. Box 98, 2600 MG Delft, The Netherlands

tel. +31 15 27 85678, telefax +31 15 27 85706, e-mail info@library.tudelft.nl

internet: <http://www.library.tudelft.nl/dup>

Gepubliceerd in opdracht van de

Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft

Poortlandplein 6, 2628 BM Delft, The Netherlands

tel. +31 15 27 82124, telefax +31 15 27 87585, e-mail: hlf@vssd.nl

internet: <http://www.vssd.nl/hlf>

URL met informatie over dit boek: <http://www.vssd.nl/hlf/natuurk.html>

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photo-copying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

Printed in The Netherlands.

ISBN 90-407-1293-X

NUGI 812, 832

Keywords: elektriciteit / magnetisme.

Voorwoord

De hier bijeen gebrachte vraagstukken werden – vaak al vele jaren – gebruikt bij de werkcolleges Elektriciteit voor de eerste twee studiejaar van diverse faculteiten van de TU-Delft.

Zij zijn in de loop der tijd bedacht en geformuleerd door velen; collega's en oud-collega's. Slechts enkele vraagstukken zijn van mijn hand. De vraagstukken zijn zodanig gegroepeerd, dat het gemakkelijk is daaruit die keuze te maken, die voor een bepaald college gewenst wordt. De indeling in hoofdstukken is dezelfde als die van het theorieboek “Inleiding Elektriciteit en Magnetisme” van mijn hand; een boek dat ook is uitgegeven onder auspiciën van de VSSD bij de Delftse Uitgeversmaatschappij.

In deze druk zijn vraagstukken die betrekking hebben op paragrafen die in het theorieboek voorzien zijn van □ respectievelijk ■, op dezelfde wijze gemarkeerd. Achterin de bundel zijn de antwoorden op alle vraagstukken opgenomen.

Dat dit vraagstukkenboek gedrukt is op kringlooppapier was de uitdrukkelijke wens van de VSSD. Ik heb mij daarbij neergelegd.

Den Haag, mei 1992

W. Buijze

Voorwoord bij de tweede druk

Ten opzichte van de vorige druk zijn de vraagstukken anders gerangschikt. Dit geldt in het bijzonder voor hoofdstuk 1. Ook zijn enkele vraagstukken vervangen, terwijl er ook vraagstukken zijn toegevoegd. Om de vorige druk te kunnen gebruiken naast de nieuwe, zijn na de nieuwe nummers – waar nodig – nog de oude nummers van de betrokken vraagstukken vermeld. De nauwe samenwerking, die ik steeds heb gehad met drs. R. Roest, wordt met deze druk geformaliseerd.

Den Haag, juli 1994

W. Buijze

Voorwoord bij de derde druk

In de derde druk van dit opgavenboekje zijn enige vereenvoudigingen doorgevoerd. Vooral in hoofdstuk 8 zijn tal van aanpassingen verwerkt. De figuurnummers verwijzen in deze editie naar het nummer van de opgave.

Den Haag, juli 2001

R. Roest

Inhoud

Voorwoord	3
Algemene gegevens	6
1. Elektrostatische velden in vacuüm	7
2. Elektrostatische velden in diëlektrica	18
Elektrische dipolen	18
Polarisatie	20
3. Elektrische stromen	30
4. Het magnetische veld van stationaire stromen	33
5. Stationaire magnetische velden in magnetiseerbare materie	43
Magnetische dipolen	43
Magnetisatie	44
6. Elektromagnetische inductie	51
Inductie in niet-magnetiseerbare materialen	51
Inductie in magnetische materialen	57
Elektromechanische systemen	60
7. De vergelijkingen van Maxwell	65
8. Netwerken en wisselstromen	70
Gelijkstroomnetwerken	70
Toepassing van het superpositiebeginsel	71
Thévenin en Norton voor gelijkstroomnetwerken	72
Wisselstroomnetwerken (alleen sinus-wisselstromen/spanningen!)	73
Antwoorden	83

Algemene gegevens

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ C}^2 \text{ m}^{-2}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

1

Elektrostatistische velden in vacuüm

1.1. (1.4) Een waterstofatoom is opgebouwd uit een positief geladen kern (proton) en een elektron dat in een cirkelvormige baan om de kern beweegt. In de grondtoestand is de straal van de cirkelvormige baan $a = 0,53 \times 10^{-10}$ m. De ladingen van proton en elektron bedragen respectievelijk $+e$ en $-e$; $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C.

a. Bereken de kracht ten gevolge van de elektrostatistische wisselwerking waarmee kern en elektron elkaar aantrekken.

Vergelijk hiermee de kracht waarmee ze elkaar aantrekken ten gevolge van de gravitationele wisselwerking.

De gravitatieconstante is $6,7 \times 10^{-11}$ Nm²/kg²; $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg; $m_p = 1836 m_e$.

b. Bereken de potentiële energie van het elektron in zijn baan. Stel hierbij de potentiële energie nul als het elektron zich op zeer grote afstand van het proton bevindt.

c. Hoe groot is de totale mechanische energie van het elektron in zijn baan ten opzichte van de toestand waarbij het elektron zich *in rust* op zeer grote afstand van het proton bevindt?

d. Hoe groot is de ionisatie-energie van een waterstofatoom (uitgedrukt in J en in elektronvolt)?

1.2. (1.5) Tussen twee concentrische metalen boloppervlakken A en B (stralen a en b) bevindt zich positieve ruimtelading waarvan de dichtheid ρ als volgt afhangt van de afstand r tot het middelpunt:

$$\rho = \rho_0(a/r)^{2/3}.$$

a. Wat stelt ρ_0 voor?

b. Bereken de totale ruimtelading tussen de boloppervlakken.

1.3. (1.6.) Een dunne cirkelvormige schijf (straal R) is aan één zijde bedekt met elektrische lading. De oppervlakteladingsdichtheid σ hangt af van de afstand r tot het middelpunt:

$$\sigma = \sigma_0(r/R), \quad r \leq R.$$

a. Wat stelt σ_0 voor?

b. Bereken de totale lading van de schijf.

c. Bereken de gemiddelde ladingsdichtheid $\langle \sigma \rangle$ van de oppervlaktelading.

1.4. (1.7) tussen twee zeer lange coaxiale metalen cilindermantels A en B (straal van de cirkelvormige doorsnede resp. a en b) bevindt zich ruimtelading; de ladingsdichtheid ρ hangt als volgt samen met de afstand r tot de as:

$$\rho = \rho_0(a/r)^{2/3}$$

- a. Wat stelt ρ_0 voor?
- b. Bereken de ruimtelading per lengte l tussen de beide cilindermantels.

1.5. (1.8) Een dunne staaf (lengte l) is gelijkmatig met lading bedekt. De ladingsdichtheid is λ (> 0).

- a. Bereken de elektrische veldsterkte \vec{E} in een punt P dat in het verlengde van de staaf ligt op een afstand a van één van de uiteinden van de staaf.
- b. Bereken de potentiaal in P (stel de potentiaal in het oneindige nul).

