

# 5 Stromingsleer

## 5.1 Inleiding

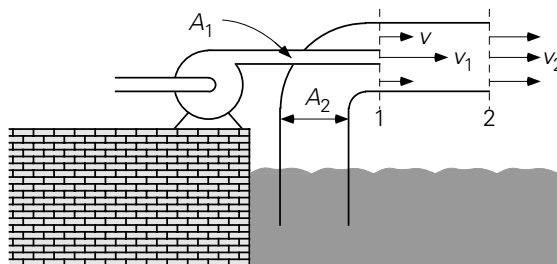
In hoofdstuk 1 zijn balansen geïntroduceerd; deze bleken daar, en ook later in de daaropvolgende hoofdstukken, uitermate handig bij het oplossen van allerlei transportproblemen. De vorm van deze balansen is steeds hetzelfde en luidt:

$$\frac{d}{dt} = \text{in} - \text{uit} + \text{productie} \quad (5.1)$$

Aan het begin van dit hoofdstuk over stromingsleer lijkt het geschikt aan de hand van balansen nog eens te demonstreren hoe stroming verkregen wordt door het toevoeren van impuls (eenheid: Ns) en hoe stroming gehoorzaamt aan en beschreven wordt door de massa-, impuls- en energiebalansen.

### Voorbeeld 5.1. Een vuilwaterpomp

In een bassin bevindt zich water met daarin opgelost een zeer corrosieve stof. Dit water moet via een transportleiding overgepompt worden in tanks. De beschikbare pomp mag echter niet in aanraking komen met de corrosieve stof. Daarom is een opstelling gebouwd zoals geschetst in figuur 5.1.



Figuur 5.1.

Aan de perszijde van de pomp wordt een pijp (doorsnede  $A_1 = 20 \text{ cm}^2$ ) aangesloten die vervolgens aan de buitenzijde van een bocht de transportleiding (doorsnede  $A_2 = 180 \text{ cm}^2$ ) in wordt gestoken. De pomp perst schoon water met een uniforme snelheid  $v_1 = 10 \text{ m/s}$  de transportleiding in. Een deel van de impuls van dit water wordt overgedragen naar het vuile water in de transportleiding. Op deze manier wordt water uit het bassin opgezogen en naar de tanks gepompt. Op enige afstand (bij punt 2 in de figuur) van het mengpunt (punt 1) is de snelheid weer uniform over  $A_2$  en gelijk aan  $v_2 = 2 \text{ m/s}$ . Deze situatie mag als stationair in de tijd worden

beschouwd. Voorts mag (voor de eenvoud) wrijving aan de wanden van de leidingen verwaarloosd worden en tenslotte mag aangenomen worden dat de dichtheid van het schone en het vuile water gelijk is (namelijk  $10^3 \text{ kg/m}^3$ ).

Allereerst volgt de snelheid  $v$  van het vuile water op punt 1 dankzij een *massabalans* over het gehele volume tussen 1 en 2 uit de gegeven snelheden  $v_1$  en  $v_2$  :

$$0 = \rho A_1 v_1 + \rho(A_2 - A_1)v - \rho A_2 v_2 \quad (5.2)$$

Invullen van de gegeven waarden geeft dat de snelheid  $v$  gelijk is aan 1 m/s en dat het debiet van het vuile water 16 l/s bedraagt.

In een balans voor de *impuls* in de stromingsrichting moeten alle krachten die in die richting werken meegenomen worden. Aangezien wrijving aan de wanden verwaarloosd mag worden, zijn wandwrijvingskrachten langs de pijpwanden niet aan de orde. En omdat ook de zwaartekracht niet in de stromingsrichting werkt, blijven alleen drukkrachten op de in- en uitreevlakken bij de punten 1 en 2 over. In het gehele vlak 1 heerst wel een uniforme druk  $p_1$ : er is immers daar geen stroming in de radiale richting. De impulsbalans over hetzelfde controlevolume tussen de vlakken 1 en 2 luidt daarmee dan:

$$0 = \rho A_1 v_1 \cdot v_1 + \rho(A_2 - A_1)v \cdot v - \rho A_2 v_2 \cdot v_2 + A_2 p_1 - A_2 p_2 \quad (5.3)$$

Eliminatie van  $v$  uit vergelijking (5.3) met behulp van vergelijking (5.2) levert voor de drukval van 1 naar 2:

$$p_1 - p_2 = -\rho \frac{A_1}{A_2 - A_1} (v_1 - v_2)^2 < 0 \quad !! \quad (5.4)$$

Er is dus geen drukval, maar een druktoename:  $p_2 = p_1 + 8 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ ! Dat bij punt 1 een *onderdruk* heerst ten opzichte van bij punt 2, komt door de overdracht van impuls vanuit de persleiding van de pomp. Deze impulstoevoer is nu de drijvende kracht achter de stroming: deze zuigt als het ware het vuile water uit het bassin. Waar de snelheden tussen schoon en vuil water vereffend zijn en de zuigende werking voorbij, is de druk  $p_2$  hoger, juist vanwege de toevoer van impuls door vlak 1 die daar nog niet tot uiting komt in de (statische) druk  $p_1$ . Vanuit de wet van Bernoulli is bekend dat kinetische energie omgezet kan worden in ‘druk’-energie en dat afremming drukverhoging kan opleveren.

De impulsoverdracht naar het vervuilde water gaat overigens wel gepaard met dissipatie van mechanische energie. Dit volgt weer rechttoe rechtaan uit de *mechanische-energiebalans*:

$$0 = \rho A_1 v_1 \left( \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} \right) + \rho(A_2 - A_1)v \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p_1}{\rho} \right) + \\ - \rho A_2 v_2 \left( \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} \right) - \phi_{mefr} \quad (5.5)$$

Elimineren van  $v$  m.b.v. de massabalans (5.3), van  $p_1 - p_2$  m.b.v. van de impulsbalans (5.4) en delen door de massastroom levert voor de dissipatie:

$$\begin{aligned} e_{fr} &= \frac{A_1 v_1}{A_2 v_2} \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{A_2 v_2 - A_1 v_1}{A_2 v_2} \frac{1}{2} \left( \frac{A_2 v_2 - A_1 v_1}{A_2 - A_1} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{A_1}{A_2 - A_1} (v_1 - v_2)^2 \\ &= 18 \text{ J/kg} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Dit verlies aan mechanische energie gaat uiteraard in opwarming van het water zitten. De temperatuurstijging kan weer bepaald worden met de *thermische-energiebalans*. Neem daartoe aan dat het water bij punt 1 op uniforme temperatuur  $T_1$  is. De inwendige energieconcentratie  $u$  van het vuile water is nu bij punt 1 dus gelijk aan die van het schone water (dezelfde  $T$  en  $c_p$ ). De thermische-energiebalans over het controle-volume luidt:

$$0 = \rho A_1 v_1 \cdot u_1 + \rho(A_2 - A_1) v u_1 - \rho A_2 v_2 \cdot u_2 + \phi_m e_{fr} \quad (5.7)$$

en is met behulp van de massabalans (5.2) gemakkelijk te vereenvoudigen tot

$$u_2 - u_1 = e_{fr} \rightarrow T_2 - T_1 = \frac{e_{fr}}{c_p} = 4,3 \cdot 10^{-3} \text{ K} \quad (5.8)$$

□

Over de stroming in dit voorbeeld konden uitspraken gedaan worden, omdat informatie gegeven was over de snelheden  $v_1$  en  $v_2$  (en daarmee over drijvende kracht en resulterend totaaldebiet). Uit deze informatie vloeiden, dankzij de verschillende balansen, waarden voor vuilwaterdebiet, drukverschil en temperatuurstijging voort. Eigenlijk is dit een soortgelijke situatie als in voorbeeld 1.19 waar het debiet en het drukverschil tussen twee posities in een stroming waren gegeven. In de praktijk is zoveel informatie zeker in een ontwerpsituatie niet beschikbaar.

Meestal is slechts één gegeven bekend en wordt de rest gevraagd: hoe groot wordt voor een gegeven drukverschil (of, in het algemeen, een drijvende kracht) het debiet, of hoe groot drukverschil moet aangelegd worden om een bepaald debiet te verwezenlijken. Dan dient wel meer bekend te zijn over de energiedissipatie die daarmee gepaard gaat. Dan gaat het dus over de  $e_{fr}$ -term in de mechanische-energiebalans als geïntroduceerd in hoofdstuk 1.

In het eerste deel van dit hoofdstuk ligt de nadruk op *technische stromingsleer*: hoe energiedissipatie in rekening kan worden gebracht met behulp van empirische wrijvings- of drukvalcoëfficiënten. Eerst passeren een aantal verschillende stroommeters de revue (in § 5.2) en vervolgens wordt het verband tussen debiet door en drukval over transportleidingen (§ 5.3 en § 5.4) en gepakte bedden (§ 5.5) behandeld. Hierbij spelen balansen weer een belangrijke rol.

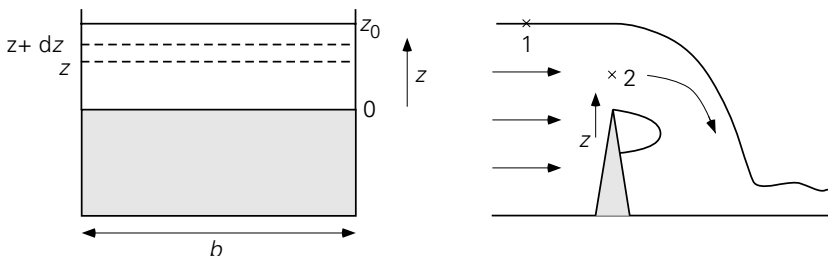
In het tweede deel van dit hoofdstuk komen laminaire stromingen aan de orde. De techniek die bij het beschrijven van deze stromingen gebruikt wordt, behelst het opstellen van krachtenbalansen over typische volume-elementjes ergens in het stromingsveld (microbalansen). Bij laminaire stromingen wordt het transport van impuls loodrecht op de stromingsrichting onderhouden door de moleculen; daarom moet onderscheid gemaakt worden tussen fluïda die de *wet van Newton* betreffende het verband tussen schuifspanning en snelheidsgradiënt (ofwel betreffende *moleculair impulstransport*) gehoorzamen (de zogenaamde *Newtonse vloeistoffen*) en fluïda die dat niet doen (de zogenaamde *niet-Newtonse vloeistoffen*). Deze worden separaat behandeld in respectievelijk de paragrafen 5.6 en 5.7. Aan het eind van dit hoofdstuk (in § 5.8) worden de Navier-Stokes-vergelijkingen geïntroduceerd die elke stroming in een meerdimensionaal domein, ook tijdsafhankelijk en compressibel of incompressibel, beschrijven.

## 5.2 Stroommeters

In § 1.3.3 zijn al enige instrumenten besproken waarmee stroomsnelheden van vloeistoffen of gassen bepaald kunnen worden, namelijk de pitotbuis en de venturibuis. In deze paragraaf zullen nog drie *debietmeters* geïntroduceerd worden: de overloop, de meetschijf en de rotameter. De overloop vergt een wat gedetailleerdere beschouwing op grond van de Bernoulli-vergelijking dan pitot- en venturibuis, terwijl bij meetschijf en rotameter energiedissipatie beslist niet verwaarloosd mag worden.

### 5.2.1 Overloop

In figuur 5.2 is een doorsnede van een waterloop (een sloot, een kanaal of een beekje) geschetst. Op een bepaalde positie is een schot dwars, over de hele breedte, in de waterloop geplaatst. Het schot (dit is de eigenlijke overloop) is minder hoog dan het waterniveau stroomopwaarts, zodat er water over de overloop stroomt. De overloop heeft aan de bovenzijde een scherpe rand: de waterstraal schiet als het ware over de rand. Dit betekent dat de stroming de overloop passeert zonder dat er wrijving aan een wand kan plaats vinden (dus  $e_{fr} = 0$ ) en dat achter het schot de straal 'vrij' is: dat wil



Figuur 5.2.

weer zeggen dat de druk overal in de straal achter de overloop atmosferisch is. Voor de eenvoud wordt verondersteld dat de dwarsdoorsnede van de waterloop rechthoekig is.

Het debiet over de overloop hangt af van de hoogte  $z_0$  van het waterniveau gemeten t.o.v. de bovenrand van het schot. Het debiet kan derhalve geregeld worden door het schot verticaal te bewegen. Hier is de vraag aan de orde hoe het debiet kwantitatief van  $z_0$  afhangt.

De uitwerking van dit probleem kan met enkel gebruik van de *Bernoulli-vergelijking*:

$$\frac{1}{2} v_1^2 + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2} v_2^2 + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \quad (5.9)$$

Hierbij is, in termen van de mechanische-energiebalans, gebruikt dat  $\rho$  constant is en dat  $\phi_w = 0$  en  $e_{fr} = 0$ .

Beschouw twee punten (1 en 2 in figuur 5.2): punt 1 bevindt zich op het wateroppervlak een eindje stroomopwaarts van de overloop, punt 2 bevindt zich op een hoogte  $z$  boven de overloop (precies in het vlak van het schot). Voor deze punten geldt:

punt 1:  $p_1 = p_0$ ;  $z_1 = z_0$ ;  $v = v_1$

punt 2:  $p_2 = p_0$ ;  $z_2 = z$ ;  $v = v_2 \gg v_1$

Deze laatste aanname is overigens alleen waar indien  $z_0$  beduidend kleiner is dan de diepte van de beek stroomopwaarts van de overloop (bij punt 1). Deze gegevens invullen in de Bernoulli-vergelijking geeft

$$v_2 = \sqrt{2g(z_0 - z)} \quad (5.10)$$

Nu kan hiermee de bijdrage berekend worden die een strip tussen  $z$  en  $z + dz$  levert aan het debiet over de overloop:

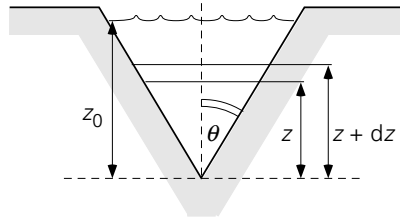
$$d\phi_v = v_2(z) \cdot b \, dz = b \sqrt{2g(z_0 - z)} \, dz \quad (5.11)$$

Het totale debiet volgt uit integratie van vergelijking (5.11):

$$\phi_v = b \sqrt{2g} \int_0^{z_0} \sqrt{z_0 - z} \, dz = b \sqrt{2g} \, z_0^{3/2} \int_0^1 \sqrt{1-t} \, dt = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} z_0^3 \quad (5.12)$$

Er zijn allerlei andere vormen van een overloop in gebruik, bijvoorbeeld een overloop in de vorm van een driehoek (zie figuur 5.3). De analyse loopt geheel parallel aan die van de rechthoekige overloop en wijkt pas af bij de bepaling van het debiet door een stripje. Immers, nu is ook de lengte  $b$  van de strip een functie van de hoogte:  $b = 2z \tan \theta$ . Het debiet volgt nu uit

$$\phi_v = 2 \tan \theta \sqrt{2g} \int_0^{z_0} z \sqrt{z_0 - z} \, dz = \frac{8}{15} \tan \theta \sqrt{2g} \, z_0^{5/2} \quad (5.13)$$



Figuur 5.3.

Nieuw en belangrijk in bovenstaande analyse is het gebruik van de Bernoulli-vergelijking om de snelheid lokaal, namelijk op hoogte  $z$ , uit te rekenen. Deze wijze van Bernoulli toepassen past bij de fysica van de situatie: de snelheid op hoogte  $z$  hangt af van de dikte  $z_0 - z$  van de laag vloeistof boven hoogte  $z$  die de vloeistof op hoogte  $z$  als het ware over de overloop heen ‘drukt’. Dit wordt ook uitgedrukt in vergelijking (5.10). Anders gezegd: de potentiële energie die het water in punt 1 aan het oppervlak heeft ten opzichte van de hoogte  $z$  wordt omgezet in kinetische energie. In feite verschilt de situatie bij een overloop niet wezenlijk van die van voorbeeld 1.20; alleen mocht in voorbeeld 1.20 de variatie van de snelheid over de hoogte van het gaatje verwaarloosd worden, omdat de grootte van het gaatje klein was verondersteld ten opzichte van de vloeistofhoogte  $H$  in het vat.

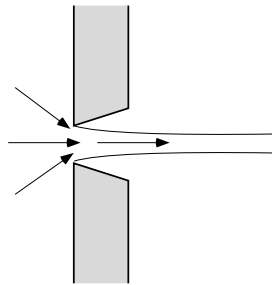
De analyse voor beide overlopen is feitelijk gebaseerd op de mechanische-energiebalans, waarbij dissipatie verwaarloosd is. Het aldus gevonden resultaat stemt echter niet overeen met de werkelijkheid: het voorspelde debiet is te hoog, met name bij niet-vlakke overlopen zoals die van figuur 5.3. Wat is hier mis? In de eerste plaats is de aanname dat er geen dissipatie is, natuurlijk een benadering van de werkelijkheid. Bij de omzetting van druk- en/of potentiële energie in kinetische energie gaat altijd wel wat mechanische energie verloren en wordt er dus minder kinetische energie ‘geproduceerd’ dan idealiter gesproken zou kunnen. Bovendien voldoen veel overlopen in de praktijk slecht aan de aanname dat de overloop een scherpe bovenrand heeft. Kortom: in het algemeen is de snelheid boven een overloop door dissipatie minder hoog en dus het debiet lager dan berekend met Bernoulli.

Toch is dit effect lang niet voldoende om het verschil tussen de berekening en de werkelijkheid goed te maken. Nog een ander effect is niet in rekening gebracht: de *contractie* van de vloeistofstroming ten gevolge van de versnelling van de vloeistof op weg naar het doorstroomvlak zoals die ook al kort is aangestipt in voorbeeld 1.20 bij de uitstroming door een klein gaatje. Ten gevolge van die contractie is het doorstroomde oppervlak kleiner dan het geometrisch gezien beschikbare en dientengevolge is ook het debiet kleiner. Dit effect wordt algemeen in rekening gebracht door het debiet berekend volgens Bernoulli (zie ook vergelijking (1.150)) te vermenigvuldigen met een *doorstroomcoëfficiënt*  $C_d$  (in het Engels: discharge coefficient) kleiner dan één:

$$\phi_V = C_d A v = C_d A \sqrt{2g(z_0 - z)} \quad (5.14)$$

Let wel dat deze door- of *uitstroomcoëfficiënt* feitelijk betrekking heeft op het doorstroomde oppervlak en niet op de snelheid, al komt dankzij de massabalans een en ander op hetzelfde neer. Figuur 5.4 illustreert het effect voor een gaatje: de stroomlijnen in de opening staan niet loodrecht op het oppervlak van het gaatje ten gevolge van de radiale versnellingen die stroomopwaarts van de opening optreden richting uitstroomopening: de straal ondergaat nog *contractie*. Pas een eindje verderop zijn de stroomlijnen parallel en is het debiet te berekenen door de kleinere doorsnede van de straal met de grootte van de snelheid ter plaatse te vermenigvuldigen. Het is ook pas op dit punt dat de druk in de straal overal de omgevingsdruk  $p_0$  is zoals verondersteld bij toepassing van de Bernoulli-vergelijking.

Doorgaans wordt het effect van de verwaarlozing van de wrijving ook ondergebracht in deze doorstroomcoëfficiënt. Bij scherpe randen is de rol van de wrijving evenwel van ondergeschikt belang. De kleinst mogelijke waarde van  $C_d$  is 0,6 en treedt op bij een turbulente stroming (hoge  $Re$ ) door een gat met scherpe rand.

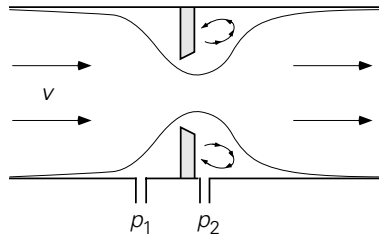


Figuur 5.4.

## 5.2.2 Meetschijf

In § 1.3.3 is de *venturibuis* besproken, waarmee het debiet door een leiding gemeten kan worden. In de venturibuis is zowel een geleidelijke vernauwing van de diameter van de leiding als een zeer geleidelijke verwijdering aangebracht, waardoor energiedissipatie voorkomen wordt. Deze vernauwing kan echter ook heel ‘plotseling’ worden aangebracht: dan mag *energiedissipatie* niet meer verwaarloosd worden! Dit is het geval bij de *meetschijf* (of ook wel *meetflens*).

Hierbij wordt in de leiding een schijf geplaatst met een (klein) gat erin (zie figuur 5.5). Zoals in de figuur is te zien ontstaan vooral aan de achterzijde van de schijf wervels, die zorgen voor een aanzienlijke dissipatie van mechanische energie. Bovendien treedt er ook hier nog contractie van de stroming op bij passage van de doorstroomopening. Een analyse met behulp van Bernoulli moet dus nu weer ‘gecorrigeerd’ worden voor dissipatie en contractie met behulp van een doorstroomcoëfficiënt  $C$  die afhangt van de



Figuur 5.5.

plaats waar de drukken  $p_1$  en  $p_2$  gemeten worden. Tevens is de doorstroomcoëfficiënt een functie van  $Re$  en van de verhouding van de diameter van de leiding en de diameter van het gat in de flens. Zo geldt bijvoorbeeld voor een meetschijf met een klein gat met scherpe rand:  $C = 0,62$  mits  $Re > 10^4$ .

Een belangrijk nadeel van het gebruik van meetschijven is de dissipatie: na de meetschijf komt de druk niet meer terug op de waarde die voor de schijf heerste, omdat er mechanische energie vernietigd is. Dit betekent dat er een aanzienlijke drukval over de meetschijf kan optreden. Samenvattend ziet het debiet (voor vloeistoffen) als functie van de gemeten drukval er uit als

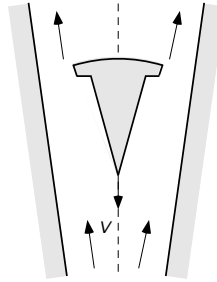
$$\phi_m = C \left( Re, \frac{D_2}{D_1} \right) \cdot \frac{A_2}{\sqrt{1 - \left( \frac{A_2^2}{A_1^2} \right)}} \cdot \sqrt{2\rho (p_1 - p_2)} \quad (5.15)$$

met  $D_1$ ,  $A_1$  en  $D_2$ ,  $A_2$  de diameter en het oppervlak van de dwarsdoorsnede van de leiding respectievelijk van de flensopening.

### 5.2.3 Rotameter

De rotameter is een slimme variant op de meetschijf. Het principe is ook nu weer gebaseerd op een diameterverandering in de leiding en het meten van een drukverschil ten gevolge daarvan. In plaats van een vaste schijf in de leiding is nu echter een vlotter (een kogeltje) in de buis aangebracht (zie figuur 5.6). De rotameter dient verder altijd perfect verticaal opgesteld te worden. De reden hiervoor is eenvoudig: het stromende fluïdum oefent een kracht uit op de vlotter, die in een stationaire situatie evenwicht maakt met de zwaartekracht en de opwaartse kracht op de vlotter, waardoor de vlotter kan gaan zweven.

Indien nu de buis van de rotameter een constante diameter zou hebben, zou er slechts één debiet zijn waarbij de vlotter in evenwicht hangt. Dit is onhandig voor een debietmeter. Daarom heeft de rotameter een variabele diameter: de buis wordt naar boven toe steeds wijder. Dit betekent, dat bij een bepaald debiet de vlotter op een bepaalde hoogte blijft zweven. Juist deze eigenschap maakt de rotameter tot een zeer handig meetinstrument: de stand van de vlotter is een maat voor de kracht van de opwaartse stroming op de vlotter en daarmee voor het debiet en door de buis doorzichtig te maken



Figuur 5.6.

kan direct de stand van de vlotter worden afgelezen en daarmee het debiet bepaald.

In principe is de kracht van de stroming op de vlotter te modelleren volgens het recept uit § 2.3. In § 2.3 is er evenwel van uitgegaan dat het omstroomde object zich in een ‘oneindig’ uitgestrekt medium bevindt zodat er geen wandinvloeden zijn. Bij de rotameter is dit duidelijk wel het geval. Daarom wordt de rotameter anders gemodelleerd: analoog aan de uitdrukking voor de meetschijf. De drukval over de vlotter ten gevolge van de stroming wordt daarbij dankzij een krachtenbalans over de vlotter wel vervangen door de netto-zwaartekracht die op de vlotter werkt. Dit geeft voor het debiet:

$$\phi_m = C \cdot (A_b(h) - A_v) \cdot \sqrt{2\rho_f(\rho_v - \rho_f)g \frac{V_v}{A_v}} \quad (5.16)$$

waarin  $\rho_f$  de dichtheid van de vloeistof is,  $\rho_v$  de dichtheid van de vlotter,  $V_v$  het volume van de vlotter,  $A_v$  het oppervlak van de grootste dwarsdoorsnede van de vlotter,  $A_b(z)$  het oppervlak van de dwarsdoorsnede van de buis op hoogte  $z$ . Indien  $Re$  (betrokken op de ringvormige spleet tussen vlotter en buiswand) voldoende groot is, is de doorstroomcoëfficiënt  $C$  constant.

Vergelijking (5.16) drukt uit hoe het debiet afhangt van de positie  $h$  die de vlotter in de buis inneemt. In plaats van vergelijking (5.16) wordt meestal een ijkgrafiek gebruikt voor het verband tussen de stand  $z$  van de vlotter en het debiet. Let wel dat elk type vlotter (vorm, materiaal) een andere ijkgrafiek vergt. Een rotameter wordt in de regel zo gemaakt dat  $A_b$  lineair toeneemt met de hoogte  $z$  zodat de ijkgrafiek van de rotameter praktisch lineair is.

### Samenvatting

In deze paragraaf zijn een drietal stroommeters geanalyseerd: de overloop, de meetschijf en de rotameter. Alle drie de analyses hebben als uitgangspunt de Bernoulli-vergelijking. Op de uitkomst van de analyses moet een correctie worden aangebracht ten gevolge van contractie van de vloeistofstraal en ten gevolge van energiedissipatie. In principe hangt deze zogenaamde doorstroomcoëfficiënt nog af van de geometrie en het Reynolds-getal.

Bij de overloop speelt dissipatie een ondergeschikte rol. Bij de meetschijf en de

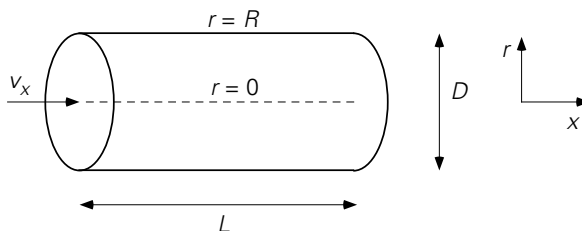
rotameter is er sprake van een aanzienlijke dissipatie en dus van een aanmerkelijke drukval over schijf respectievelijk vlotter.

## 5.3 Wrijvingsdrukval over een rechte leiding

In paragraaf 1.3 is een horizontale rechte ronde buis behandeld, waardoor water stroomt ten gevolge van een met een pomp aangelegd drukverschil over de buis. Met behulp van een energiebalans is afgeleid, dat de drukenergie (= mechanische energie) in de leiding wordt omgezet in inwendige energie (= thermische energie). Dit proces staat bekend als dissipatie van mechanische energie. Het onderliggende mechanisme is wrijving. In dit voorbeeld waren drukval en debiet beide gegeven. Hieronder zal het verband tussen drukval en debiet nader besproken worden opdat de een berekend kan worden als de ander gegeven is.

### 5.3.1 Het concept van de frictiefactor

Beschouw daartoe weer een rechte leiding (lengte  $L$ , diameter  $D$ ) waardoor water stroomt met een gegeven (gemiddelde) snelheid  $v$  (zie figuur 5.7).



Figuur 5.7.

Hoe groot is nu de drukval die nodig is om het water met die snelheid  $v$  door de leiding te laten stromen?

Deze drukval is nodig om de *wrijving* aan en ten gevolge van de pijpwand te overwinnen. Wrijving is het gevolg van schuifspanning tussen vloeistoflagen onderling of tussen een vloeistoflaag en een wand. In § 2.1.4 is het begrip schuifspanning geïntroduceerd als alternatieve beschrijving voor moleculair impulstransport. De *schuifspanning* is een kracht per oppervlakte-eenheid die de ene laag vloeistof op de (aangrenzende) andere laag of wand uitoefent. Deze kracht staat parallel aan de stroomrichting.

Om de drukval over de leiding te kunnen bepalen dient derhalve de schuifspanning aan de wand bekend te zijn. De schuifspanning die de wand op de vloeistof uitoefent, is in principe te berekenen uit:

$$\tau_{w \rightarrow f} = -\tau_{f \rightarrow w} = -\left(-\mu \left[\frac{dv_x}{dr}\right]_{r=R}\right) = \mu \left[\frac{dv_x}{dr}\right]_{r=R} \quad (5.17)$$

Voor de berekening van de schuifspanning aan de wand zou dus het snelheidsprofiel in de leiding bekend moeten zijn om daaruit de afgeleide van de snelheid aan de wand te kunnen bepalen. Dit is in het algemeen een moeilijk zo niet onmogelijk karwei. Daarom zal weer de techniek van de dimensie-analyse gehanteerd worden om te achterhalen waar de schuifspanning van afhangt.

De schuifspanning is een functie van de gemiddelde vloeistofsnelheid  $\langle v \rangle$  in de leiding, van de diameter  $D$  van de leiding, van de viscositeit  $\mu$  en van de dichtheid  $\rho$  van de vloeistof:

$$\tau_{w \rightarrow f} = f(\langle v \rangle, D, \mu, \rho) \quad (5.18)$$

Uitvoeren van de dimensie-analyse levert:

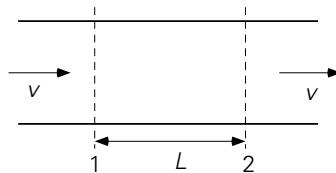
$$\frac{\tau_{w \rightarrow f}}{\rho \langle v \rangle^2} = k \left(\frac{\mu}{\rho \langle v \rangle D}\right)^a = k \text{Re}^{-a} \quad (5.19)$$

De schuifspanning die een wand op een vloeistofstroming uitoefent, kan dan wel op eenzelfde manier gemodelleerd worden als de kracht die een lichaam van een stromend medium ondervindt (zie § 2.3):

$$\tau_{w \rightarrow f} = -f \cdot \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 \quad \text{met } f = f(\text{Re}) \quad (5.20)$$

De functie  $f$  staat bekend onder de naam: de *Fanning-frictiefactor* of kortweg de frictiefactor. Het minteken in vergelijking (5.20) drukt het tegenwerkende karakter uit van de kracht die de vloeistof van de wand ondervindt.

Met het oog op de bepaling van de drukval over een pijplengte  $L$  voor een stationaire stroming door een rechte leiding uit figuur 5.8 kan een impulsbalans opgesteld worden. Het controlevolume wordt gevormd door de leidingwand en de twee vlakken 1 en 2 een afstand  $L$  uit elkaar.



Figuur 5.8.

Zolang de oppervlakken  $A_1$  en  $A_2$  van de buisdoorsneden bij 1 en 2 gelijk zijn, geldt dat de  $x$ -impulsstroom 'in' en de  $x$ -impulsstroom 'uit' elkaar opheffen. De  $x$ -impulsbalans reduceert daarmee tot een krachtenbalans:

$$0 = p_1 A - p_2 A + \tau_{w \rightarrow f} SL \quad (5.21)$$

In bovenstaande vergelijking is  $A$  het oppervlak van de dwarsdoorsnede van de leiding, voor een ronde buis is dit  $\frac{1}{4}\pi D^2$ . Verder staat de letter  $S$  voor de door de ‘vloeistof’ bevochtigde omtrek van de buis; voor een geheel gevulde cilindervormige buis is dit  $\pi D$ . Vergelijking (5.21) is zo algemeen mogelijk opgeschreven en geldt daarmee bijvoorbeeld ook voor een open goot, waardoor water stroomt. Het werken met het begrip ‘bevochtigde omtrek’ doet ook volledig recht aan de oorzaak van de drukval: wrijving aan de wand.

Uit vergelijking (5.21) is eenvoudig de drukval te bepalen:

$$p_1 - p_2 = -\tau_{w \rightarrow f} \cdot \frac{SL}{A} \quad (5.22)$$

Combineren van de vergelijkingen (5.20) en (5.22) levert voor de drukval ten gevolge van wrijving (of energiedissipatie):

$$p_1 - p_2 = f \frac{SL}{A} \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 \quad (5.23)$$

Voor een cilindervormige buis (met diameter  $D$ ) die geheel met vloeistof gevuld is, geldt uiteraard:

$$\frac{SL}{A} = \frac{\pi DL}{\frac{\pi}{4} D^2} = 4 \frac{L}{D} \quad (5.24)$$

Dit invullen in vergelijking (5.23) levert de zogenaamde *Fanning-drukvalvergelijking* ten gevolge van wrijving voor stroming door cilindrische buizen:

$$p_1 - p_2 = 4f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 \quad (5.25)$$

hierin is de coëfficiënt  $4f$  een functie van het Reynolds-getal:  $4f = 4f(\text{Re})$ .