1.6. (1.9) Een rechte draad is overal even dicht met elektrische lading bedekt, waarvan de grootte per lengte-eenheid λ is. De lengte van de draad is ℓ .

- a. Bereken de elektrische veldsterkte in een punt P in het middenloodvlak van de draad op de afstand a er vandaan.
- b. Vereenvoudig de verkregen uitkomst voor het geval dat $\ell \gg a$ is.
- c. Dezelfde vraag als bij b, maar nu voor het geval dat $a \gg \ell$.

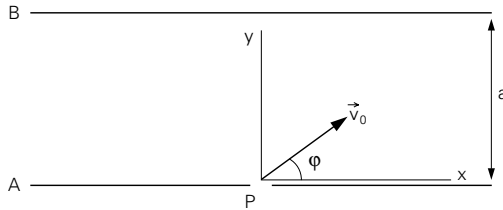
1.7. (1.10) Een cirkelvormige schijf is overal even dicht met elektrische lading bedekt met de dichtheid σ . De straal van de schijf is R .

- a. Bereken met behulp van de wet van Coulomb de elektrische veldsterkte $E_1(x)$ in een punt op de as van de schijf, op de afstand x er vandaan. De schijf is opgesteld in vacuüm.
- b. Als $R \gg x$, wat is dan de veldsterkte?
- c. Leid uit het resultaat van b af de grootte van de veldsterkte E binnen een vlakke condensator (in vacuüm) waarvan de oppervlakte van de platen S is, terwijl de afstand van de platen klein is ten opzichte van de afmetingen van de platen, als de ladingen van de platen $+Q$ en $-Q$ zijn.
- d. Leid ook uit het resultaat af dat de platen van een vlakke condensator elkaar in vacuüm aantrekken met de kracht $= \frac{1}{2} QE = \frac{1}{2} \epsilon_0 SE^2$.
- e. Bereken de potentiële energie van de geladen condensator als functie van de onderlinge afstand x . Doe dit door de potentiële energie van de ene geladen plaat te beschouwen in het veld van de andere. Kies de potentiële energie nul in de toestand waarin de platen samenvallen.

1.8. (1.11) Tussen de platen A en B bestaat een uniform veld en een potentiaalverschil V_1 ($V_A > V_B$). De afstand tussen de platen is a . Bij P komt een elektron binnen met snelheid v_0 verkregen doordat het elektron met beginsnelheid nul een potentiaalverschil V_0 heeft doorlopen.

- a. Toon aan dat als het elektron plaat B juist *niet* bereikt geldt: $V_1/V_0 = \sin^2(\varphi)$.

- b. Toon aan dat in dat geval voor de plaats waar de baan van het elektron plaat B raakt geldt: $x = 2a \cotg(\varphi)$.



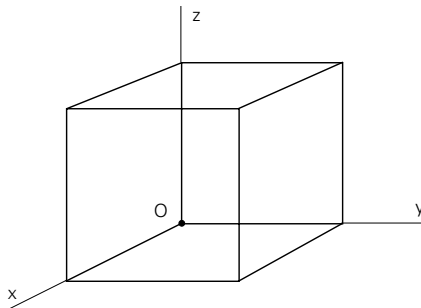
Figuur 1.8.

- 1.9.** (1.12) Een bepaalde bolsymmetrische ladingsverdeling leidt tot een (bolsymmetrisch) veld rondom een centrum O, zodanig dat de veldsterkte in een punt P gegeven is door

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (ar^3 - br) \vec{e}_r .$$

- Bereken de potentiaal $V(r)$ op een afstand r van het centrum O als de potentiaal in het centrum nul is.
- Bereken de waarde $r_e \neq 0$ van r waarvoor V een extreme waarde heeft.
- Bereken de lading die omvat wordt door een bol met straal r_e .
- Bereken de lading Q binnen een bol met een willekeurige straal r .
- Bereken de ruimteladingsdichtheid ρ als functie van r .

- 1.10.** (1.13) In en buiten de getekende (denkbeeldige) kubus hangt de elektrische potentiaal van de plaats af volgens $V = V_0 e^{-x/a} + by$. De ribbe van de kubus is c . Hoekpunt O van de kubus valt samen met de oorsprong. Het grondvlak valt samen met het vlak $z = 0$.



Figuur 1.10.

a. Bereken \vec{E} .

b. Bereken de door de kubus omvatte lading.

1.11. (1.14) Rondom een elektrisch geladen metalen bol (straal R), die zich in vacuüm bevindt, is ruimtelading aanwezig, die bolsymmetrisch is verdeeld ten opzichte van het middelpunt O van de bol. Voor de ruimteladingsdichtheid geldt: $\rho = -\frac{a}{r^n}$, waarin a en n positieve constanten zijn ($n > 3$); r is de afstand tot O ; $r > R$. Voor de elektrische veldsterkte geldt:

$$\vec{E} = \frac{a}{\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r \quad \text{voor } r \geq R.$$

a. Bereken de *totale* lading omvat door een (denkbeeldige) bol met straal $r > R$.

b. Bereken de oppervlakteladingsdichtheid van de metalen bol.

c. Bereken de *ruimtelading* binnen een denkbeeldige bol met straal $r > R$ met behulp van het antwoord op de vragen bij *a* en *b*. Bereken de *ruimtelading* ook met behulp van $Q = \int_V \rho \, d\tau$, en bepaal zo de waarde van n .

d. Bereken de potentiaal van de metalen bol (stel $V = 0$ voor $r \rightarrow \infty$).

1.12. (1.15) Een bolvormige elektronenwolk met een straal R heeft het middelpunt M in de oorsprong. De ruimteladingsdichtheid $\rho (< 0)$ is overal binnen de wolk even groot. Men schiet met een snelheid v_0 van *zeer grote* afstand buiten de wolk, een elektron (lading $-e$, massa m) in de richting van M . De potentiaal in het oneindige stelt men nul.

a. Bereken de potentiaal aan de rand van de elektronenwolk. (Stel $V = 0$ voor $r = \infty$)

b. Bereken de elektrische veldsterkte voor $0 < r < R$; r is de afstand tot M . Bereken vervolgens het potentiaalverschil tussen het middelpunt M en de rand van de elektronenwolk.

c. Hoe groot moet de snelheid v_0 tenminste zijn, opdat het elektron door de wolk heen kan worden geschoten?

1.13. (1.16) Een bolvormig deel van de luchtledige ruimte is uniform gevuld met lading, met een dichtheid ρ . De straal van de bol is R .

a. Bereken de veldsterkte E als functie van r (de afstand tot het middelpunt) in de het geval dat $r < R$ en in het geval dat $r \geq R$.

b. Bereken de potentiaal op het oppervlak van de bol. Stel $V(\infty) = 0$.

c. Bereken de potentiaal in het middelpunt.