Voor niet-cilindervormige buizen werkt men met een vergelijking die geheel analoog aan vergelijking (5.25) is. De diameter  $D$  wordt daartoe vervangen door de zogenaamde *hydraulische diameter*  $D_h$  die is gedefinieerd als

$$D_h \equiv \frac{4A}{S} \quad (5.26)$$

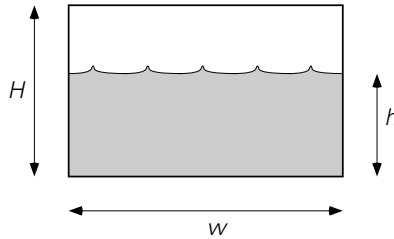
Bedenk dat  $A$  het oppervlak is waar de stroming doorheen gaat. Dit is niet noodzakelijk hetzelfde als het oppervlak van een dwarsdoorsnede van de leiding. Bovendien is  $S$  de omtrek waar de schuifspanning op werkt (de zogenaamde bevochtigde omtrek) en die is weer niet noodzakelijkerwijs gelijk aan de omtrek van de leiding.

### **Voorbeeld 5.2.** *Stroming in een open kanaal*

Door een rechthoekig kanaal (wandhoogte  $H$ , breedte  $w$ ) stroomt water. De hoogte van het waterpeil in het kanaal is  $h$  ( $< H$ ). Wat is de hydraulische diameter van dit systeem (zie figuur 5.9)?

Het doorstroomde oppervlak  $A$  is  $wh$  en dus niet  $wH$ . Evenzo geldt voor de

bevochtigde omtrek:  $S = 2h + w$  en niet  $2H + 2w$ : aan het oppervlak van het water is immers geen wand die een schuifspanning uitoefent (het effect van de lucht is verwaarloosbaar ten opzichte van het effect van de leidingwand!). Ook het gebruik van  $H$  voor de bevochtigde omtrek in plaats van  $h$  is onjuist: de hoogte van het kanaal doet hier niet terzake.



Figuur 5.9.

Dit levert voor de hydraulische diameter:

$$D_h = \frac{4A}{S} = \frac{4wh}{2h + w} \quad (5.27)$$

□

### 5.3.2 Het gebruik van de frictiefactor

De Fanning frictiefactor is zoals gezegd een functie van het Reynolds-getal (betrokken op de buisdiameter). In figuur 5.10 is  $4f$  uitgezet als functie van  $Re$  voor leidingen met een cirkelvormige dwarsdoorsnede. Min of meer analoog aan hoe de weerstandscoëfficiënt  $C_D$  van een omstroomd lichaam afhangt van het Reynolds-getal betrokken op het deeltje (zie figuur 2.15) zijn er twee regimes te onderscheiden, namelijk die van *laminaire* en *turbulente pijpstroming*:

in het *laminaire* regime geldt:

$$4f = 64/Re \quad \text{mits} \quad Re < 2000 \quad (5.28)$$

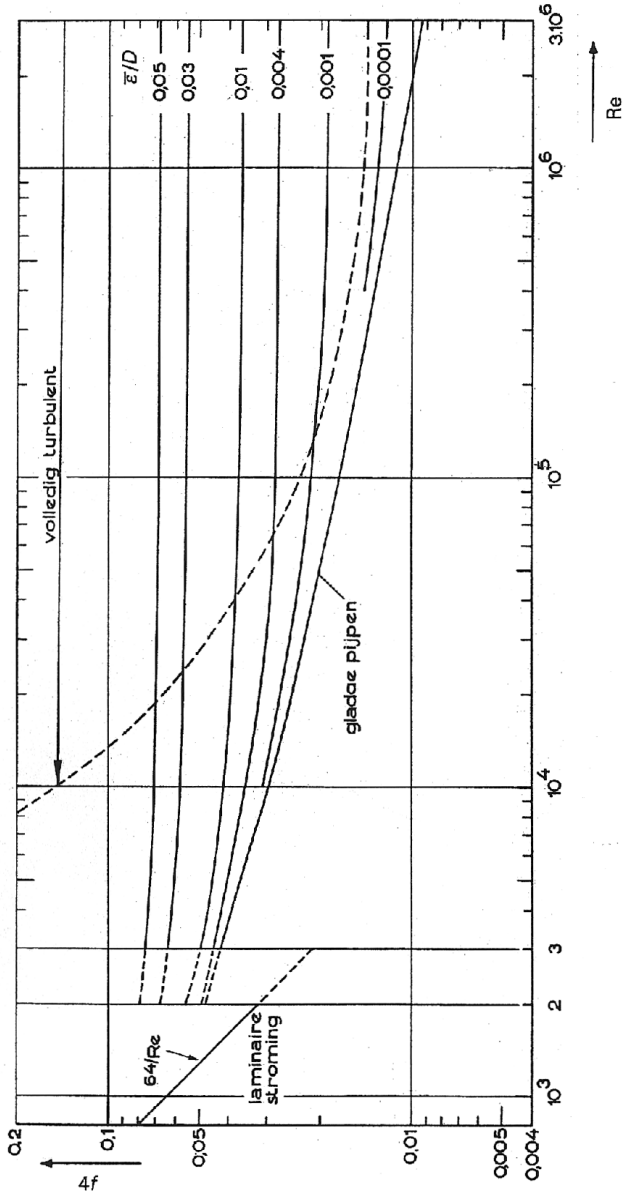
in het *turbulente* regime geldt de empirische *formule van Blasius*:

$$4f = 0,316 Re^{-1/4} \quad \text{mits} \quad 4000 < Re < 10^5 \quad (5.29)$$

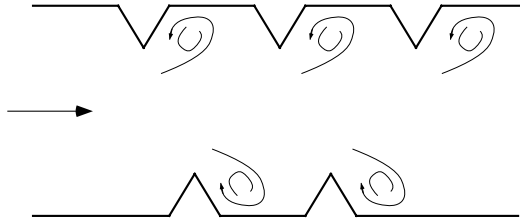
Bedenk wel dat bij  $C_D$  het gebied van  $C_D \propto 1/Re$  beperkt is tot  $Re < 1$ , terwijl het laminaire gebied bij buisstroming zich uitstrekt tot  $Re \approx 2000$ !

In figuur 5.10 zijn meer lijnen voor  $4f$  getekend. Deze geven aan dat de weerstand die een fluïdum in een buis ondervindt, ook nog afhangt van de *wandruwheid*. Dit is logisch (zie figuur 5.11) aangezien achter een uitsteeksel in de wand een extra werveling op zal treden. Deze geeft uiteraard aanleiding tot meer dissipatie van bruikbare mechanische energie en leidt dus tot meer weerstand. Of in termen van

schuifspanning: door de extra werveling wordt er effectiever impuls vanuit de vloeistof naar de wand overgedragen. En schuifspanning is een alternatieve interpretatie van moleculair impulstransport.



Figuur 5.10. Verband tussen de frictiefactor  $f$  en  $Re$  bij stroming door pijpen met cirkelvormige doorsnede bij verschillende relatieve ruwheden  $\bar{\epsilon}/D$ .



Figuur 5.11.

De ruwheid van de wand wordt meestal gekarakteriseerd met de (dimensieloze) *relatieve ruwheid*  $\bar{\epsilon}/D$ . Hierin is  $\bar{\epsilon}$  de absolute ruwheid: de gemiddelde hoogte van de ‘uitsteeksels’ aan de wand. Zoals in de figuur van  $4f$  versus  $Re$  te zien is, wordt  $4f$  constant als  $\bar{\epsilon}/D$  voldoende groot of  $Re$  voldoende groot is. Hoe groter de relatieve ruwheid, bij des te kleinere waarden van  $Re$  zal  $4f$  constant worden. Dit is te begrijpen door het beeld van de impuls transporterende wervel te gebruiken. Bij grote relatieve wandruwheid steken de uitsteeksels relatief ver de buis in en brengt de werveling impuls van een belangrijk deel van de stroming effectief naar de wand.

Nu volgen een aantal voorbeelden van het berekenen van drukvallen in rechte leidingen.

#### Voorbeeld 5.3. Drukval over een olietransportleiding

Door een rechte cilindervormige buis (lengte 10 m, diameter 10 cm, gladde wand) stroomt stationair een viskeuze olie ( $\mu = 70 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$ ) met een debiet van  $7,85 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ . Hoe groot is de drukval over deze leiding?

Voor deze berekening is vergelijking (5.25) direct te gebruiken. Uit het debiet volgt voor de stroomsnelheid:  $\langle v \rangle = 0,1 \text{ m/s}$ . Hieruit volgt:  $Re = 129$ . De stroming is dus laminair en dankzij vergelijking (5.28) volgt dat  $4f = 0,5$ . Invullen in vergelijking (5.25) levert nu  $\Delta p = 225 \text{ Pa}$ .  $\square$

#### Voorbeeld 5.4. Snelheid in een waterleiding

Door een lange rechte pijp (lengte 1 km, diameter 10 cm, relatieve ruwheid 0,001) stroomt water. De situatie is weer stationair. De drukval over de pijp is 2 bar. Wat is de watersnelheid in de pijp?

Nu moet uit vergelijking (5.25) de snelheid opgelost worden:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{D}{L} \frac{2\Delta p}{\rho} \frac{1}{4f}} \quad (5.30)$$

Dit levert hetzelfde probleem op als bij de bepaling van de eenparige snelheid van een door een medium vallend of opstijgend lichaam. De snelheid  $\langle v \rangle$  kan slechts uitgerekend worden als  $4f$  bekend is, terwijl  $4f$  zelf een functie is van  $\langle v \rangle$ . Ook hier biedt een iteratieve oplossingsprocedure uitkomst: kies een snelheid, bv.  $\langle v \rangle = 2 \text{ m/s}$ ; dit geeft  $Re = 2 \cdot 10^5$ ; opzoeken in de grafiek van  $4f$  tegen  $Re$  levert (aflezen op lijn relatieve ruwheid = 0,001!):  $4f = 0,02$ ; deze waarde invullen in vergelijking (5.30)

levert een nieuwe  $\langle v \rangle$ : namelijk 1,4 m/s; daarmee  $Re = 1,4 \cdot 10^5 \rightarrow 4f = 0,02$ : klaar!  
 In het algemeen zal deze rekenprocedure een aantal malen herhaald moeten worden voordat  $\langle v \rangle$  constant wordt.  $\square$

Overigens kan een probleem als geïllustreerd in voorbeeld 5.4 ook op een andere manier opgelost worden. Daartoe wordt vergelijking (5.25) herschreven tot

$$\frac{\rho D^3}{4\mu^2} \frac{\Delta p}{L} = \frac{1}{2} f \left( \frac{\rho \langle v \rangle D}{\mu} \right)^2 = \frac{1}{2} f Re^2 \quad (5.31)$$

Het linkerlid van deze vergelijking bevat doorgaans en ook in voorbeeld 5.4 uitsluitend variabelen die gegeven zijn. Daarmee is de waarde van  $\frac{1}{2} f Re^2$  bekend. Uit een grafiek van  $Re$  tegen  $\frac{1}{2} f Re^2$  (zie figuur 5.12) die geconstrueerd is uit figuur 5.10, kan dan direct  $Re$  afgelezen worden, waaruit dan  $\langle v \rangle$  volgt.

In het bovenstaande voorbeeld levert dat

$$\frac{1}{2} f Re^2 = \frac{\rho D^3}{4\mu^2} \frac{\Delta p}{L} = 5 \cdot 10^7$$

Opzoeken van  $Re$  in figuur 5.12 levert  $Re = 1,2 \cdot 10^5$  en dus  $\langle v \rangle = 1,2$  m/s. Deze waarde wijkt enigszins af van de eerste uitkomst. Beide oplossingen zijn beter met elkaar in overeenstemming te brengen door nauwkeurigere grafieken te gebruiken en nauwkeuriger af te lezen.

### **Voorbeeld 5.5.** *Snelheid in een melkleiding*

Door een lange rechte leiding (diameter 4 cm, lengte 20 m, gladde wand) stroomt stationair melk ( $\rho = 10^3$  kg/m<sup>3</sup>,  $\mu = 2,1$  mPas) ten gevolge van een drukval van 2000 Pa. Wat is de gemiddelde snelheid in de leiding?

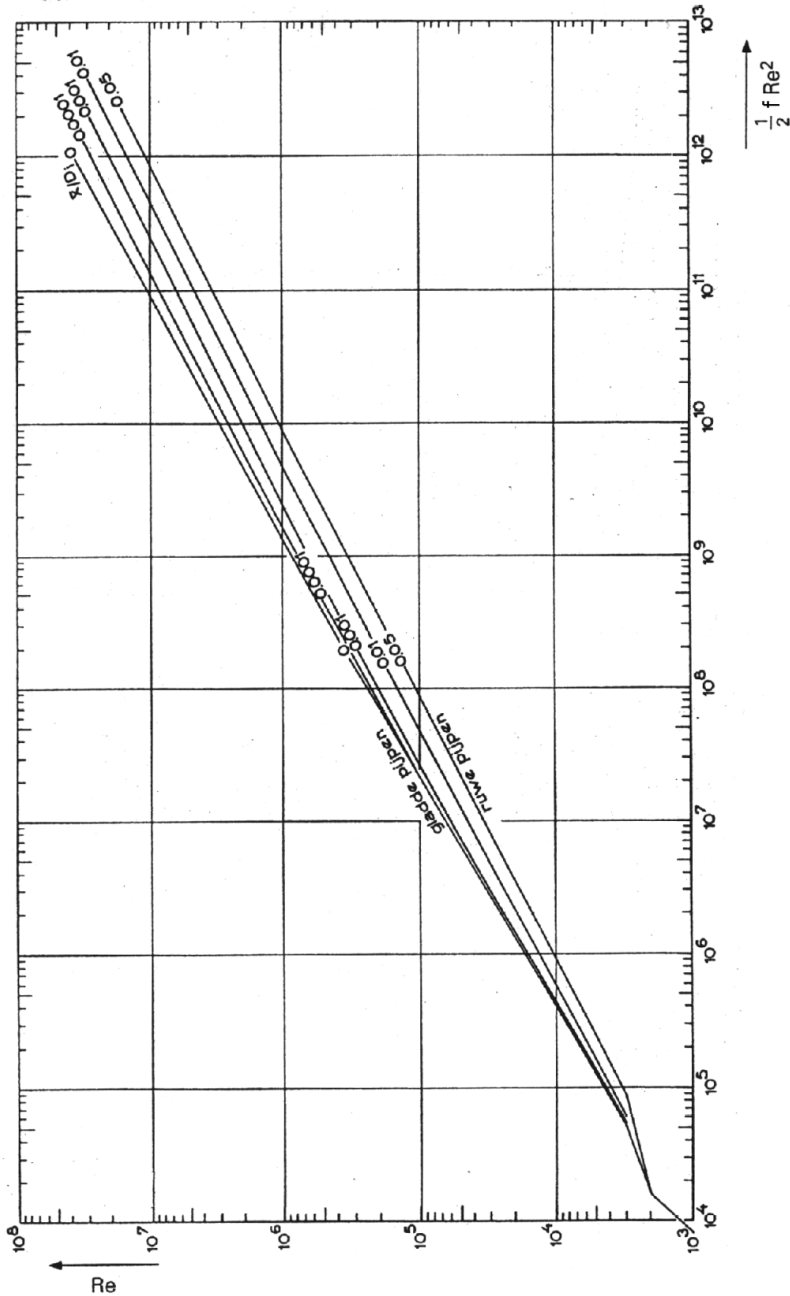
Deze opgave kan op een van de twee hierboven beschreven manieren worden opgelost. Er is echter nog een derde manier: gebruik de vergelijking van Blasius als gegeven in vergelijking (5.29) mits voldaan aan de eis dat het Reynolds-getal in het opgegeven  $Re$ -traject valt. Dit kan uiteraard pas achteraf geverifieerd worden. Invullen van deze vergelijking in vergelijking (5.25) levert voor de drukval ten gevolge van wrijving:

$$\Delta p = 0,316 Re^{-\frac{1}{4}} \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 = 0,158 L D^{-5/4} \mu^{1/4} \rho^{3/4} \langle v \rangle^{7/4} \quad (5.32)$$

Invullen van de gegevens geeft:  $\langle v \rangle = 0,5$  m/s. Dit levert voor het Reynolds-getal op:  $Re = 9500$ , en dus mag Blasius inderdaad gebruikt worden. Bedenk wel dat de Blasius-vergelijking enkel geldig is voor leidingen met gladde wanden.  $\square$

De bovenstaande voorbeelden hebben alle drie betrekking op cilindervormige leidingen. In het algemeen is de relatie tussen de drukval en de snelheid in de leiding gemodelleerd met de hydraulische diameter. Voor leidingen of stroomkanalen met een

willekeurige doorsnede (maar wel constant langs de gehele buislengte) is nu precies dezelfde  $4f(Re)$  te gebruiken *mits* de stroming turbulent is. Het Reynolds-getal moet dan uiteraard ook met behulp van de hydraulische diameter bepaald worden. In het laminaire stromingsgebied geldt deze overeenstemming niet.



Figuur 5.12.

**Voorbeeld 5.6.** Watertransport door een rechthoekige leiding

Water stroomt stationair door een rechthoekige leiding (hoogte 3 cm, breedte 5 cm, lengte 100 m, gladde wanden). De stroomsnelheid is 1 m/s. Wat is de drukval over het kanaal?

Eerst moet de hydraulische diameter uitgerekend worden:

$$D_h = \frac{4A}{S} = \frac{4bh}{2h + 2b} = 3,75 \text{ cm} \quad (5.33)$$

Daarmee volgt voor het Reynolds-getal

$$\text{Re}_h = \frac{\rho v D_h}{\mu} = 3,75 \cdot 10^4 \quad (5.34)$$

Met behulp van figuur 5.10 volgt weer  $4f = 0,02$  en deze waarde invullen in vergelijking (5.25) levert:

$$\Delta p = 4f \frac{L}{D_h} \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 = 2,7 \cdot 10^4 \text{ Pa} \quad (5.35)$$

□

**5.3.3 De analogie met warmte- en stofoverdracht**

Voor het geval van turbulente stroming is in § 3.5.2 de *filmtheorie* besproken voor warmteoverdracht; bij stofoverdracht is in § 4.5.2 ook naar de filmtheorie verwezen. Daarbij is de *hydraulische filmdikte*  $\delta_h$  ter sprake gekomen. In de film is er sprake van laminair impulstransport, waarvoor de wet van Newton, vergelijking (2.4), geldt. Buiten de film is de stroming turbulent en is dus het snelheidsprofiel behoorlijk vlak dankzij het impulstransport door de wervels van het turbulente stromingsveld. Voor het impulstransport (*wrijving!*) vanuit de bulk naar de wand geldt in de filmtheorie:

$$\tau_{f \rightarrow w} = f \cdot \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 = \mu \frac{\langle v \rangle}{\delta_h} \quad (5.36)$$

geheel analoog aan de warmteflux (3.118) volgens de filmtheoriebenadering van turbulente stroming. Vergelijking (5.36) drukt uit dat de *wrijvingsweerstand* geheel in de film ligt.

Al eerder is in § 3.5.2 betoogd dat de filmdiktes  $\delta_q$  en  $\delta_h$  afhangen van de mate van turbulentie in de stroming:  $\delta_q$  en  $\delta_h$  nemen af met toenemend Reynolds-getal. Warmteoverdracht onder turbulente condities en dus ook het bijbehorende Nusselt-getal hangen daarmee af van de mate van turbulentie en dus ook van  $\delta_h$ . De volgende herrangschikking is in overeenstemming met deze redenering:

$$\text{Nu} = \frac{hD}{\lambda} = \frac{D}{\delta_q} = \frac{D}{\delta_h} \cdot \frac{\delta_h}{\delta_q} = \frac{f}{2} \cdot \frac{r \langle v \rangle D}{\mu} \cdot \frac{\delta_h}{\delta_q} \quad (5.37)$$

waarbij gebruik is gemaakt van vergelijking (5.36).

Door verder gebruik te maken van de relatie  $\delta_h/\delta_q \propto \text{Pr}^{1/3}$  (eerder besproken rond figuur 3.23 in § 3.5.2) volgt

$$\text{Nu} \propto \frac{f}{2} \text{Re} \text{Pr}^{1/3} \quad (5.38)$$

oftewel

$$\frac{1}{2}f \propto \frac{\text{Nu}}{\text{Re} \text{Pr}^{1/3}} \quad (5.39)$$

Daarmee is een resultaat verkregen dat erg lijkt op de relaties (4.74) en (4.75). De relaties (4.76) en (5.29) mede in aanmerking genomen, kan de *Chilton-Colburn-analogie* uitgebreid worden tot

$$j_H = j_D = \frac{1}{2}f = C \text{Re}^{m-1} \quad (5.40)$$

Overigens geldt de uitgebreide analogie volgens (5.40) alleen wanneer, conform de afleiding, de *fictiefactor* uitsluitend afkomstig is van *wandwrijving*. *Vormweerstand*, die een belangrijk deel kan zijn van de stromingsweerstand van omstroomde lichamen (§ 2.3), gaat *niet* gepaard met analoge effecten in warmte- of stofoverdracht.

### Samenvatting

In deze paragraaf is het verband tussen debiet door en wrijvingsdrukval over een leiding behandeld. Drukval, energiedissipatie, wrijving en schuifspanning zijn in hun onderlinge samenhang besproken. De Fanning-drukvalvergelijking is afgeleid

$$p_1 - p_2 = 4f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2$$

met daarbij een grafiek voor  $4f$  als functie van Reynolds en met twee relaties voor  $4f$ : één voor het laminaire regime ( $4f = 64/\text{Re}$ ) en de Blasius-vergelijking voor het turbulente regime. Ook zijn de begrippen hydraulische diameter en relatieve wandruwheid geïntroduceerd voor gebruik bij turbulente pijpstromingen. Verschillende oplosstrategieën zijn besproken om bij gegeven drukval het debiet door een pijp te berekenen; een daarvan is een iteratieve, precies als bij het berekenen van een eenparige deeltjessnelheid uit een krachtenbalans.

Verder is de Chilton-Colburn-analogie uitgebreid naar de frictiefactor, mits de stromingsweerstand uitsluitend bepaald wordt door de wandwrijving.

## 5.4 Drukvalberekeningen voor pijpleidingsystemen

In § 5.3 is besproken hoe dissipatie en de daarmee gepaard gaande wrijvingsdrukval voor een rechte leiding gemodelleerd worden met behulp van de Fanning-drukvalvergelijking. Omdat dissipatie staat voor vernietiging van mechanische energie, ligt het voor de hand de Fanning-vergelijking in verband te brengen met de mechanische-

energiebalans zoals geïntroduceerd in hoofdstuk 1 voor stationaire condities. Deze volgt voor een fluïdum met constante dichtheid gemakkelijk uit vergelijking (1.109):

$$0 = \phi_m \left[ \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{P_1}{\rho} + gz_1 - \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{P_2}{\rho} - gz_2 \right] + \phi_w - \phi_m e_{fr} \quad (5.41)$$

Combineren van de vergelijkingen (5.25) en (5.41) geeft dan een uitdrukking voor de hoeveelheid energie die per massa-eenheid in een horizontale, rechte leiding (zonder pomp) gedissipeerd wordt:

$$e_{fr} = 4f \frac{L}{D_h} \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \quad (5.42)$$

Ten opzichte van de Fanning-vergelijking heeft de combinatie van de vergelijkingen (5.41) en (5.42) het voordeel dat er ruimte is voor drukveranderingen anders dan ten gevolge van wrijving. Vergelijking (5.42) drukt expliciet uit wat het effect van *dissipatie* of *wrijving* is op de mechanische-energiehuishouding in een leiding.

Beschouw twee identieke buizen met dezelfde diameter, waarvan de een horizontaal en de ander verticaal is opgesteld. Door beide stroomt een even groot debiet. De dissipatie in beide leidingen is een direct gevolg van wrijving aan de wand. Deze wrijving hangt slechts af van de schuifspanning aan de wand en die op zijn beurt wordt bepaald door het snelheidsprofiel vlak bij de wand. In de horizontale leiding is er een drukval die juist de wrijvingskracht compenseert. In de verticale leiding (vloeistof stroomt van onder naar boven) moet de drukval behalve de wrijving ook de zwaartekracht compenseren. Maar de wrijving hangt uitsluitend af van de snelheidsgradiënt aan de wand en niet van de oriëntatie van de leiding. Daarom kan voor beide buizen dezelfde uitdrukking voor de dissipatie gehanteerd worden. Merk op dat in de mechanische-energiebalans nu precies staat dat in de verticale leiding de drukenergie de potentiële energie (is ‘zwaartekracht’) en de dissipatie (is ‘wrijvingskracht’) moet compenseren.

Nu zijn lang niet alle leidingen recht met een constante doorsnede. Een leidingstelsel bevat in de regel allerlei bochten, afsluiters of kleppen, vernauwingen of verwijdingen (in het algemeen noemt men dit *appendages*). Al dit soort ‘obstakels’ of hindernissen voor de stroming geven aanleiding tot extra dissipatie. Veelal ontstaan extra wervels waarin mechanische energie gedissipeerd wordt. Voor *turbulente* stroming zijn al deze appendages eenvoudig te modelleren door een uitdrukking voor de energiedissipatie per massa-eenheid die geheel analoog is aan vergelijking (5.42):

$$e_{fr} = K_w \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \quad (5.43)$$

Hierbij is afgesproken dat  $\langle v \rangle$  de snelheid is van de stroming stroomafwaarts van de betreffende appendage.  $K_w$  heet het *weerstandsgetal* van de appendage en is *constant*, d.w.z. niet afhankelijk van  $Re$ , *mits* de stroming voldoende turbulent is. De weerstandsgetallen zijn in tabellen te vinden (zie bijvoorbeeld Transport Phenomena

Data Companion, L.P.B.M. Janssen en M.M.C.G. Warmoeskerken, blz. 82 en 83). Hieronder zijn een klein aantal weerstandsgedaten weergegeven:

<i>appendage</i>	$K_w$
schuifafsluiter, open	0,2
schuifafsluiter, 1/2 dicht	$\approx 6$
schuifafsluiter, 3/4 dicht	$\approx 24$
90° bocht, scherpe hoek	1,3
90° bocht, lang	0,5
intreeverlies pijp, scherp	0,5
intreeverlies pijp, afgerond	0,05
uittreeverlies pijp	1

Samenvattend kan met het oog op het gebruik van de mechanische-energiebalans voor drukvalberekeningen voor pijpleidingsystemen met appendages gesteld worden dat *energiedissipatie* in het algemeen gemodelleerd wordt als:

$$e_{fr} = \sum_i \left( 4f \frac{L}{D_h} \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \right)_i + \sum_j \left( K_w \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \right)_j \quad (5.44)$$

Het eerste deel van de rechterterm van deze vergelijking staat daarbij voor het optellen van alle rechte stukken leiding, terwijl het tweede deel de dissipatie in rekening brengt die veroorzaakt wordt door alle appendages. Let er wel op dat diameterveranderingen in het systeem correct in rekening worden gebracht: zulke veranderingen hebben gevolgen voor te gebruiken  $\langle v \rangle$ 's. Een en ander zal met een paar voorbeelden geïllustreerd worden.

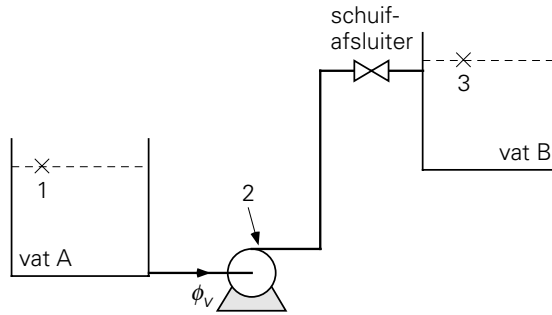
### Voorbeeld 5.7. Omhoog pompen

Vanuit een zeer groot vat (A) moet een waterige vloeistof verpompt worden naar een hoger gelegen eveneens zeer groot vat (B). Hiertoe wordt een pomp in het in figuur 5.13 geschetste leidingsysteem opgenomen. Beide vaten zijn aan de bovenkant open. De leiding is 50 m lang en heeft een diameter van 5 cm. De wanden van de leiding zijn glad. In de leiding bevinden zich twee scherpe haakse bochten en een open schuifafsluiter. De intree van de leiding (bij vat A) is scherp. De hoogte van het vloeistofniveau in vat A bedraagt 3 m, in vat B is dat 13 m (gemeten t.o.v. grondniveau). Gevraagd wordt te berekenen:

- het vermogen dat de pomp moet leveren om 2 l/s water te verpompen;
- de waarde van de hoogste druk die in dit systeem aanwezig is.

De beide vragen zijn op te lossen met behulp van de mechanische-energiebalans. Allereerst wordt deze balans toegepast op het systeem tussen de punten 1 en 3 (zie figuur 5.13): punt 1 bevindt zich op het oppervlak van het water in vat A waar geldt:

$$p_1 = p_0, \text{ met } p_0 \text{ de omgevingsdruk; } v_1 \approx 0; z_1 = \text{gegeven.}$$



Figuur 5.13.

Punt 3 bevindt zich op het oppervlak van het water in vat B, dus:

$$p_3 = p_0; v_3 \approx 0; z_3 = \text{gegeven.}$$

Met het oog op de dissipatie in het systeem moeten de  $K_w$ -factoren opgezocht worden:

twee scherpe haakse bochten	→	$2 \times 1$
open afsluiter	→	0,2
scherpe intree	→	0,5
uittree	→	1

De snelheid in de leiding volgt eenvoudig uit het debiet:  $\langle v \rangle = 1,0$  m/s. Hieruit volgt dat het Reynolds-getal voor de stroming in de leiding  $5 \cdot 10^4$  is. De diameter van de leiding is constant en we kunnen dus de dissipatie ten gevolge van wandwrijving in één keer in rekening brengen. Opzoeken van  $4f$  bij  $Re = 5 \cdot 10^4$  levert:  $4f = 0,02$ . Dus  $e_{fr}$  is:

$$e_{fr} = 4f \frac{L}{D} \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 + (2 \cdot 1 + 0,2 + 0,5 + 1) \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 = 11,85 \text{ J/kg} \quad (5.45)$$

Daarmee volgt voor het pompvermogen uit vergelijking (5.41):

$$\phi_w = \phi_m (g (z_3 - z_1) + e_{fr}) = 220 \text{ W} \quad (5.46)$$

De hoogste druk komt uiteraard (!) juist achter de pomp voor. Deze druk is te berekenen door een mechanische-energiebalans tussen de punten 1 en 2 (zie figuur 5.13) op te stellen. Voor punt 2 geldt:

$$p_2 = ?; v_2 = \langle v \rangle = 1 \text{ m/s}; z_2 \approx 0$$

$e_{fr}$  bevat nu enkel de intreeverliezen van de leiding en een te verwaarlozen stukje leiding van vat A naar de pomp:  $e_{fr} = 0,5 \frac{1}{2} \langle v \rangle^2$ . De mechanische-energiebalans wordt daarmee:

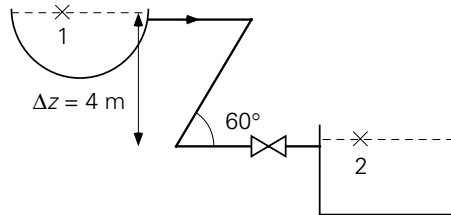
$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = g (z_1 - z_2) - \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 - e_{fr} + \frac{\phi_w}{\phi_m} \rightarrow p_2 = 2,4 \text{ bar} \quad (5.47)$$

□

**Voorbeeld 5.8.** Een leeglopend bassin

Vanuit een hoger gelegen, groot, open bassin stroomt proceswater door een cilindervormige leiding (lengte 20 m, diameter 10 cm, wandruwheid 1 mm) naar een open kanaal. Het waterniveau in het bassin ligt 4 m boven dat van het kanaal. De leiding bevat 2 scherpe bochten van  $60^\circ$  ( $K_w$ -factor 1,86) en een schuifafsluiter om het waterdebiet mee te kunnen regelen. De weerstandsgetallen voor pijpingang en -uitgang zijn 0,2 en 1,0. Gevraagd wordt het waterdebiet uit te rekenen als de schuifafsluiter voor de helft gesloten is.

De oplossing van dit probleem gaat ook weer met behulp van de mechanische-energiebalans, ditmaal tussen twee punten op het oppervlak van het water: punt 1 in het bassin en punt 2 in het kanaal (zie figuur 5.14).



Figuur 5.14.

Voor punt 1 geldt:  $p_1 = p_0$ ,  $v_1 \approx 0$ ,  $z_1 = z_2 + \Delta z$ . Evenzo geldt voor punt 2:  $p_2 = p_0$ ,  $v_2 \approx 0$ . De dissipatie is:

$$e_{fr} = \left(4f \frac{L}{D} + K_{w,tot}\right) \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \quad (5.48)$$

met  $K_{w,tot} = 2 \times 1,86 + 0,2 + 1,0 + 6 = 10,9$ . Invullen in de mechanische-energiebalans levert:

$$0 = -g(z_2 - z_1) - e_{fr} \quad (5.49)$$

Hieruit kan  $\langle v \rangle$ , de gemiddelde snelheid van het water in de leiding, gehaald worden door itereren, want  $4f$  is een functie van  $\langle v \rangle$  (af te lezen in figuur 5.10 bij relatieve ruwheid 0,01). Daartoe worden (5.48) en (5.49) gecombineerd tot

$$v = \sqrt{\frac{2g(z_1 - z_2)}{4f \frac{L}{D} + K_{w,tot}}} \quad (5.50)$$

Als begingok kan bijvoorbeeld  $v = 1$  m/s genomen worden. Dit geeft  $Re = 10^5$  en  $4f = 0,035$ . Dit geeft weer  $v = 2,1$  m/s en hieruit volgt dan weer  $Re = 2,1 \cdot 10^5$  en  $4f = 0,035$ . Het itereren is daarmee dus al weer klaar. Het debiet is nu eenvoudig uit te rekenen:  $\phi_m = 16,5$  kg/s.  $\square$

Merk op dat in beide voorbeelden de stroming in de leiding turbulent is, zodat inderdaad de  $K_w$ -factoren constant zijn.