1.14. (1.17) Tussen twee coaxiaal opgestelde cilinders bevindt zich ruimtelading. De buitenstraal van de dunne cilinder is R , de binnenstraal van de wijde cilinder is $2R$. Hun lengten zijn ℓ met $\ell \gg R$. Tussen de cilinders is de veldsterkte overal even groot en radiaal naar buiten gericht. De grootte is E_0 . De buitenste cilinder is geaard.

a. Bereken de totale ruimtelading.

b. Bereken grootte en teken van de totale lading op de buitenste cilinder.

- c. Bereken grootte en teken van de totale lading op de binnenste cilinder.
- d. Hoe groot is de potentiaal van de binnenste cilinder ten opzichte van de aarde?
- e. Bereken met behulp van de stelling van Gauss de ruimteladingsdichtheid ρ als functie van de afstand r tot de as.

1.15. (1.18) In een beperkt deel van de ruimte rond de oorsprong is een elektrisch veld gegeven: $\vec{E} = (2ax, 2ay, 0)$.

- a. Toon aan dat dit veld een potentiaalveld is.
- b. Stel in het punt $(0,0,0)$ de potentiaal nul. Bereken de potentiaal in een willekeurig punt (x,y,z) .
- c. Bereken de ladingsdichtheid in een punt (x,y,z) .

1.16. (1.19) In een beperkt gebied is een elektrisch veld, waarvan de componenten ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel gegeven zijn door:

$$E_x = ax + by + c, E_y = bx - ay + c, E_z = c$$

(a, b en c zijn positieve constanten).

- a. Is het veld in dat gebied een potentiaalveld? Verklaar uw antwoord!
- b. Bevindt zich in dat gebied lading? Verklaar uw antwoord!

1.17. (1.20) Tussen twee evenwijdige vlakke metalen platen A en B bevindt zich positieve ruimtelading. De dichtheid van deze lading op een afstand x van A is $\rho = cx^2$. De potentialen van A en B zijn beide V_0 ; de afstand van de platen is a .

- a. Bereken de potentiaal in de ruimte tussen A en B als functie van x .
- b. Bereken de dichtheid van de oppervlakteladingen die zich aan de binnenkanten van de platen A en B bevinden.

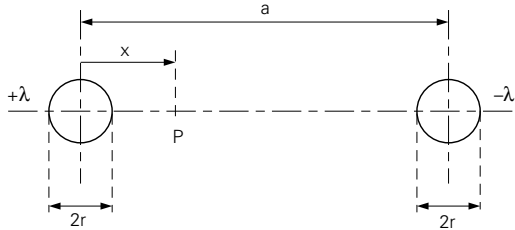
1.18. (1.21) Twee even grote vlakke metalen platen A en B zijn op afstand van $6a$ tegenover elkaar gezet. Zij zijn verbonden met een spanningsbron met sterkte U_0 . A heeft de hoge potentiaal. De oppervlakte van elk van de platen is S . Men verbreekt de verbindingen met de bron en schuift een ongeladen even grote vlakke metalen plaat C tussen A en B. De dikte van C is $2a$; de plaat komt op een afstand a van B te staan. De platen hebben elkaar niet geraakt. $a \ll \sqrt{S}$.

- a. Bereken $V_A - V_C$ en $V_C - V_B$.
- b. Bereken de arbeid die men op plaat C heeft verricht bij het naar binnen schuiven. Men gaat weer uit van de begintoestand, maar laat de verbindingen met de bron nu bestaan en schuift dan plaat C op dezelfde plaats tussen A en B.
- c. Hoe groot is nu $V_A - V_C$?
- d. Bereken de verhouding van de ladingen van plaat A vóór en ná het inschuiven van plaat C.
- e. Bereken de energie die de spanningsbron aan het stelsel platen heeft toegevoerd.
- f. Bereken de verandering van de veldenergie.
- g. Bereken de arbeid die men op plaat C heeft verricht bij het naar binnen schuiven.

1.19. (1.22) Twee zeer lange, rechte en evenwijdige hoogspanningskabels hangen op een afstand a van elkaar. De straal van de ronde doorsnede van de koperen kabels is r ; $r \ll a$. De kabels bevinden zich in lucht (vacuüm). Neem aan dat de ene kabel per meter lengte uniform bezet is met $+\lambda$ en de andere met $-\lambda$.

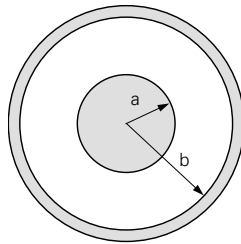
a. Bereken de elektrische veldsterkte \vec{E} in het punt P gelegen tussen beide kabels.

b. Bereken de capaciteit per meter lengte van het stelsel gevormd door beide kabels.



Figuur 1.19.

1.20. (1.23) Een lange coaxiale kabel (lengte ℓ) bestaat uit een koperen kern (straal a) omgeven door een koperen mantel (inwendige straal b). Tussen kern en mantel bevindt zich lucht die wij als vacuüm kunnen beschouwen voor wat betreft ϵ_r .



Figuur 1.20.

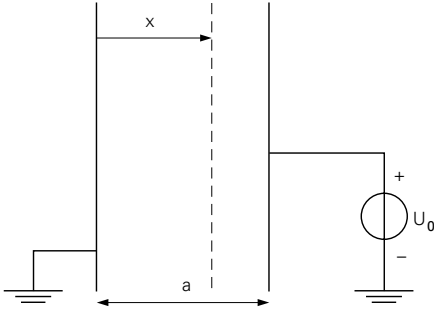
a. Bereken de capaciteit per eenheid van lengte voor deze coaxiale kabel.

Voorts wordt nu *gegeven*: de doorslagveldsterkte van lucht is $2,5 \times 10^6$ V/m. Het potentiaalverschil tussen de kern en de mantel is 10 kV. Voor de afmetingen geldt: $a = 10^{-2}$ m en $b = 5 \times 10^{-2}$ m.

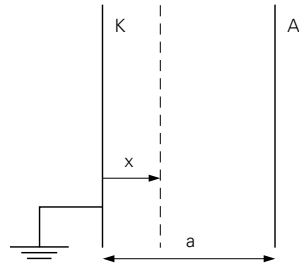
b. Bereken of er doorslag optreedt of niet.

1.21. (1.24) Twee zeer grote vlakke evenwijdige metalen platen staan op afstand a van elkaar. Er bevindt zich ruimtelading tussen. Gegeven is dat de potentiaal op afstand x van de linkerplaat ($0 \leq x \leq a$) wordt gegeven door:

$$V(x) = V_0 \left(\frac{x}{a}\right)^{4/3}, \text{ met } V_0 > 0.$$



Figuur 1.21.



Figuur 1.22.

- Bereken de veldsterkte \vec{E} ter plaatse x .
- Bereken de ruimteladingsdichtheid $\rho(x)$.
- Bereken de oppervlakteladingsdichtheden op de linker- en rechterplaat (let op de tekens!).