### Samenvatting

De drukval in een leidingsysteem wordt niet uitsluitend bepaald door wrijving. Daarom is het goed werken met de mechanische-energiebalans mits uitdrukkingen beschikbaar zijn voor de energiedissipatie.

Voor de dissipatie als gevolg van wandwrijving in een rechte leiding geldt:

$$e_{fr} = 4f \frac{L}{D} \frac{1}{2} \langle v \rangle^2$$

Indien het Reynolds-getal van de stroming voldoende groot is, is de dissipatie ten gevolge van een appendage te modelleren met een constant weerstandsgetal:

$$e_{fr} = K_w \frac{1}{2} \langle v \rangle^2$$

waarin voor  $\langle v \rangle$  de benedenstroomse snelheid gekozen dient te worden. In het algemeen is de totale dissipatie de som van de bijdragen van de wandwrijving en van alle appendages.

## 5.5 Drukval over een gepakt bed

Leidingsystemen zijn niet de enige systemen waarbij drukval en dissipatie van belang zijn. Eigenlijk zijn in alle stromende systemen drukval en dissipatie belangrijke grootheden. Daarom komt in deze paragraaf nog een stromend systeem aan de orde, dat veel in de procesindustrie voorkomt: *het gepakte bed*. Dit bestaat uit een container volgestort met deeltjes die boven op elkaar rusten. Door de open ruimte die zich tussen de deeltjes bevindt, stroomt vloeistof. De vraag is nu hoe de dissipatie in en drukval over dit systeem afhangen van de doorstroomsnelheid van de vloeistof.

Alvorens dit probleem aan te pakken is het dienstig eerst eens te bekijken hoe de dissipatie gemodelleerd wordt als de stroming niet door het ‘inwendige’ van een leiding, maar juist langs de ‘buitenzijde’ van een lichaam gaat. Beschouw daartoe het eenvoudigste geval van een bolvormig deeltje, dat stilstaat in een stromend medium (met uniforme aanstroomsnelheid  $v$ ). De kracht die de stroming op het deeltje uitoefent, is (zie § 2.3)

$$F_D = C_D A_{\perp} \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (5.51)$$

De dissipatie rond dit deeltje is nu analoog aan de redenering in § 5.4 te berekenen: daar is de dissipatie bepaald door de mechanische-energiebalans te gebruiken. Voor een horizontale rechte leiding met constante doorsnede geldt op basis van vergelijking (5.41):

$$0 = \phi_m \frac{p_1 - p_2}{\rho} - \phi_m e_{fr} \quad (5.52)$$

Deze vergelijking is echter ook anders te schrijven door het drukverschil  $p_1 - p_2$  via de krachtenbalans (5.21) te relateren aan de schuifspanning aan de wand. Indien dan de totale *wrijvingskracht* die de wand via de schuifspanning op de vloeistof uitoefent,  $F_{fr}$  wordt genoemd, kan dit drukverschil herschreven worden tot:

$$\phi_m \frac{p_1 - p_2}{\rho} = \rho A v \frac{p_1 - p_2}{\rho} = A (p_1 - p_2) v = F_{fr} v \quad (5.53)$$

Voor de dissipatie rond een enkel vrij omstroemd deeltje geldt dan

$$\phi_m e_{fr} = F_D v \quad (5.54)$$

en daaruit volgt dan weer

$$\phi_m e_{fr} = C_D A_{\perp} \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot v = C_D A_{\perp} \frac{1}{2} \rho v^3 \quad (5.55)$$

In een gepakt bed van (min of meer) bolvormige deeltjes is uiteraard de omstroming van de deeltjes niet meer hetzelfde als bij een vrij deeltje. Wel mag verwacht worden dat de wrijvingskracht op een individueel deeltje in het bed nog volgens dezelfde lijnen als bij het vrije deeltje gemodelleerd kan worden. De totale energiedissipatie in een bed van  $N$  deeltjes volgt dan door de dissipatie ten gevolge van de wrijving langs één deeltje van het bed te vermenigvuldigen met het aantal deeltjes in de kolom  $N$ .

Voor de omstroming van een deeltje in het bed moet dan wel de lokale stroomsnelheid genomen worden: dat wil zeggen, de snelheid  $\langle v \rangle$  zoals die in de kanaaltjes tussen de op en tegen elkaar gestapelde deeltjes heerst. Dit is echter geen handige snelheid om mee te rekenen, want wel is het totale volumedebiet bekend dat door het gepakte bed gaat, maar niet direct  $\langle v \rangle$ . Dit is evenwel eenvoudig te verhelpen. De deeltjes tezamen nemen een volume  $V_d$  in van het totale volume  $V$ . Hiermee is de volumefractie vrije ruimte (de zogenaamde *porositeit*)  $\varepsilon$  te definiëren:  $\varepsilon = (1 - V_d/V)$ . Het oppervlak van een dwarsdoorsnede door de lege container is  $A_0$  en dus is  $\varepsilon A_0$  het oppervlak dat beschikbaar is voor de stroming. Het verband tussen het volumedebiet en de stroomsnelheid  $\langle v \rangle$  wordt daarmee:

$$\phi_v = A_0 v_0 = \varepsilon A_0 \langle v \rangle \rightarrow \langle v \rangle = \frac{v_0}{\varepsilon} \quad (5.56)$$

Hierbij is  $v_0$  de snelheid die de vloeistof zou hebben als deze met hetzelfde debiet door de lege container zou stromen (de zogenaamde *superficiële snelheid*).

Het volume dat de deeltjes innemen is  $(1 - \varepsilon)A_0L$  (waarin  $L$  de bedhoogte is); het aantal deeltjes (met diameter  $d$ ) in het bed is daarmee:

$$N = \frac{(1 - \varepsilon) A_0 L}{\frac{\pi}{6} d^3} \quad (5.57)$$

Uiteindelijk volgt dan voor de energiedissipatie in het gepakte bed:

$$\phi_m e_{fr} = \frac{(1 - \varepsilon) A_0 L}{\frac{\pi}{6} d^3} C_D \frac{\pi}{4} d^2 \frac{1}{2} \rho \left(\frac{v_0}{\varepsilon}\right)^3 \quad (5.58)$$

Elimineren van  $\phi_m = \rho A_0 v_0$  levert tenslotte

$$e_{fr} = \frac{3}{2} C_D \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon^3} \frac{L}{d} \frac{1}{2} v_0^2 \quad (5.59)$$

Nu rest dus nog de kwestie om  $C_D$  te bepalen voor de omstroming van deeltjes in een gepakt bed. Verwacht mag weer worden, dat  $C_D$  een functie van het Reynolds-getal zal zijn. De vraag is echter niet alleen: hoe ziet deze functie er uit? Maar ook: welk Reynolds-getal typeert de stroming door het bed? De karakteristieke snelheid is wel  $\langle v \rangle$ , maar de karakteristieke lengte is niet zonder meer de diameter van de deeltjes. Een betere maat lijkt de hydraulische diameter van de holten tussen de deeltjes. Deze kan geschat worden op basis van de porositeit  $\varepsilon$  en de deeltjesgrootte  $d$ . Dan gaat het om  $4A/S$ , waarbij  $A$  het oppervlak van de holte-doorsnede voorstelt dat beschikbaar is voor de stroming en  $S$  de bevochtigde omtrek. Nu zijn de holten geen mooie rechte kanalen; daarom wordt bij voorkeur gewerkt met een *hydraulische diameter* gedefinieerd op basis van het volume van een holte en het totale oppervlak van de holte:

$$D_h = \frac{4 \times \text{volume holte}}{\text{wandoppervlak holte}} \quad (5.60)$$

Zowel de teller als de noemer in deze uitdrukking wordt vervolgens betrokken op het bedvolume. Voor de teller levert dat juist  $\varepsilon$  op, terwijl dan in de noemer het wandoppervlak van alle holten per volume-eenheid komt te staan dat wel het specifieke oppervlak  $a$  (in  $\text{m}^2/\text{m}^3$ ) genoemd wordt. Dit is te bepalen door het oppervlak  $\pi d^2$  van één deeltje te vermenigvuldigen met het aantal deeltjes in het bed  $N$  en tenslotte te delen door het totale bedvolume. Met behulp van relatie (5.57) voor  $N$  volgt dan voor het specifieke oppervlak:

$$a = \frac{6(1 - \varepsilon) A_0 L}{\pi d^3} \pi d^2 \frac{1}{A_0 L} = \frac{6(1 - \varepsilon)}{d} \quad (5.61)$$

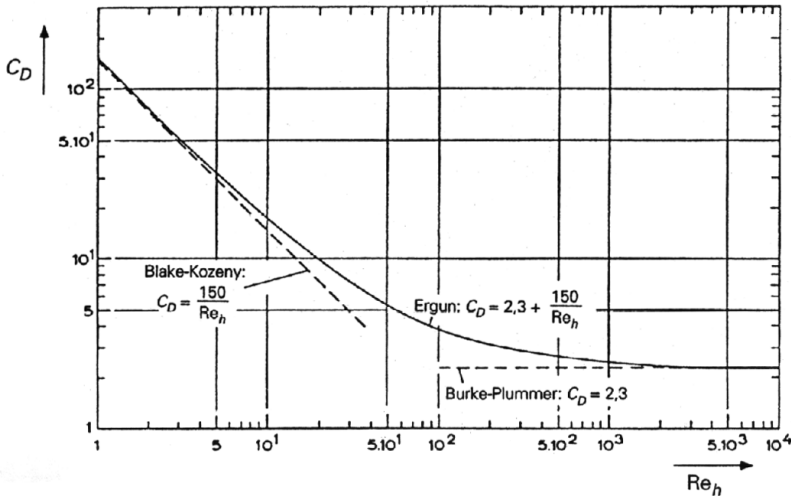
Het Reynolds-getal volgt nu als:

$$\text{Re}_h = \frac{\rho \langle v \rangle D_h}{\mu} = \frac{\rho v_0}{\mu} \frac{4\varepsilon}{\varepsilon 6(1 - \varepsilon)/d} = \frac{2}{3} \frac{\rho v_0 d}{(1 - \varepsilon)\mu} \quad (5.62)$$

Dit resultaat impliceert dat het Reynolds-getal voor een gepakt bed als karakteristieke snelheid de superfiële snelheid en als karakteristieke lengte toch de deeltjesdiameter bevat, en dat de porositeit erin voorkomt.

Indien  $Re_h$  voldoende groot is, blijkt  $C_D$  constant te worden, analoog aan de omstroming van een enkele bol; de waarde is echter anders, nl. 2,3 (in plaats van 0,43). Dit resultaat gaat op voor  $Re_h > 2000$ . Voor  $Re_h < 1$  blijkt  $C_D$  omgekeerd evenredig met  $Re_h$  te zijn, geheel in overeenstemming met een enkele omstroomde bol; echter ook nu is de evenredigheidsconstante verschillend:  $C_D = 150/Re_h$  (voor een enkele bol is de constante 24). In figuur 5.15 is het verloop van de  $C_D$  voor een gepakt bed als functie van  $Re_h$  weergegeven.

Ergun heeft een empirische vergelijking voor  $C_D$  opgesteld, die een goede beschrijving geeft voor het gehele  $Re_h$ -gebied uit figuur 5.15. Hij telde eenvoudig de laminaire en turbulente uitdrukkingen bij elkaar op:



Figuur 5.15.

$$C_D = 2,3 + \frac{150}{Re_h} \quad (5.63)$$

Deze *Ergun-relatie* invullen in vergelijking (5.59) levert voor de specifieke energiedissipatie:

$$e_{fr} = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^3} \left( 170 \frac{\mu}{\rho v_0 d} (1 - \varepsilon) + 1,75 \right) \frac{L}{d} v_0^2 \quad (5.64)$$

### Voorbeeld 5.9. Drukval over een gepakt bed

Een waterstroom met een debiet van 0,3 l/s moet ontdaan worden van  $Ca^{2+}$  ionen. Dit gebeurt in een cilindervormig gepakt bed gevormd door bolvormige ionwisselende deeltjes (diameter  $d = 2$  mm). De porositeit van het gepakte bed  $\varepsilon$  is 0,4. De lengte van de kolom is 2 m, de diameter  $D$  van de kolom bedraagt 0,25 m. Het water doorstroomt de kolom van onder naar boven. Hoe groot is de drukval over de kolom?

Het antwoord volgt uit de mechanische-energiebalans over het gehele gepakte bed. Dan is duidelijk dat de drukval bestaat uit twee bijdragen: de drukval ten gevolge van de zwaartekracht (de hydrostatische drukval) en de drukval als gevolg van wrijving. Deze tweede bijdrage volgt uit het bepalen van  $e_{fr}$  volgens vergelijking (5.64). Hiervoor moet eerst  $v_0$  bepaald worden uit het debiet:

$$v_0 = \frac{\phi_V}{\frac{\pi}{4} D^2} = 6,1 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} \quad (5.65)$$

Hiermee volgt voor de specifieke dissipatie:

$$e_{fr} = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^3} \left( 170 \frac{\mu}{\rho v_0 d} (1 - \varepsilon) + 1,75 \right) \frac{L}{d} v_0^2 = 3,52 \text{ J/kg}$$

en voor de drukval:

$$\Delta p = \rho g L + \rho e_{fr} = 1,96 \cdot 10^4 + 3,52 \cdot 10^3 = 2,31 \cdot 10^4 \text{ Pa} \quad (5.66)$$

□

### **Samenvatting**

In deze paragraaf is afgeleid hoe drukval over en energiedissipatie in een gepakt bed afhangen van de superficiële snelheid door het bed. Daartoe is het bed opgevat als een verzameling van  $N$  deeltjes die krachten ondervinden van het omstromende fluidum. Begrippen als de porositeit, het specifiek oppervlak en de hydraulische diameter van de holten tussen de deeltjes zijn ingevoerd. De meesleepcoëfficiënt  $C_D$  van een deeltje in zo'n bed hangt af van een Reynolds-getal gedefinieerd met de superficiële snelheid, de deeltjesdiameter en de porositeit. Dit heeft allemaal geleid tot de relatie van Ergun

$$\Delta p_{fr} = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^3} \left( 170 \frac{\mu}{\rho v_0 d} (1 - \varepsilon) + 1,75 \right) \frac{L}{d} \rho v_0^2 \quad (5.67)$$

voor de wrijvingsdrukval over een gepakt bed.

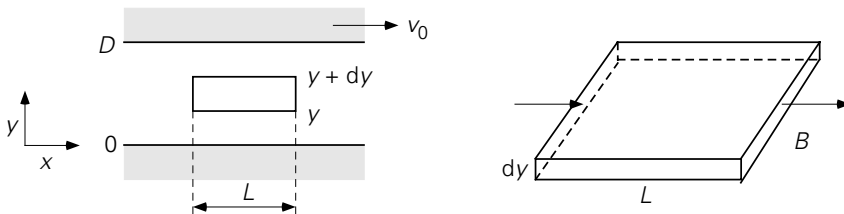
## **5.6 Laminaire stroming van Newtonse vloeistoffen**

In de hoofdstukken 3 en 4 is uitgebreid besproken hoe voor moleculair transport in enkele eenvoudige geometrieën temperatuur- en concentratieprofielen bepaald konden worden. Uitgangspunt was steeds een energie- of massabalans over een dun 'stripje' uit het materiaal (bv. tussen  $x$  en  $x + dx$ ). De stromen 'in' en 'uit' werden steeds gemodelleerd met behulp van de wet van Fourier of Fick (of Stefan). Zo'n zelfde analyse is ook mogelijk om het snelheidsprofiel in een laminair stromend medium te bepalen. Als restrictie zal hier wel gehanteerd worden dat de laminaire stroming tijds-

onafhankelijk is; bovendien zullen alleen geometrisch simpele situaties bekeken worden. Tenslotte zullen in deze paragraaf enkel fluïda aan de orde komen die gehoorzamen aan de *wet van Newton* (zie vergelijking (2.2)).