1.22. (1.25) Een vacuüm-diode heeft tussen de vlakke geaarde kathode K en de vlakke anode A een ruimtelading $\rho(x)$ als gevolg van de aanwezigheid van elektronen. De potentiaal in de ruimte tussen K en A voldoet op een bepaald tijdstip aan:

$$V(x) = \frac{V_0(3x-a)x}{2a^2}, \text{ met } V_0 > 0.$$

Uit de kathode komen enkele elektronen vrij met een beginsnelheid v_0 in de x -richting. De massa van een elektron is m , de grootte van de lading is e .

- Schets het verloop van de potentiaal tussen de platen op dat tijdstip.
- Aan welke voorwaarde moet v_0 voldoen opdat de door K geëmitteerde elektronen de anode bereiken?
- De onder b bedoelde elektronen bereiken de anode A met een snelheid v_A . Wat is de kleinst mogelijke waarde van v_A ?
- Bereken $\rho(x)$.

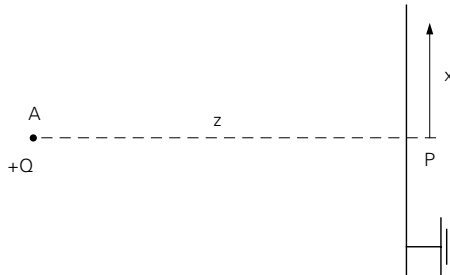
1.23. (1.26) In een gebied om de oorsprong van een rechthoekig coördinatenstelsel is de potentiaal van een elektrisch veld gegeven door:

$$V(x,y,z) = -\frac{1}{2}ax^2y^2.$$

Hierin is a een positieve constante. De ruimte is vacuüm.

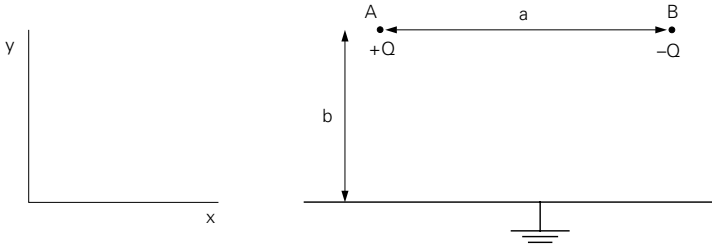
- Bereken de elektrische veldsterkte \vec{E} in dat gebied.
- Is dit \vec{E} -veld conserverend? Licht uw antwoord toe.
- Bereken de ruimteladingsdichtheid $\rho(x,y,z)$.

- d. Bereken de totale lading Q die zich bevindt binnen een cilinder, (waarvan de as samenvalt met de z -as) die een straal R heeft en een lengte ℓ .
- e. Bepaal de vergelijking van de veldlijnen in het vlak $z = 0$.



Figuur 1.24.

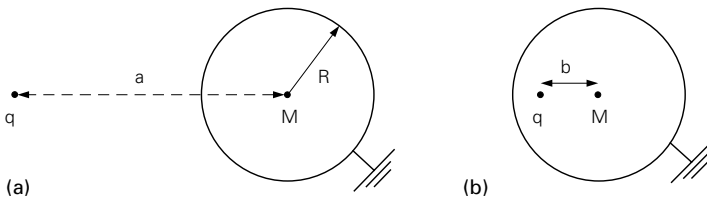
- **1.24.** (1.27) In een punt A op afstand z van een zeer grote vlakke, geaarde metalen plaat bevindt zich een positieve puntlading Q .
- Hoe groot is de oppervlakteladingsdichtheid σ op een afstand x vanaf P ?
 - Bereken de totale oppervlaktelading binnen een straal $x = a$.
 - Hoe groot is de totale lading op de plaat als deze plaat oneindig groot is?
- **1.25.** (1.28) Op een afstand a van het middelpunt van een geaarde en geleidende bol (straal R) bevindt zich een puntlading Q ($a > R$).
- Als de potentiaal V van de bol nul is (dat wil zeggen gelijk aan die in het oneindige) dan is het veld van de influentielading gelijk aan het veld van een puntlading Q' . Leidt af waar Q' zich bevindt en hoe groot deze is. Is deze Q' even groot als de influentielading?
 - Men verbreekt nu de verbinding met de aarde en brengt zoveel lading op de bol dat de bol ongeladen is. Bereken de potentiaal V_1 van de bol als in het oneindige $V = 0$ gesteld wordt.
- **1.26.** (1.29) Een hoogspanningskabel met 1 cm diameter bevindt zich op een constante potentiaal van $+50.000$ V ten opzichte van de aarde en op een constante hoogte van 50 m boven de aarde. Beschouw de aarde als een oneindig goed geleidend plat vlak en veronderstel bij de berekeningen dat de lading gelijkmatig over de de kabel verdeeld is. Bereken:
- De lading van de kabel per meter lengte.
 - De veldsterkte op aarde recht onder de kabel.
 - De kracht die op de kabel per meter lengte wordt uitgeoefend.
- 1.27.** (1.30) Twee puntladingen $+Q$ en $-Q$ zijn op afstand a van elkaar geplaatst. Beide ladingen bevinden zich op afstand b van een zeer grote geaarde vlakke plaat.



Figuur 1.27.

- a. Bereken de x- en y-componenten van de kracht die de lading $-Q$ ondervindt.
- b. Bereken de potentiële energie van de lading B. De potentiaal is in het oneindige gelijk aan nul.
- **1.28.** (1.31) Men heeft een *geaarde*, holle metalen bol met straal R en middelpunt M . Een lading q op afstand a van M gebracht ondervindt een aantrekkende kracht.
- a. Hoe groot is deze aantrekkende kracht?
- b. Hoe groot zou de kracht op q zijn, indien de lading binnen de bol op afstand b van M geplaatst was?

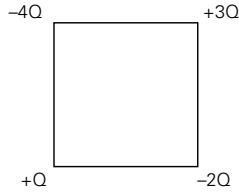
Aanwijzing: Zoek de beeldlading q' van q buiten de bol die samen met de binnen de bol geplaatste lading q ter plaatse van de bol een equipotentiaalvlak geeft.



Figuur 1.28.

- **1.29** (1.32) In de ruimte is een x-as gedefinieerd, waarop zich twee puntladingen bevinden: $+Q$ ter plaatse $x = -a$ en $-2Q$ ter plaatse $x = +a$. We stellen de potentiaal $V = 0$ voor $x \rightarrow \infty$.
- a. Bepaal de oplossingsverzameling van de vergelijking $V(x) = 0$.
- b. Bepaal de oplossingsverzameling van de vergelijking $E(x) = 0$.
- c. Bereken welke arbeid men moet verrichten om een lading van $-3Q$ te verplaatsen van $x = +2a$ naar $x = -2a$.

1.30. (1.33) Vier puntladingen Q , $-2Q$, $+3Q$ en $-4Q$ bevinden zich aanvankelijk op zeer grote afstanden van elkaar. Men brengt deze puntladingen in de hoekpunten van een vierkant met zijden a . Bereken de arbeid die men daartoe moet verrichten.