### Stroming tussen horizontale vlakke platen

De eerste situatie betreft een vlakke geometrie: een vloeistof tussen twee horizontaal opgestelde, evenwijdige, zeer grote platen. De onderlinge afstand tussen de platen is  $D$ . De onderste plaat staat stil; de bovenste plaat beweegt met een constante snelheid  $v_0$  in de horizontale  $x$ -richting. De snelheid is voldoende laag, zodat de vloeistof inderdaad in ‘lagen’ evenwijdig aan de beide platen stroomt. Dit betekent dat de stroming *laminair* is en dat het transport van  $x$ -impuls in de  $y$ -richting inderdaad alleen voor rekening van individuele moleculen komt. Deze stationaire situatie is geïllustreerd in figuur 5.16.



Figuur 5.16.

Om het snelheidsprofiel te bepalen moet begonnen worden met het opstellen van een  $x$ -impulsbalans over een klein plakje tussen  $y$  en  $y + dy$  met lengte  $L$  en breedte  $B$  (loodrecht op het vlak van tekening). Er stroomt echter bij deze evenwijdige platen en onder de opgegeven stationaire condities convectief net zoveel impuls door het linkerzijvlak het controlevolume in als er door het rechterzijvlak convectief weer uitgaat. Bovendien geldt, omdat de stroming laminair en dus ééndimensionaal is, dat er geen convectief impulstransport door de andere vlakken van het controlevolume plaatsvindt. Als, naar aanleiding van de zienswijze besproken in § 2.1.4, het moleculaire impulstransport beschreven wordt in termen van schuifspanningen, reduceert de impulsbalans tot een *krachtenbalans*. Deze krachtenbalans bevat dan informatie over het schuifspanningsprofiel.

Voor de situatie van figuur 5.16 is alleen de krachtenbalans in de  $x$ -richting van belang. Er werken op het controlevolume slechts twee krachten in de  $x$ -richting, namelijk een schuifspanning op het ondervlak en een schuifspanning op het bovenzvlak. De kracht op het ondervlak is  $BL\tau_{yx}|_y$ : de kracht die de laag net onder het controlevolume stromend uitoefent op de laag die er net boven ligt (en die zich dus binnen het controlevolume bevindt). Bedenk dat de schuifspanning juist zo gedefinieerd is, dat de laag met de kleinste coördinaat  $+\tau_{yx}$  uitoefent op de laag met de grotere coördinaat (zie weer § 2.1.4). Dit betekent dat aan de bovenzijde van het controlevolume juist een kracht  $BL(-\tau_{yx})|_{y+dy}$  op het controlevolume wordt uitgeoefend. De krachtenbalans luidt nu dus:

$$0 = BL \tau_{yx} \Big|_y + B L (-\tau_{yx}) \Big|_{y+dy} \quad (5.68)$$

Deze balans is eenvoudig te herleiden tot de differentiaalvergelijking die geldt voor de schuifspanning:

$$\frac{d}{dy} \tau_{yx} = 0 \quad (5.69)$$

De oplossing van deze vergelijking is:

$$\tau_{yx}(y) = \text{constant} \quad (5.70)$$

Het is goed om te bedenken, dat tot hier toe nog helemaal niet gebruikt is of de vloeistof voldoet aan de wet van Newton:

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{d}{dy} v_x$$

Het *schuifspanningsprofiel* zoals dat voor deze situatie is gevonden, is kennelijk onafhankelijk van de eigenschappen van de vloeistof. Deze bevinding is algemeen geldig: het schuifspanningsprofiel is slechts afhankelijk van de krachtenbalans (of beter de impulsbalans) en niet van de soort vloeistof.

Met het oog op het bepalen van het *snelheidsprofiel* dient wèl van een verband tussen schuifspanning en snelheidsgradiënt gebruik gemaakt te worden. Veronderstel dan *nu* dat de vloeistof tussen de beide platen Newtons is. Daarmee volgt dan uit vergelijking (5.70) dat

$$-\mu \frac{d}{dy} v_x = \text{const} \rightarrow \frac{d}{dy} v_x = C_1 \quad (5.71)$$

Oplossen van vergelijking (5.71) geeft:

$$v_x(y) = C_1 y + C_2 \quad (5.72)$$

De beide integratieconstanten zijn te vinden met behulp van de randvoorwaarden:  $y = 0 \rightarrow v_x = 0$  en  $y = D \rightarrow v_x = v_0$ . Dit levert het snelheidsprofiel op:

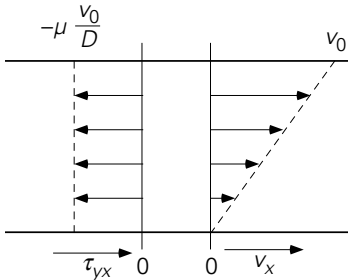
$$v_x(y) = v_0 \cdot \frac{y}{D} \quad (5.73)$$

Deze relatie is equivalent met vergelijking (3.5) voor warmtegeleiding door een vlakke plaat en met vergelijking (4.12) voor diffusie door een vlakke plaat. Substitutie van relatie (5.73) in de wet van Newton geeft een constante waarde voor de schuifspanning

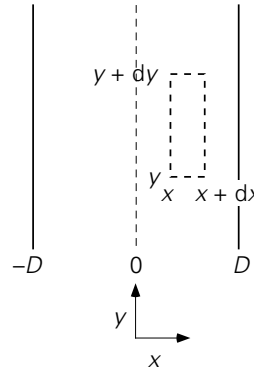
$$\tau_{yx} = -\mu \frac{v_0}{D} \quad (5.74)$$

zoals ook  $\phi_g''$  en  $\phi_m''$  volgens respectievelijk de vergelijkingen (3.6) en (4.13) constanten zijn. In figuur 5.17 is zowel het schuifspanningsprofiel als het snelheidsprofiel getekend. Hierin is duidelijk te zien dat de schuifspanning negatief is: elke

‘onder’liggende laag oefent een kracht in de negatieve  $x$ -richting uit op de er ‘boven’ liggende laag en verzet zich aldus tegen de stroming ten gevolge van de bewegende topplaat.



Figuur 5.17.



Figuur 5.18.

### Stroming tussen twee verticale platen

De techniek zal vervolgens nogmaals gedemonstreerd worden aan de hand van een tweede vlakke geometrie. Ditmaal gaat het om de laminaire stroming van een Newtonse vloeistof tussen twee verticaal opgestelde zeer grote platen. De afstand tussen beide platen wordt (om redenen die later zullen blijken) nu  $2D$  genoemd. De stroming vindt hier plaats onder invloed van de zwaartekracht. Er is geen drukverschil over de platen aangelegd. Deze stationaire toestand is geschetst in figuur 5.18.

Ook hier wordt eerst weer het schuifspanningsprofiel bepaald. En ook hier reduceert de  $y$ -impulsbalans over het controlevolume met dikte  $dx$ , hoogte  $dy$  en breedte  $B$  tot een krachtenbalans:

$$0 = B \, dy \, \tau_{xy} \Big|_x + B \, dy \, (-\tau_{xy}) \Big|_{x+dx} - \rho g \, B \, dx \, dy \quad (5.75)$$

Dit levert de volgende differentiaalvergelijking op voor de schuifspanning:

$$\frac{d}{dx} \tau_{xy} = -\rho g \quad (5.76)$$

met als oplossing:

$$\tau_{xy}(x) = -\rho g x + C_1 \quad (5.77)$$

Het snelheidsprofiel volgt door gebruik te maken van het gegeven dat de vloeistof Newtons is:

$$\tau_{xy} = -\mu \frac{d}{dx} v_y \rightarrow \frac{d}{dx} v_y = \frac{\rho g}{\mu} x - \frac{C_1}{\mu} \quad (5.78)$$

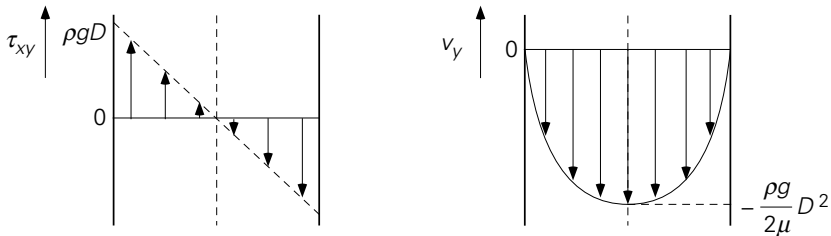
en door vergelijking (5.78) te integreren:

$$v_y = \frac{\rho g}{\mu} \frac{1}{2} x^2 - \frac{C_1}{\mu} x + C_2 \quad (5.79)$$

De twee integratieconstanten kunnen bepaald worden met behulp van de twee voor de hand liggende randvoorwaarden voor de snelheid, nl.  $x = \pm D \rightarrow v_y = 0$ . Daarmee wordt gevonden dat  $C_1 = 0$  en dat  $2C_2 = -\rho g D^2 / \mu$  en daarmee dan:

$$v_y(x) = -\frac{\rho g}{2\mu} (D^2 - x^2) \quad (5.80)$$

Het snelheidsprofiel heeft dus de vorm van een parabool. De vloeistof stroomt omlaag, geheel in overeenstemming met onze verwachting. De maximale snelheid is te vinden op  $x = 0$ . In figuur 5.19 zijn weer de profielen van schuifspanning en snelheid weergegeven.



Figuur 5.19.

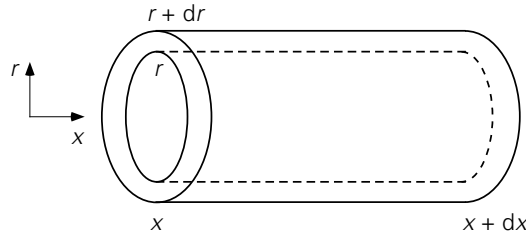
De integratieconstante  $C_1$  is in dit geval ook directer te bepalen door al eerder gebruik te maken van de symmetrie die in dit probleem aanwezig is. Deze symmetrie zit hierboven verborgen in de beide randvoorwaarden aan de snelheid: beide platen zijn stilstaande wanden met hetzelfde effect op de stroming (let wel dat in de vorige situatie één van de wanden bewoog!). Vanwege deze symmetrie kan er ook geen  $y$ -impuls door het vlak  $x = 0$  getransporteerd worden, want dan zouden de twee ‘helften’ van de stroming verschillend zijn of worden. Dit betekent dat de beide ‘helften’ geen kracht (= schuifspanning) op elkaar uitoefenen:  $x = 0 \rightarrow \tau_{xy} = 0$ . Juist daarom wordt in zo’n symmetrische situatie de as  $x = 0$  ook midden tussen de twee platen gekozen. Voorts is juist vanwege het verband tussen schuifspanning en snelheidsgradiënt de snelheid op  $x = 0$  ook maximaal. De symmetrievoorwaarde laat hier dan ook toe bij vergelijking (5.77) direct te concluderen dat  $C_1 = 0$  zodat zonder de omweg via het snelheidsprofiel direct volgt:

$$\tau_{xy}(x) = -\rho g x \quad (5.81)$$

### Stroming door een horizontale as

Tenslotte zal hier een geval van een cilindrische geometrie besproken worden: tijdsafhankelijke laminaire stroming van een Newtonse vloeistof door een horizontaal opgestelde, zeer lange rechte cilinder onder invloed van een drukgradiënt. Hier moet

een *krachtenbalans* opgesteld worden voor een kokertje uit de vloeistof met dikte  $dr$  (tussen  $r$  en  $r + dr$ ) en met lengte  $dx$  (zie figuur 5.20).



Figuur 5.20.

Op het linkzijdvlak (de kopse kant) van het kokertje werkt een kracht  $p|_x \cdot 2\pi r dr$  in de positieve  $x$ -richting. Evenzo werkt op het rechterzijdvlak van buitenaf een kracht in de negatieve  $x$ -richting, dus  $-p|_{x+dx} \cdot 2\pi r dr$ . Aan de binnenzijde van het kokertje werkt op het oppervlak  $2\pi r dx$  de schuifspanning  $(\tau_{rx})|_r$ . Tenslotte werkt op de buitenzijde op het oppervlak  $2\pi(r+dr)dx$  de schuifspanning  $(-\tau_{rx})|_{r+dr}$ . Dit levert onderstaande krachtenbalans op:

$$0 = p|_x \cdot 2\pi r dr - p|_{x+dx} \cdot 2\pi r dr + 2\pi r dx (\tau_{rx})|_r + 2\pi(r+dr) dx (-\tau_{rx})|_{r+dr} \quad (5.82)$$

Deze vergelijking kan ook geschreven worden als:

$$0 = p|_x \cdot 2\pi r dr - p|_{x+dx} \cdot 2\pi r dr + 2\pi dx (r\tau_{rx})|_r - 2\pi dx (r\tau_{rx})|_{r+dr} \quad (5.83)$$

waarbij in de derde en vierde term van het rechterlid tussen haken het product van straal en schuifspanning staat omdat omtrek (of: oppervlak) en schuifspanning beide van  $r$  afhangen. Vergelijking (5.83) is eenvoudig (delen door  $2\pi r dr dx$ ) te herschrijven naar de differentiaalvergelijking voor de schuifspanning:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau_{rx}) = -\frac{dp}{dx} \quad (5.84)$$

Nu is de drukgradiënt gegeven en constant, zodat deze vergelijking vrij simpel op te lossen is:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} (r\tau_{rx}) &= \left(-\frac{dp}{dx}\right) && \rightarrow r\tau_{rx} = \frac{1}{2} \left(-\frac{dp}{dx}\right) r^2 + C_1 \\ & && \rightarrow \tau_{rx} = \frac{1}{2} \left(-\frac{dp}{dx}\right) r + \frac{C_1}{r} \end{aligned} \quad (5.85)$$

Ook nu geldt weer op grond van symmetrie-overwegingen, dat de schuifspanning op de as van de cilinder gelijk aan nul moet zijn:  $r = 0 \rightarrow \tau_{rx} = 0$ . Dit betekent dat de integratieconstante  $C_1$  nul is. Het schuifspanningsprofiel is dan:

$$\tau_{rx}(r) = \frac{1}{2} \left( -\frac{dp}{dx} \right) r \quad (5.86)$$

Bedenk dat  $dp/dx < 0$ : er is immers sprake van een drukval, want de wrijving aan de wand en intern van de laagjes vloeistof over elkaar moet overwonnen worden. Vergelijking (5.86) laat zien dat in overeenstemming met de definitie van schuifspanning inderdaad  $\tau_{rx} \geq 0$ .

Het snelheidsprofiel volgt nu door weer te gebruiken dat de vloeistof Newtons is; dan volgt:

$$\frac{d}{dr} v_x = -\frac{1}{2\mu} \left( -\frac{dp}{dx} \right) r \quad (5.87)$$

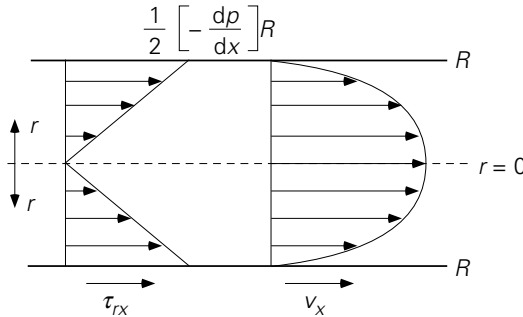
De oplossing hiervan is

$$v_x = -\frac{1}{4\mu} \left( -\frac{dp}{dx} \right) r^2 + C_2 \quad (5.88)$$

De integratieconstante  $C_2$  is te bepalen met de randvoorwaarde:  $r = R \rightarrow v_x = 0$ . Dit geeft

$$v_x(r) = \frac{1}{4\mu} \left( -\frac{dp}{dx} \right) (R^2 - r^2) = \frac{R^2}{4\mu} \left( -\frac{dp}{dx} \right) \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (5.89)$$

Dit is wederom een parabool met de maximale snelheid op de as van de cilinder ( $r = 0$ ). Het schuifspanningsprofiel (5.81) en het snelheidsprofiel (5.84) zijn in figuur 5.21 geschetst.



Figuur 5.21.

De gemiddelde vloeistofsnelheid is:

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^R v_x(r) 2\pi r dr}{\int_0^R 2\pi r dr} = \frac{R^2}{8\mu} \left( -\frac{dp}{dx} \right) \quad (5.90)$$

Dit is juist de helft van de maximale snelheid in de cilindrische buis:  $v_{\max} = 2 \langle v \rangle$ .

Vergelijking (5.90) kan ook in een andere vorm geschreven worden, namelijk als een vergelijking tussen de drukval  $\Delta p$  over een buislengte  $L$  en de gemiddelde snelheid:

$$\Delta p = \frac{8\mu L}{R^2} \langle v \rangle = \frac{32\mu L}{D^2} \langle v \rangle = \frac{64\mu}{D} \frac{L}{2} \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \quad (5.91)$$

De laatste term van deze vergelijking is bewust geschreven in een vorm die ook gebruikt werd bij de modellering van dissipatie ( $e_{fr}$ ). Dan valt gemakkelijk in te zien:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = e_{fr} = \frac{64\mu}{\rho \langle v \rangle D} \frac{L}{2} \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \quad (5.92)$$

Hiermee is dan bewezen, dat in het geval van laminaire stroming door een horizontale cilindervormige buis de Fanning-frictiefactor  $4f$  gelijk is aan  $64/Re$ : zie relatie (5.28).

Tenslotte volgt uit vergelijking (5.84) door integratie het volumedebiet dat door een leiding met een cirkelvormige doorsnede en met lengte  $L$  stroomt onder invloed van een drukval  $\Delta p$ :

$$\phi_v = \int_0^R v_x(r) 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\Delta p}{L} \quad (5.93)$$

Deze vergelijking wordt de *wet van Hagen-Poiseuille* genoemd; de bijbehorende laminaire stroming heet wel *Poiseuille-stroming*.

De berekening van het snelheidsprofiel in buizen met niet-cirkelvormige doorsnede is een stuk gecompliceerder. Voor een buis met een vierkante doorsnede met ribbe  $a$  geldt een vergelijking die sterk lijkt op vergelijking (5.93) maar met daarin de factor  $a^4/28,6$  in plaats van  $\pi R^4/8$ . Merk op dat het debiet steeds evenredig is met de karakteristieke afmeting tot de vierde macht.

### Voorbeeld 5.10. Filmcondensatie II

Met behulp van bovenstaande theorie kan vergelijking (3.161) uit voorbeeld 3.13 betreffende filmcondensatie verder uitgewerkt worden. Daarvoor is het nodig te weten hoe  $\phi_v$  verandert in de stromingsrichting  $x$  (neerwaarts gekozen). Dit debiet hangt af van zowel de laagdikte als het snelheidsprofiel in de laag. Deze afhankelijkheid kan gevonden worden door voor een bepaalde dikte  $\delta$  het snelheidsprofiel en daaruit het vloeistofdebiet behorend bij die  $\delta$  te bepalen.

Beschouw dan in de situatie van figuur 3.31 een dun plakje met dikte  $dy$  op enige afstand van de wand (dit is feitelijk de helft van het hierboven behandelde geval van stroming tussen twee verticale vlakke platen). Uit een krachtenbalans over dit plakje volgt, analoog aan vergelijking (5.77) maar dankzij de andere coördinaatkeuze:

$$\tau_{yx} = -\rho gy + C_1 \quad (5.94)$$

Met de randvoorwaarde  $y = \delta \rightarrow \tau_{yx} = 0$  (want er geldt dat de snelheid maximaal is aan het oppervlak van de film en dat er hoegenaamd geen impuls wordt overgedragen naar, of geen schuifspanning uitgeoefend op, de lucht: vergelijk ook eenzelfde aanname betreffende het contactvlak vloeistof-lucht in voorbeeld 3.7) volgt dan

$$\tau_{yx} = \rho g (\delta - y) \quad (5.95)$$

Voor een Newtonse vloeistof leidt substitutie van de wet van Newton, integratie en gebruik van de randvoorwaarde  $y = 0 \rightarrow v = 0$  tot

$$v = \frac{\rho g}{\mu} \left( \frac{1}{2} y^2 - y \delta \right) \quad (5.96)$$

Integratie van dit snelheidsprofiel over de dikte  $\delta$  resulteert in de volgende uitdrukking voor het debiet door de film over een breedte  $b$ :

$$\phi_v = \frac{\rho g \delta^3 b}{3\mu} \quad (5.97)$$

Differentiëren naar  $\delta$  en substitueren van het resultaat in vergelijking (3.161) geeft

$$\Delta h_v \rho^2 g \delta^3 d\delta = \mu \lambda (T - T_w) dx \quad (5.98)$$

Integratie tussen de grenzen  $x = 0 \rightarrow \delta = 0$  en  $x = L \rightarrow \delta = \delta_L$  leidt tot

$$\delta_L = \left( \frac{4\mu \lambda (T - T_w)L}{\rho^2 g \Delta h_v} \right)^{1/4} \quad (5.99)$$

Een uitdrukking voor de over  $L$  gemiddelde warmteoverdrachtscoëfficiënt  $\langle h \rangle$  volgt uit een warmtebalans over de gehele film tussen  $x = 0$  en  $x = L$ :

$$\langle h \rangle (T - T_w) bL = \phi_v \Big|_{x=L} \cdot \rho \Delta h_v \quad (5.100)$$

Hieruit volgt door gebruikmaking van de vergelijkingen (5.97) en (5.99) direct vergelijking (3.161).  $\square$

## Samenvatting

Voor stationaire, laminaire stroming is, min of meer analoog aan de gang van zaken bij moleculair transport van warmte of massa, het snelheidsprofiel (= de radiale impulsconcentratieverdeling) gemakkelijk te berekenen als de geometrie voldoende eenvoudig is. Hiertoe moet een impulsbalans opgesteld worden die voor eenvoudige geometrieën reduceert tot een krachtenbalans. Met behulp van deze krachtenbalans kan het schuifspanningsprofiel bepaald worden. Dit profiel is *onafhankelijk* van de soort vloeistof. Pas bij het bepalen van het snelheidsprofiel is het verband tussen schuifspanning en snelheidsgradiënt van belang: gehoorzaamt het fluïdum aan de wet van Newton of niet.

In veel gevallen kunnen de integratieconstanten die opduiken bij het integratieproces van krachtenbalans tot snelheidsprofiel, het veiligst bepaald worden uit randvoorwaarden aan de snelheid.

Voor stationaire, laminaire stroming van een Newtonse vloeistof door een cilindrische buis is afgeleid dat de schuifspanning nul is op de as en toeneemt in radiale richting, dat het snelheidsprofiel parabolisch is en dat voor het debiet de wet van Hagen-Poiseuille geldt:

$$\phi_v = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\Delta p}{L}$$

maar ook voor andere geometrieën zijn schuifspannings- en snelheidsprofielen afgeleid.

## 5.7 Laminaire stroming van niet-Newtonse vloeistoffen

In de vorige paragraaf is alleen gerekend aan vloeistoffen die voldoen aan de wet van Newton. Het standaard-voorbeeld hiervan is water. Zeer veel vloeistoffen voldoen echter slechts in een beperkt gebied of zelfs helemaal niet aan die wet. Enkele voorbeelden van vloeistoffen die *niet-Newtons gedrag* vertonen zijn:

- polymeren
- rubbers
- verf
- nat cement
- tandpasta
- bloed
- pindakaas
- margarine.

Niet-Newtons gedrag is meer regel dan uitzondering. Dat komt omdat de wet van Newton eigenlijk alleen geldt voor bolvormige moleculen die zich afgezien van botsingen betrekkelijk ongehinderd door elkaar kunnen bewegen. De moleculen van de meeste stoffen zijn niet bolvormig, maar bestaan uit langere al dan niet vertakte ketens van atomen of atoomgroepen; bovendien beïnvloeden de moleculen elkaar in hun bewegingen vaak door ladingsverdelingen binnen de moleculen (polaire groepen). Doen alsof de moleculen zich als knikkertjes gedragen is dan ver bezijden de waarheid. Onder invloed van opgelegde afschuifkrachten herschikken de moleculen zich en/of worden intermoleculaire bindingen tussen polaire groepen of vertakkingen in meer of mindere mate doorbroken. Pas daarna geldt misschien de wet van Newton.

Niet-Newtonse vloeistoffen zijn onder te verdelen in verschillende categorieën die elk

hun eigen regel hebben voor het verband tussen de schuifspanning en de optredende snelheidsgradiënt. De beschrijving van dit verband noemt men de *reologie* van de vloeistof. In deze paragraaf zullen we een aantal veel voorkomende categorieën bespreken.

### 5.7.1 *Het Ostwald-De Waele model*

Een groot aantal vloeistoffen gehoorzaamt aan het *Ostwald-De Waele model* voor het verband tussen schuifspanning en snelheidsgradiënt:

$$\tau_{xy} = -K \left| \frac{dv_y}{dx} \right|^{n-1} \cdot \frac{dv_y}{dx} \quad (5.101)$$

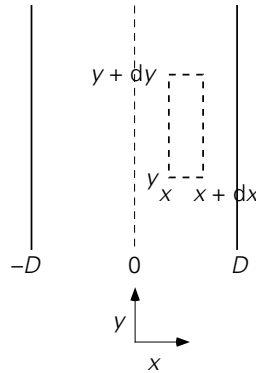
Vergelijking (5.101) staat ook bekend onder de naam *machtswet* (in het Engels: *Power Law*); een vloeistof die aan deze wet gehoorzaamt wordt dan ook wel een *power law* vloeistof genoemd. De constante  $K$  heet (in het Engels) de *consistency* en  $n$  noemt men de *flow index*. De index  $n$  is dimensieloos, terwijl  $K$  uiteraard wel een dimensie heeft, die overigens afhankelijk is van de waarde van  $n$ . Bedenk dat Newtonse vloeistoffen nu eigenlijk een bijzonder geval vormen van een *power law* vloeistof, namelijk het geval  $n = 1$ . Men maakt nog een verder onderscheid in deze categorie: *power law* vloeistoffen met een index  $n < 1$  noemt men *pseudoplastisch*. Een voorbeeld hiervan is 4 gewichts% papierpulp in water met  $n = 0,575$  en  $K = 20,0 \text{ N s}^{0,575} \text{ m}^{-2}$ . Indien geldt  $n > 1$ , spreekt men van een *dilatante* vloeistof. Een voorbeeld hiervan is nat cement.

Vaak wordt  $K$  maal de modulus van de snelheidsgradiënt tot de macht  $n - 1$ , dat wil zeggen de uitdrukking (zonder het minteken) vóór de punt in het rechterlid van vergelijking (5.101), wel de *schijnbare* of *effectieve viscositeitscoëfficiënt*  $\mu_e$  genoemd die dan niet alleen van de stofkarakteristiek  $K$  afhangt, maar ook van de (lokale) snelheidsgradiënt. Merk op dat alleen de grootte, niet het teken van de snelheidsgradiënt van invloed is op de intermoleculaire wisselwerking zoals weerspiegeld in  $\mu_e$ . Qua vorm lijkt relatie (5.101) dan weer op de wet van Newton.

De oplossing van laminaire, stationaire stromingsproblemen gaat dan ook wel geheel analoog aan die bij Newtonse vloeistoffen, maar  $\mu_e$  kan overal in het stromingsdomein een andere waarde hebben, afhankelijk van de grootte van de lokale snelheidsgradiënt. Dit effect dient in rekening te worden gebracht. Dit zal aan de hand van een voorbeeld gedemonstreerd worden.

#### **Voorbeeld 5.11.** *Een power law vloeistof tussen twee verticale platen*

Beschouw de laminaire, stationaire stroming van een *power law* vloeistof tussen twee verticaal opgestelde, zeer grote platen (zie figuur 5.22). De stroming vindt geheel plaats onder invloed van de zwaartekracht, er is geen kunstmatig drukverschil over de platen aangelegd.



Figuur 5.22.

Uit de krachtenbalans  $\sum F_y = 0$  volgt:

$$0 = [\tau_{xy}]_x B dy + (-\tau_{xy})|_{x+dx} B dy - \rho g B dx dy \quad (5.102)$$

Deze vergelijking levert uiteraard het schuifspanningsprofiel van vergelijking (5.77):

$$\tau_{xy} = -\rho g x \quad (5.103)$$

Bedenk weer dat de reologie van de vloeistof geen invloed op het schuifspanningsprofiel heeft. Om nu het snelheidsprofiel te bepalen dient wel gebruik gemaakt te worden van het gegeven dat het hier een power law vloeistof betreft:

$$\tau_{xy} = -K \left| \frac{dv_y}{dx} \right|^{n-1} \frac{dv_y}{dx} \quad (5.104)$$

Allereerst dienen nu de modulusstrepen in vergelijking (5.104) weggewerkt te worden; daartvoor hebben we het teken van de snelheidsgradiënt nodig. Beschouw het domein  $0 \leq x \leq D$  en bedenk dat vanwege de symmetrie in dit probleem het snelheidsprofiel in het domein  $-D \leq x \leq 0$  later door spiegeling ten opzichte van de ( $x=0$ )-lijn verkregen kan worden. In het domein  $0 \leq x \leq D$  geldt dat bij toenemende  $x$  de snelheid  $v_y$  steeds minder negatief wordt, dat wil zeggen dat de afgeleide  $dv_y/dx \geq 0$ . Combineren van de vergelijkingen (5.103) en (5.104) levert dan voor het domein  $0 \leq x \leq D$

$$-K \left( \frac{dv_y}{dx} \right)^n = -\rho g x \rightarrow \frac{dv_y}{dx} = \left( \frac{\rho g}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot x^{\frac{1}{n}} \quad (5.105)$$

Integreren geeft

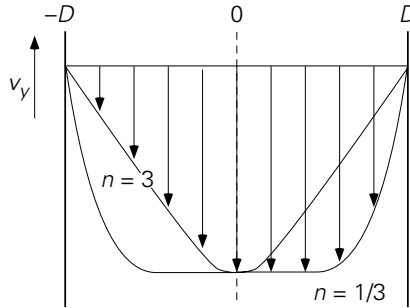
$$v_y(x) = \left( \frac{\rho g}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} x^{\frac{n+1}{n}} + C_2 \quad (5.106)$$

Met behulp van de randvoorwaarden:  $x = D \rightarrow v_y = 0$  kan de integratieconstante bepaald worden. Daarmee wordt het snelheidsprofiel in het domein  $0 \leq x \leq D$

uiteindelijk:

$$v_y(x) = -\frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g}{K}\right)^{\frac{1}{n}} \left(D^{\frac{n+1}{n}} - x^{\frac{n+1}{n}}\right) \quad (5.107)$$

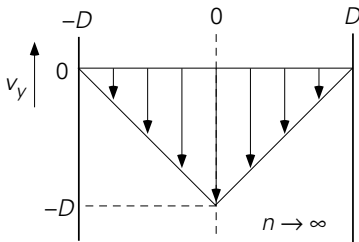
Merk op dat voor  $n = 1$  de oplossing voor Newtonse vloeistoffen, zoals die in § 5.6 bepaald is, weer teruggevonden wordt. In figuur 5.23 zijn de snelheidsprofielen weer gegeven voor twee gevallen:  $n = \frac{1}{3}$  en  $n = 3$ .



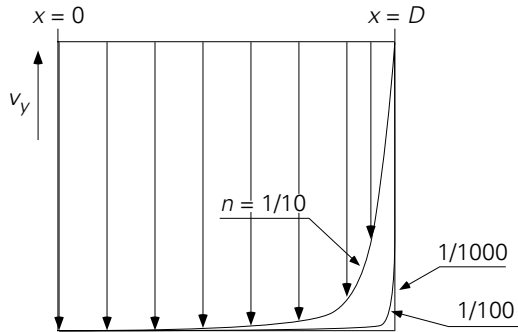
Figuur 5.23.

Er zijn voorts nog twee interessante limietgevallen:

- i)  $n \rightarrow \infty \rightarrow v_y = -\left(\frac{\rho g}{K}\right)^{\frac{1}{n}}(D-x) \rightarrow -(D-x)$ : zie figuur 5.24.
- ii)  $n \rightarrow 0 \rightarrow$  het profiel van  $v_y$  nadert tot dat van ideale propstroom; deze laatste bewering is in figuur 5.25 zichtbaar gemaakt door de gevallen  $n = 1/10, 1/100, 1/1000$  te tekenen. □



Figuur 5.24.



Figuur 5.25.

## 5.7.2 Bingham-vloeistoffen

Er zijn ook materialen die pas gaan stromen als de schuifspanning een bepaalde waarde overschrijdt. Voorbeelden hiervan zijn klei en tandpasta. Vooral het gedrag van tandpasta is bekend: als de tube (met geopende dop) op zijn kop wordt gehouden, gebeurt er niets; slechts door knijpen (eigenlijk het verhogen van de druk in de tube) stroomt de vloeistof eruit. Vloeistoffen die een dergelijk gedrag vertonen, heten *Bingham-vloeistoffen* of ook wel Bingham-plastics. Het verband tussen de schuifspanning en de snelheidsgradiënt is:

$$\begin{aligned} |\tau_{xy}| - \tau_0 &= \mu \left| \frac{dv_y}{dx} \right| & \text{als } |\tau_{xy}| \geq \tau_0 \\ \frac{dv_y}{dx} &= 0 & \text{als } |\tau_{xy}| < \tau_0 \end{aligned} \quad (5.108)$$

De grootte  $\tau_0$  heet de *zwichtspanning* (in het Engels: *yield stress*) en is een stofeigenschap: pas als de uitgeoefende spanning een kritische waarde overschrijdt, komt een vloeistof in beweging omdat dan het intermoleculaire netwerk bezwijkt. Het werken met zo'n zwichtspanning zal met een voorbeeld geïllustreerd worden.