Figuur 1.30.

1.31. (1.34) Als men aanneemt dat de totale lading Ze van de atoomkern uniform verdeeld is binnen een bol met straal a , bereken dan:

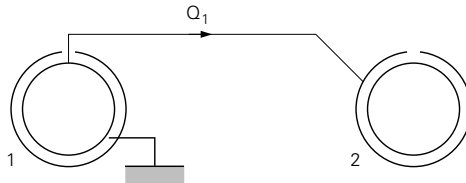
- De potentiaal op afstand $r_0 \leq a$ van de kern. Stel $V = 0$ voor $r \rightarrow \infty$.
- De elektrostatische energie van zo'n kern.

1.32. (1.35) Zie figuur 1.32a. Van twee identieke bolcondensatoren 1 en 2 is de straal van de binnenbol a en van de buitenbol b . Beide buitenbollen zijn geaard ($V = 0$). De binnenbollen hebben elk een even grote lading Q_0 en potentiaal V_0 . De afstand tussen beide condensatoren is *zeer groot* in vergelijking tot hun afmetingen. In het oneindige is $V = 0$.



Figuur 1.32a.

Men verbreekt nu de aardverbinding van condensator 2 en daarna verbindt men de binnenbol van 1 met de buitenbol van 2 (zie figuur 1.32b). Van Q_0 op de *binnenbol* van 1 vloeit daardoor een deel Q_1 naar de *buitenbol* van 2. De openingetjes in de buitenbollen zijn verwaarloosbaar klein. De nieuwe potentiaal van de *binnenbol* van 1 en van de *buitenbol* van 2 is V' . De capaciteit van de verbindingsdraad wordt verwaarloosd.



Figuur 1.32b.

- a. Is het potentiaalverschil tussen de binnen- en buitenbol van 2 nog steeds V_0 ?
Beredeneer uw antwoord!
- b. Hoe is de lading op de buitenbol van 2 verdeeld?
- c. Bereken V' uitgedrukt in V_0 , a en b!

7

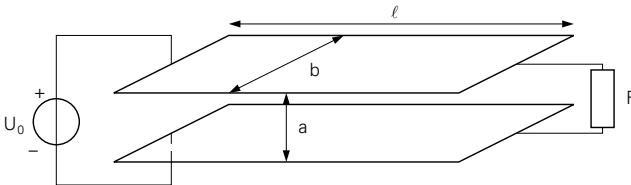
De vergelijkingen van Maxwell

7.1. Een rechte, dunne metalen draad is oneindig lang maar is over een lengte $2l$ onderbroken (tussen de punten A en B). Overal in de draad loopt gedurende zekere tijd een gelijkstroom I , zodat er opeenhoping van lading plaats vindt in de punten A en B. Gevraagd wordt de grootte van de magnetische fluxdichtheid \vec{B} in een punt van het middenloodvlak van AB op afstand R van het midden.

Voer de berekening uit volgens twee methoden:

- Gebruik de formule van Biot en Savart.
- Gebruik de eerste wet van Maxwell. *Aanwijzing:* Beschouw de zich aan de eind ophopende ladingen $+Q$ en $-Q$ als *puntladingen* en bereken \vec{D} in het middenloodvlak.

7.2. Twee platte weerstandsloze strippen zijn evenwijdig aan elkaar opgesteld ($a \ll b \ll l$). De platen zijn aan één zijde aangesloten op een gelijkspanningsbron met sterkte U_0 . Aan de andere zijde is een weerstand R geschakeld. Wij nemen aan dat de stroomdichtheid in de strippen overal dezelfde is.



Figuur 7.2.

Wij doen alsof \vec{E} en \vec{H} tussen de platen uniform zijn.

- Bereken \vec{E} en \vec{H} tussen de strippen; bekijk daarbij vraagstuk 6.9.
- Bereken de grootte en bepaal de richting van de vector van Poynting \vec{S} .
- Bereken op *twee* manieren het getransporteerde vermogen.

7.3. Van een elektromagnetische golf in vacuüm heeft de elektrische veldvector de volgende gedaante:

$$\vec{E} = (E_0 \cos(kz - \omega t), E_0 \sin(kz - \omega t), 0), \text{ waarin } k = \frac{\omega}{c} \text{ en } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

De bijbehorende magnetische fluxdichtheidsvector is:

$$\vec{B} = (B_x(z,t), B_y(z,t), B_z(z,t))$$

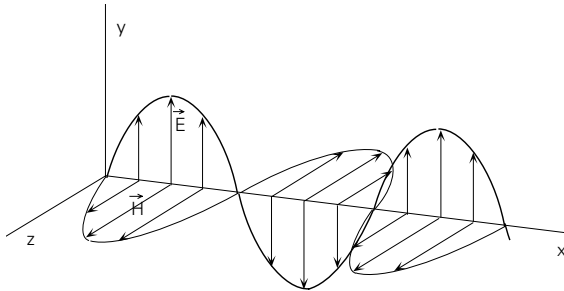
- Bereken B_x , B_y , B_z als functie van z en van t , als gegeven is dat alle integratieconstanten nul zijn.
- Bereken de bijpassende vector van Poynting \vec{S} .

7.4. Door een cilindrische geleider met eindige weerstand vloeit een gelijkstroom I . Bereken de waarde van de vector van Poynting aan het oppervlak van de draad en laat zien dat de energie die per tijd de draad invloei juist gelijk is aan het gedissipeerde vermogen aan het oppervlak.

7.5. Een bundel monochromatische straling (vlakke golf) in vacuüm wordt gekenmerkt door de volgende vectoren:

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \sin\left\{\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right\} \vec{j}$$

en
$$\vec{H}(x,t) = H_0 \sin\left\{\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right\} \vec{k} \quad \text{met } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$

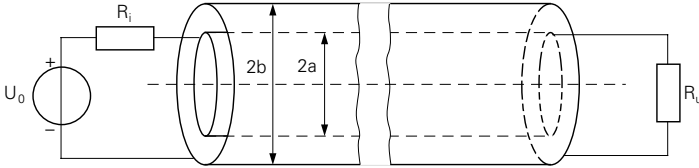


Figuur 7.5.

Er kan worden bewezen dat $H_0 = E_0 \sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$; zie §7.4.b van het theorieboek “Inleiding Elektriciteit en Magnetisme”.

- In welke richting plant deze straling zich voort?
- Hoe groot is het tijdsgemiddelde van de elektrische veldenergiedichtheid $\langle u_{el} \rangle$ van deze straling in een bepaald punt van de bundel? Bedenk dat het gemiddelde van het kwadraat van een sinus gelijk is aan $\frac{1}{2}$.
- Dezelfde vraag als *b.* maar voor $\langle u_{mag} \rangle$. Laat zien dat de elektromagnetische stralingsenergie *gelijkelijk* verdeeld is over de elektrische, respectievelijk de magnetische component van de bundel.
- Hoe groot is de totale stralingsenergie die per seconde en per m^2 een oppervlak loodrecht op de bundel treft?
- Bereken E_0 en B_0 voor het geval dat de *totale* stralingsintensiteit 10^{10} W/m^2 is. *Opmerking:* dergelijk hoge intensiteiten komen voor in laserbundels.

7.6. Een zeer lange coaxiale kabel waarvan de cilindervormige geleiders een *diameter* hebben van respectievelijk $2a$ en $2b$ wordt gebruikt als verbinding tussen enerzijds een spanningsbron met constante bronspanning U_0 en inwendige weerstand R_i en anderzijds een belastingsweerstand R_u . De kabel is weerstandsloos.



Figuur 7.6.

- Bereken de stroomsterkte uitgedrukt in U_0 , R_i , en R_u .
- Bereken het potentiaalverschil tussen de cilinders.
- Voor de (radiaal gerichte) elektrische veldsterkte tussen de cilinders als functie van de afstand r tot de as van de cilinders ($a \leq r \leq b$) geldt: $E = C/r$, waarin C een constante is. Druk de constante C uit in: a , b , U_0 , R_i en R_u .
- Bepaal de *grootte* en *richting* van \vec{H} tussen de cilinders op afstand r van de as.
- Bereken de *grootte* en *richting* van de vector van Poynting \vec{S} tussen de cilinders op afstand r van de as.
- Wat is de fysische betekenis van S ?
- Integreer S over het oppervlak van een dwarse doorsnede tussen de cilinders (bepaal dus $\iint \vec{S} \cdot d\vec{S}$ tussen $r = a$ en $r = b$).
- Bereken het vermogen dat in de uitwendige weerstand in warmte wordt omgezet.

7.7. Een bol van isolerend materiaal heeft een straal a . Op de bol is een dunne geleidende laag met dikte $b \ll a$ aangebracht; de conductiviteit van de laag is σ .

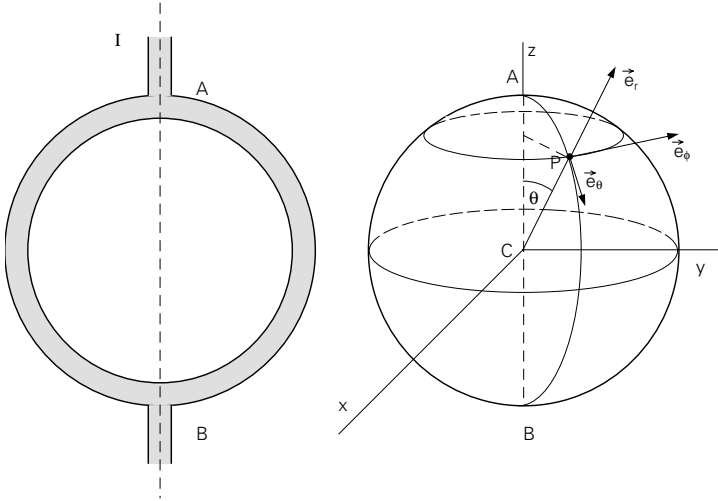
Met behulp van twee zeer lange cilindrische draden met diameter $2b$ wordt de geleidende laag in diametraal tegenover elkaar gelegen punten A en B verbonden met een stroombron die een sterkte I heeft.

We beschouwen op de buitenkant van de geleidende laag een punt P dat zo gelegen is, dat straal CP met de rechte AB een hoek θ maakt.

- Bereken de stroomdichtheid \vec{J} in de laag als functie van θ .
- Bereken de elektrische veldsterkte \vec{E} in de laag als functie van θ .
- Bereken de magnetische fluxdichtheid \vec{B} aan het buiten-oppervlak van de laag als functie van θ .

Aanwijzing: Let bij de berekening op de symmetrie van het probleem.

- Bereken de vector van Poynting \vec{S} als functie van θ .
- Bereken het door de geleidende laag gedissipeerde vermogen als gegeven is dat:



Figuur 7.7.

$$\int \frac{d\theta}{\sin(\theta)} = \ln |\operatorname{tg}(\theta/2)| + C.$$

f. Bereken de weerstand R van de geleidende laag.

7.8. Wij beschouwen een elektromagnetisch veld in een medium met een permittiviteit $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ en een permeabiliteit $\mu_0 \mu_r$. Voor de elektrische veldsterkte geldt (zoals bekend): $\vec{E} = -\partial \vec{A}/\partial t - \nabla V$.

De Eerste Wet van Maxwell luidt: $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_v + \partial \vec{D}/\partial t$. Met $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ en de vectorrelatie $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ kunnen we uit de genoemde formules een vergelijking opstellen waarin uitsluitend \vec{A} , V en \vec{J}_v voorkomen naast de tijd en de constanten ϵ en μ . Deze vergelijking geven we aan als (1).

Met behulp van de relatie $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$ kunnen we een tweede vergelijking afleiden waarin uitsluitend \vec{A} , V en ρ_v voorkomen naast de tijd en de constante ϵ . Deze vergelijking geven we aan als (2).

a. Leid zowel (1) als (2) af.

b. Het is bekend dat in *stationaire* velden geldt:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}_v \quad \text{en} \quad \nabla^2 V = -\rho_v / \epsilon.$$

Laat men in (1) en (2) de tijd-afhankelijke termen weg, dan ontstaan deze beide uitdrukkingen niet automatisch!

Dat is wel het geval, als men uitgaat van de relatie

$$\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \quad (3)$$

Schrijf (1) en (2) nog eens op, voor het geval dat aan (3) voldaan is. Merk op dat we hier twee onafhankelijke golfvergelijkingen hebben gekregen voor \vec{A} en voor V .

Opmerking: men noemt (3) de *lorentzconditie*: als voldaan is aan (3), dan zijn (1) en (2) in de laatst opgeschreven vorm juist.

Antwoorden

1. Elektrostatistische velden in vacuüm

1.1. *a.* $8,12 \times 10^{-8}$ N; gravitatiekracht $\approx 4 \times 10^{-47}$ N; *b.* $-4,36 \times 10^{-18}$ J;
c. $-2,18 \times 10^{-18}$ J; *d.* $+2,18 \times 10^{-18}$ J = 13,6 eV.

1.2. *a.* Ruimteladingsdichtheid bij A; *b.* $\frac{12}{7} \pi \rho_0 a^{2/3} (b^{7/3} - a^{7/3})$.

1.3. *a.* Oppervlakteladingsdichtheid aan rand; *b.* $\frac{2}{3} \pi \sigma_0 R^2$; *c.* $\frac{2}{3} \sigma_0$.

1.4. *a.* Ruimteladingsdichtheid bij A; *b.* $\frac{3}{2} \pi \rho_0 a^{2/3} \ell (b^{4/3} - a^{4/3})$.

1.5. *a.* $\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{l}{a(a+l)}$; *b.* $\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{l+a}{a}\right)$.

1.6. *a.* $\frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0 a \sqrt{l^2 + 4a^2}}$; *b.* $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$; *c.* $\frac{\lambda l}{4\pi\epsilon_0 a^2}$ (Wet van Coulomb).

1.7. *a.* $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)$; *b.* $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$; *c.* $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$; *d.* —; *e.* $\frac{\sigma Q x}{2\epsilon_0}$.

1.8. —.

1.9. *a.* $V = \frac{1}{\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{4} ar^4 - \frac{1}{2} br^2 \right\}$; *b.* $r_e = \sqrt{\frac{b}{a}}$; *c.* Gauss $\Rightarrow Q_{\text{omvat}} = 0$;

d. $Q_{\text{omvat}} = 4\pi(ar^5 - br^3)$; *e.* $\rho = 5ar^2 - 3b$.

1.10. *a.* $\vec{E} = \frac{V_0}{a} e^{-x/a} \vec{i} - b\vec{j} + 0\vec{k}$; *b.* $\frac{\epsilon_0 V_0 c^2}{a} \{e^{-c/a} - 1\}$.

1.11. *a.* $\frac{4\pi a}{r}$; *b.* $\frac{a}{R^3}$; *c.* $n = 4$; *d.* $\frac{a}{2\epsilon_0 R^2}$.

1.12. *a.* $\frac{R^2 \rho}{3\epsilon_0}$; *b.* $\frac{r\rho}{3\epsilon_0}$ en $\frac{R^2 \rho}{6\epsilon_0}$; *c.* $v_0 = R \sqrt{\frac{-e\rho}{\epsilon_0 m}}$.

1.13. *a.* $\frac{r\rho}{3\epsilon_0}$ en $\frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2}$; *b.* $\frac{R^2 \rho}{3\epsilon_0}$; *c.* $\frac{R^2 \rho}{2\epsilon_0}$.

1.14. *a.* $2\pi\epsilon_0 R/E_0$; *b.* $-4\pi\epsilon_0 R/E_0$; *c.* $+2\pi\epsilon_0 R/E_0$; *d.* $E_0 R$; *e.* $\frac{\epsilon_0 E_0}{r}$.

1.15. *a.* $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$; *b.* $-a(x^2 + y^2)$; *c.* $4a\epsilon_0$.

1.16. *a.* Ja; *b.* nul.

1.17. *a.* $\frac{c(a^3 - x^3)}{12\epsilon_0} x + V_0$; *b.* $-\frac{ca^3}{12}$, $-\frac{ca^3}{4}$.

1.18. *a.* $\frac{1}{2} U_0$; $\frac{1}{6} U_0$; *b.* $-\frac{\epsilon_0 S}{36a} U_0^2$; *c.* $\frac{3}{4} U_0$, $\frac{1}{4} U_0$; *d.* 2:3; *e.* $+\frac{\epsilon_0 S}{12a} U_0^2$;
f. $+\frac{\epsilon_0 S}{24a} U_0^2$; *g.* $-\frac{\epsilon_0 S}{24a} U_0^2$.

1.19. *a.* $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{a-x} \right\}$; *b.* $\approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(a/r)}$.

1.20. a. $\frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}$; b. neen.

1.21. a. $-\frac{4}{3a^{4/3}}V_0(x)^{1/3}\vec{i}$; b. $-\frac{4\epsilon_0V_0}{9}x^{-2/3}$; c. 0 en $\frac{4\epsilon_0V_0}{3a}$.

1.22. a. $V(\frac{1}{3}a) = 0$; $V(\frac{1}{6}a) = -\frac{V_0}{24}$ is minimaal; b. $v_0 > \sqrt{\frac{eV_0}{12m}}$;
c. $5v_0$ minimaal; d. $-\frac{3\epsilon_0V_0}{a^2}$, overall gelijk.

1.23. a. $(axy^2, ax^2y, 0)$; b. $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$; c. $\epsilon_0a(x^2 + y^2)$;
d. $\frac{1}{2}\pi\epsilon_0aR^4$; e. $x^2 - y^2 = \text{const.}$

1.24. a. $\sigma = -\frac{Q}{2\pi} \frac{z}{(z^2 + x^2)^{3/2}}$; b. $Q\{\frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} - 1\}$; c. $-Q$.

1.25. a. $Q' = -\frac{R}{a}Q$ op afstand $x = \frac{R^2}{a}$ van middelpunt bol, aan de kant van Q ; deze Q' is even groot als de influentielading; b. $Q/4\pi\epsilon_0a$.

1.26. a. $\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0V}{\ln(2h/r_1)} = 2,81 \times 10^{-7} \text{ C/m}$; b. $-\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0h}\vec{j} = -202\vec{j} \text{ N/C}$;
c. $\frac{-\lambda^2}{4\pi\epsilon_0h}\vec{j} = -1,4 \times 10^{-5}\vec{j} \text{ N/m}$.

1.27. a. $\frac{Q^2\cos(\alpha)}{4\pi\epsilon_0(a^2 + 4b^2)} - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0a^2}$; $\frac{-Q^2}{4\pi\epsilon_0b^2} + \frac{Q^2\sin(\alpha)}{4\pi\epsilon_0(a^2 + 4b^2)}$
met $\sin(\alpha) = \frac{2b}{\sqrt{a^2 + 4b^2}}$; b. $-\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0a} + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + 4b^2}} - \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0b}$.

1.28. a. $\frac{Ra^2q^2}{4\pi\epsilon_0(a^2 - R^2)^2}$; b. $q' = -\frac{aq}{R}$, met $a = R^2/b$ wordt $q' = -\frac{R}{b}q$;
 $F = \frac{bRq^2}{4\pi\epsilon_0(R^2 - b^2)^2}$.

1.29. a. $V = 0$ voor $x = -\frac{1}{3}a$ en $x = -3a$; b. $E = 0$ voor $x = -3a - 2a\sqrt{2}$;
c. $A_{wjj} = \frac{-3Q^2}{2\pi\epsilon_0a}$.

1.30. $-\frac{6Q^2}{\pi\epsilon_0a} + \frac{11Q^2}{4\pi\epsilon_0a\sqrt{2}}$.

1.31. a. $\frac{1}{2}\{3 - (\frac{r}{a})^2\} \frac{Zc}{4\pi\epsilon_0a}$; b. $\frac{3(Zc)^2}{20\pi\epsilon_0a}$.

1.32. a. Ja; b. binnen $-Q_0$, buiten $+Q_1$; $V' = \frac{a}{b}V_0$.

2. Elektrostatistische velden in diëlektrica

2.1. a. $1,38 \times 10^{-22}$; b. $1,38 \times 10^{-14}$; c. $V = 0$; d. $r > 1,5 \times 10^{-10} \text{ m}$.

6.13. $a. \frac{I}{2\pi r}$; $b. \frac{Ir}{2\pi a^2}$; $c. \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left\{ \frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right\}$; $d. L_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right\}$.

6.14. $-\frac{MI}{L}$.

6.15. $a. \mu_0 \mu_r n C t$; $b. \frac{\mu_0 \mu_r n C r}{2}$; $c. \frac{\mu_0 \mu_r n C \gamma r}{2}$; $d. \frac{\pi \gamma l}{8} (\mu_0 \mu_r n C)^2 r_0^4$.

6.16. 24 mH.

6.17. $a. 64 \text{ mH}$; $b. 57,5 \text{ mH}$.

6.18. $a. 10^6 \text{ A/m}$; $b. 8\pi \cdot 10^{-2} \text{ Vs}$.

6.19. $a. -$; $b. \frac{\mu N^2 S}{l}$.

6.20. $a. 15 \text{ mA}$; $b. 6,75 \cdot 10^{-5} \text{ J}$; $c. -$; $d. \text{warmte}$; $e. 3 \text{ mV}$.

6.21. $a. 500 \text{ A/m}$; $b. 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$; $c. L = 1,25 \text{ H}$; $d. \text{neen}$; $e. \text{neen}$; $f. 0,022 \text{ J}$.

6.22. $a. C = \frac{\mu_0 m R^2}{2}$; $b. J = \gamma E = \frac{\gamma^3 \mu_0 m R v_0}{4\pi} \left\{ \frac{x}{(x^2 + R^2)^{5/2}} \right\}$;

$c. I = \frac{\mu_0 m R v_0 \gamma b}{4\pi} \left\{ \frac{1}{(l^2 + R^2)^{3/2}} - \frac{1}{(4l^2 + R^2)^{3/2}} \right\}$.

6.23. $+\frac{n_1 n_2 R_{m3}}{R_{m1} R_{m2} + R_{m2} R_{m3} + R_{m3} R_{m1}}$.

6.24. $\Phi_1 = \frac{\mu_0 \mu_r S (4a + \mu_r d) n I}{15a^2 + 6\mu_r a d}$; $\psi = n \Phi_1$.

6.25. $a. -$; $b. -$; $c. -$.

6.26. $a. -$; $b. -$; $c. K = \frac{1}{2} I^2$.

6.27. $a. -$; $b. -$;

6.28. $a. U_0/r \ln(r_2/r_1)$, zowel in vacuüm als in materie; $b. \sigma_A = \epsilon_0 \epsilon_r U_0/r_1 \ln(r_2/r_1)$,

$\sigma_B = \sigma_A/\epsilon_r$; $c. \frac{2\pi\epsilon_0(\epsilon_r - 1)U_0^2\Delta x}{\ln(r_2/r_1)}$; $d. \frac{\pi\epsilon_0(\epsilon_r - 1)U_0^2\Delta x}{\ln(r_2/r_1)}$;

$e.$ idem als $d.$ maar zonder Δx .

7. De vergelijkingen van Maxwell

7.1. $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left\{ 1 - \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}} \right\}$.

7.2. $a. E = \frac{U_0}{a}$, $H = \frac{U_0}{Rb}$; $b. \frac{U_0^2}{Rab}$ naar rechts; $c. \frac{U_0^2}{R}$.

7.3. $a. \vec{B} = (-E_0\sqrt{\epsilon_0\mu_0}\sin\{\omega(\sqrt{\epsilon_0\mu_0}z - t)\}, E_0\sqrt{\epsilon_0\mu_0}\cos\{\omega(\sqrt{\epsilon_0\mu_0}z - t)\}, 0)$;

$b. \vec{S} = \vec{k}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_0^2$. **7.4.** —.

7.5. $a.$ in x -richting; $b. \frac{1}{4}\epsilon_0 E_0^2$; $c. \frac{1}{4}\mu_0 H_0^2 = \frac{1}{4}\epsilon_0 E_0^2$; $d. \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 c \text{ W/m}^2$;
 $e. 2,74 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ en $91 \cdot 10^{-4} \text{ T}$.

7.6. $a. I = \frac{U_0}{R_i + R_u}$; $b. U = \frac{U_0 R_u}{R_i + R_u}$; $c. = \frac{U_0 R_u}{R_i + R_u} (\ln \frac{b}{a})^{-1}$; $d. H = \frac{U_0}{R_i + R_u} \cdot \frac{1}{2\pi r}$;

e. $S = \frac{U_0^2 R_u}{(R_i + R_u)^2} \cdot \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} \cdot \frac{1}{2\pi l^2}$; f. richting // as en in richting stroom binnencilinder (vermogen stroomdichtheid); g. $\frac{U_0^2 R_u}{(R_i + R_u)^2}$; h. $\frac{U_0^2 R_u}{(R_i + R_u)^2}$.

7.7. a. $\vec{J} = \frac{I}{2\pi ab \sin(\theta)} \vec{e}_\theta$; b. $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma ab \sin(\theta)} \vec{e}_\theta$; c. $B = \frac{-\mu_0 I}{2\pi a \sin(\theta)} \vec{e}_\phi$;

d. $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{I^2}{4\pi^2 \sigma a^2 b \sin^2(\theta)} \vec{e}_r$; e. $\frac{I^2}{\pi b \sigma} \ln(\frac{2a}{b})$; f. $\frac{I}{\pi b \sigma} \ln(\frac{2a}{b})$.

7.8. a. $\nabla^2 \vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}_v + \nabla(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t})$ (1)

$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A})$ (2)

b. $\nabla^2 \vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}_v$ (1')

$\nabla^2 V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$ (2')

8. Netwerken en wisselstromen

8.1. Links $R_v = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$; rechts $R_v = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$.

8.2. $\alpha = 21$, $\beta = 10$ en $\gamma = 8$ (A); $R_v = 3,2 \Omega$.

8.3. $\alpha = 1$ en $\beta = 2,5$ (A).

8.4. $P_1 = 1$, $P_2 = -1$ en $P_3 = 0$ (W).

8.5. $U_1 = 1$ en $U_2 = 2$ (V).

8.6. $I_1 = 2$ en $I_2 = 1$ (A).

8.7. $\alpha = 2$ (A).

8.8. a. Niets; b. $R_1 R_4 = R_2 R_3$.

8.9. $\alpha = 4/3$ en $\beta = 1$ (A).

8.10. a. 12 V; 1,2 A; 10 Ω;

b. 4/5 V; 12/11 A; 11/15 Ω;

c. 6/5 V; 18/11 A; 11/15 Ω;

d. 60 V; 18/13 A; 130/3 Ω;

e. 64/19 V; 32/7 A; 14/19 Ω.

8.11. a. 8 W; b. 20 W; c. 8 W; d. 80/9 W; e. geen equivalentie intern!

8.12. 8/9; 1; 8/8; 0; 0. Als $R = R_T = 1 \Omega$.

8.13. $\frac{1}{2}$ A. 8.14. a. $I = \frac{1}{3}$ (A); b. $P = 50/9$ (W); c. $R = 40$ (Ω).

8.15. $R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$; $R + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}$; $\frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$.

8.16. $\frac{1}{\omega C_1} = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$.