### Voorbeeld 5.12. Een Bingham-vloeistof tussen twee verticale platen

Beschouw wederom de situatie dat een vloeistof tussen twee verticaal opgestelde, stilstaande platen onder invloed van de zwaartekracht naar beneden stroomt. Deze Bingham-vloeistof in dit voorbeeld heeft een yield stress numeriek gelijk is aan  $\rho g D/2$  (Let wel: vergroting of verkleining van de plaatafstand verandert de yield stress niet; het gaat hier slechts om de waarde van de yield stress). Gevraagd wordt naar het snelheidsprofiel.

Uit een krachtenbalans over een typisch volume-elementje volgt nog steeds:

$$\tau_{xy} = -\rho g x$$

Om het snelheidsprofiel op te lossen moet de reologie van de vloeistof gespecificeerd te worden. Vanwege de symmetrie hoeft alleen het domein  $0 \leq x \leq D$  geanalyseerd te worden. Daar geldt

$$|\tau_{xy}| = \rho g x \quad (5.109)$$

Vervolgens moet onderscheid gemaakt worden tussen de gebieden waar  $|\tau_{xy}| \geq \tau_0$  en waar  $|\tau_{xy}| < \tau_0$ . Beschouw eerst het deel waarvoor geldt  $|\tau_{xy}| \geq \tau_0$ : daar is

$$|\tau_{xy}| \geq \tau_0 \rightarrow \rho g x \geq \rho g \frac{D}{2} \rightarrow x \geq \frac{D}{2} \quad (5.110)$$

Vanwege  $dv_y/dx \geq 0$  voor  $x \geq 0$  volgt uit de vergelijkingen (5.108) - (5.110):

$$\rho g x - \tau_0 = \mu \frac{dv_y}{dx} \quad (5.111)$$

Hieruit volgt voor de snelheidsgradiënt

$$\frac{dv_y}{dx} = \frac{\rho g}{\mu} x - \frac{\tau_0}{\mu} = \frac{\rho g}{\mu} \left( x - \frac{D}{2} \right) \quad (5.112)$$

waarin ook de uitdrukking voor  $\tau_0$  is ingevuld. Deze differentiaalvergelijking heeft, dankzij de randvoorwaarde:  $x = D \rightarrow v_y = 0$ , als oplossing:

$$v_y(x) = \frac{\rho g}{2\mu} (x^2 - Dx) \quad (5.113)$$

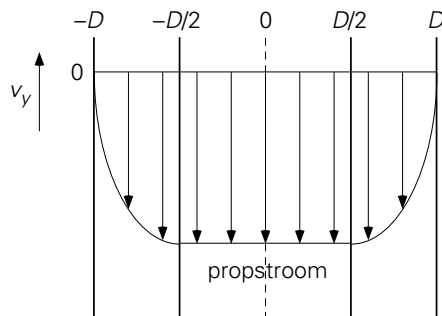
Vervolgens moet nog het profiel voor het gedeelte  $0 \leq x < D/2$  uitgewerkt worden. Hier geldt  $|\tau_{xy}| < \tau_0$  en dus

$$\frac{dv_y}{dx} = 0 \rightarrow v_y = \text{constant} = v_y \left( \frac{D}{2} \right) = -\frac{\rho g}{8\mu} D^2 \quad (5.114)$$

In deze laatste vergelijking is gebruikt dat als randvoorwaarde de waarde van de snelheid op  $x = D/2$  genomen moet worden zoals die uit het eerste deel van de oplossing volgt.

In figuur 5.26 is dan het snelheidsprofiel van de Bingham-vloeistof na spiegeling ten opzichte van de symmetrie-as geschetst. In het gebied  $-D/2 < x < D/2$  geldt niet  $v_y = 0$ , maar  $v_y = \text{constant} \neq 0$ ! In dit gebied treedt echte propstroom op.

Wat zou nu de oplossing van het snelheidsprofiel geweest zijn indien de yield stress numeriek groter dan  $\rho g D$  geweest was? In dat geval was overal in de vloeistof  $|\tau_{xy}| < \tau_0$  en dus overal de snelheid  $v_y = \text{constant}$ . Toepassen van de randvoorwaarde  $x = D \rightarrow v_y = 0$  levert dat nu in de gehele vloeistoflaag geldt:  $v_y = 0$ !  $\square$



Figuur 5.26.

### 5.7.3 Casson-vloeistoffen

Voor een aantal vloeistoffen is de volgende Casson-reologie toepasbaar:

$$|\tau_{xy}|^{\frac{1}{2}} - \tau_c^{\frac{1}{2}} = \mu_c^{\frac{1}{2}} \left| \frac{dv_y}{dx} \right|^{\frac{1}{2}} \quad \text{als } |\tau_{xy}| \geq \tau_c,$$

$$\frac{dv_y}{dx} = 0 \quad \text{als } |\tau_{xy}| < \tau_c \quad (5.115)$$

Voorbeelden van vloeistoffen die hieraan voldoen zijn yoghurt en bloed.

#### 5.7.4 *Visco-elastische vloeistoffen*

Sommige vloeistoffen hebben, afhankelijk van de omstandigheden (de aangelegde spanningen), ook *elastische eigenschappen*; het gedrag van zulke vloeistoffen wordt dikwijls goed beschreven met

$$\tau_{xy} + \lambda \frac{d\tau_{xy}}{dt} = -\mu \frac{dv_y}{dx} \quad (5.116)$$

waarin  $\lambda$  de tijdconstante is die het elasticiteitsgedrag typeert.

Het bijzondere hieraan is dat de vloeistof zich deels als een ‘gewone’ viskeuze vloeistof gedraagt: onder stationaire condities reduceert vergelijking (5.116) tot de Newtonse vergelijking. Als echter de schuifspanning in de tijd wel varieert, zal de stof elastische eigenschappen vertonen. Ook dit gedrag is terug te voeren op netwerkvorming tussen sterk vertakte en opgerolde moleculen en de reactie van dit netwerk op aangelegde spanningen.

Een zeer fraaie illustratie van dit *visco-elastische* gedrag kan getoond worden met haaievinnesoep. Als in de soep gedurende langere tijd met een lepel steeds eenparig eenzelfde kant op geroerd wordt, zal een stationaire situatie ontstaan. Wordt nu de lepel uit de vloeistof gehaald, dan zal de vloeistof nog even doordraaien en door de viscositeit tot stilstand willen komen. Nu is echter de toestand niet meer stationair en worden de andere eigenschappen van de vloeistof goed zichtbaar. De soep komt niet langzaam tot stilstand, maar draait vrij abrupt de stromingsrichting even om! Het is net alsof de vloeistof als een elastiekje uitgerekt was en alsof, nu de lepel eruit is, het elastiekje zijn evenwichtsstand weer wil aannemen. Dit is een eenvoudige doch doeltreffende test om te onderzoeken of haaievinnesoep wel de ‘echte’ is ( $\lambda \approx 1$  s).

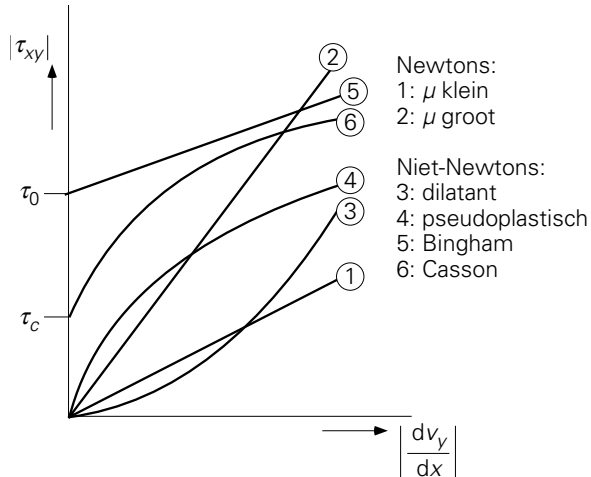
#### **Samenvatting**

Het verband tussen de snelheidsgradiënt en de schuifspanning wordt niet voor alle vloeistoffen gegeven door de wet van Newton. Integendeel, de meeste vloeistoffen die in de industrie gebruikt worden alsmede in het dagelijks leven, voldoen hier niet aan. Er zijn dan ook veel verschillende categorieën vloeistoffen, elk met hun eigen verband tussen schuifspanning en snelheidsgradiënt. Het vakgebied dat zich hiermee bezighoudt, is een geheel eigen tak binnen de stromingsleer en heet de *reologie*. Overigens noemt men ook het verband tussen de schuifspanning en de snelheidsgradiënt de reologie van de vloeistof.

Bedenk dat het schuifspanningsprofiel niet van de reologie van de vloeistof afhangt, maar het snelheidsprofiel wel. Voor verschillende typen vloeistoffen zijn snelheids-

profielen afgeleid. Soms gaat de stroming op propstroom lijken.

In figuur 5.27 is bij wijze van samenvatting het verband tussen de schuifspanning en de snelheidsgradiënt voor een aantal soorten vloeistoffen nog eens weergegeven.



Figuur 5.27.

## 5.8 De algemene bewegingsvergelijkingen

### 5.8.1 Stromingsleer en fysische transportverschijnselen

In de hoofdstukken 1 en 2 van dit boek zijn de technieken van balansen opstellen en van dimensie-analyse besproken. Daarnaast zijn allerlei concepten (zoals mechanische energie, verblijftijdspreiding en schuifspanning), allerlei dimensieloze kentallen en enkele fenomenologische wetten geïntroduceerd. Vervolgens zijn in de hoofdstukken 3 en 4 warmte- en stoftransport behandeld. Daarbij is steeds eerst moleculair transport aan de orde geweest en is daarna voor convectief transport steeds het gebruik van overdrachtscoëfficiënten gepropageerd. Fysisch technologen zijn bij de beschrijving, ontwikkeling, toepassing en opschaling van procesapparaten heel ver gekomen op basis van bovenbedoelde aanpak die door uitgebreide empirische informatie wordt ondersteund. De analogie tussen warmte- en stofoverdracht was daarbij treffend en uiterst behulpzaam.

Stromingsleer, feitelijk impulstransport of impulsoverdracht, kan ook naar analogie met warmte- en stofoverdracht benaderd worden. Dit is gedaan in de paragrafen 2.1 en 5.6 voor laminaire stroming (moleculair transport) en in § 5.3.3 voor wrijvingsweerstand (impulsoverdracht aan vaste wanden) onder turbulente stromingscondities. Toch is voor de grote lijn van dit hoofdstuk over stromingsleer voor een andere volgorde van behandeling gekozen dan in de hoofdstukken 3 en 4. Hoofdstuk 5 begint met de fenomenologische aanpak van wrijving en met drukvalberekeningen, terwijl daarna pas

moleculair transport aan de orde komt. Voor deze omgekeerde volgorde is om vier redenen gekozen:

Allereerst zijn voor (fysisch) technologen drukvalberekeningen over pijpleidingsystemen en gepakte bedden uitermate relevant. Daarin speelt de mechanische-energiebalans een grote rol. Deze balans valt wat buiten de klassieke analogie van impuls-, warmte- en stoftransport; ook de frictiefactor (§ 5.3.1) en het weerstandsgetal van een appendage (§ 5.4) zijn op een heel andere wijze gedefinieerd dan de warmte- of stofoverdrachtscoëfficiënten (in § 3.5 respectievelijk § 4.5), al is in § 5.3.3 voor de frictiefactor de analogie weer hersteld. Met het oog op de ingenieurspraktijk is daarom in dit hoofdstuk begonnen met de technische stromingsleer over drukvallen die aansluit op de behandeling van de mechanische-energiebalans en de Wet van Bernoulli (in § 1.3.3 en de voorbeelden 1.19 en 1.20) en op die van de meesleepkracht (in § 2.3).

Op de tweede plaats is er, afgezien van de analogie met warmte- en stoftransport, geen goede reden om hoofdstuk 5 met moleculair impulstransport te laten beginnen. Het simpelste geval van moleculair impulstransport is laminaire ééndimensionale stroming.<sup>1</sup> Deze is voor de technische stromingsleer over drukvallen niet erg relevant, terwijl bijvoorbeeld moleculair warmtetransport wel van belang is voor de beschrijving van convectief warmtetransport (vanwege de begrippen weerstand tegen warmtetransport en overall warmteoverdrachtscoëfficiënt). Daarom kan de behandeling van moleculair impulstransport ook naar geschoven worden.

Ten derde is er in de hoofdstukken 3 en 4 al op gewezen dat er voor de fenomenologische aanpak van convectieve warmte- en stofoverdracht wel degelijk een exacter alternatief beschikbaar is. In de paragrafen 3.4 en 4.4 zijn immers de algemeen geldige microbalansen leidend tot de transportvergelijkingen voor tijdsafhankelijk driedimensionaal warmte- en stoftransport gepresenteerd op basis van de *cubic volume element methode*. Daarbij is opgemerkt dat het oplossen van deze transportvergelijkingen een even gedetailleerde kennis van het (tijdsafhankelijke driedimensionale) snelheidsveld vergt. De zogenaamde Navier-Stokes-bewegingsvergelijkingen, die de stroming (de impulshuishouding) in een driedimensionaal domein beschrijven, komen in dit hoofdstuk dan nu aan de orde. De behandeling van de Navier-Stokes-vergelijkingen sluit daarmee aan op die van de ééndimensionale stroming in de paragrafen 5.6 en 5.7. Met de behandeling van de Navier-Stokes-vergelijkingen is dan de analogie tussen warmte-, stof- en impulstransport weer in volle glorie aanwezig: de transportvergelijkingen voor impuls ( $3 \times$ ), warmte en stof zien er mathematisch volslagen identiek uit.

Tenslotte: waar de Navier-Stokes-vergelijkingen voor veel klassiek geschoolde fysisch

<sup>1</sup> Laminaire ééndimensionale stromingen komen met name voor in de polymeertechnologie (extrusie, coatingprocessen) en in de levensmiddelenindustrie; kennis van niet-Newtonse vloeistofeigenschappen is daarbij dikwijls van belang. De theorie ervan is daarmee wel belang, maar meer op zichzelf.

technologen een sluitstuk van de theorie en een rariteit vormden, dienen zij thans als het uitgangspunt voor de moderne fysische technologie die zich van numerieke technieken bedient om een beeld te verwerven van de lokale transport- en overdrachtsverschijnselen in procesapparaten. Daarmee kunnen allerlei effecten van geometrie en schaalgrootte op bijvoorbeeld de opbrengst en de selectiviteit van chemische reacties, op de intensiteit en effectiviteit van warmte- en stofoverdracht en op scheidingsprocessen (door variaties in stromingspatronen, verblijftijdspreidingen, contacttijden, etc.) veel beter begrepen en beheerst worden. De gekozen volgorde van behandeling laat dit hoofdstuk eindigen met dit veelbelovende toekomstperspectief.

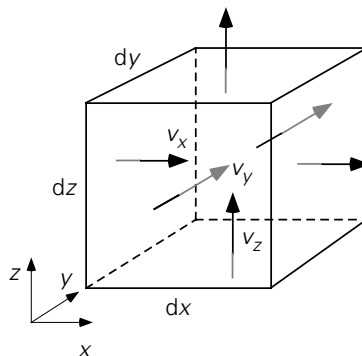
### **Samenvatting**

Er zijn vier overwegingen gegeven waarom in dit hoofdstuk eerst de technische stromingsleer aan de orde is gekomen en daarna pas de laminaire stromingsleer en de bewegingsvergelijkingen worden behandeld. Daarbij duikt telkens de klassieke analogie tussen warmte-, stof en impulstransport op.

#### **5.8.2 De continuïteitsvergelijking**

Alvorens de bovenbedoelde Navier-Stokes-vergelijkingen voor driedimensionaal impulstransport in een stromingsdomein af te leiden, wordt nu eerst de *cubic volume element methode* gebruikt om op basis van een totale-massabalans een vergelijking af te leiden waaraan elk stromingsveld moet voldoen. Wederom zal eenvoudigheidshalve en uitsluitend in een Cartesiaans assenstelsel gewerkt worden (zie figuur 5.28, overigens identiek aan figuur 3.21). Het controlevolume  $dx dy dz$  bevindt zich weer willekeurig ergens in het stromingsveld dat driedimensionaal en tijdsafhankelijk is. Dat betekent dat de drie snelheidscomponenten en de dichtheid  $\rho$  alle een functie zijn van zowel de tijd als de coördinaten  $x$ ,  $y$  en  $z$ .

De microbalans voor de totale massa over het kubusje van figuur 5.28 bevat naast de accumulatieterm



Figuur 5.28.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \, dx dy dz \quad (5.117)$$

uitsluitend de convectieve transporttermen door ieder van de zes vlakken. Zo komt door het linkerzijvlak door convectief transport

$$[\rho v_x]_{x,y,z} \, dy dz \quad (5.118)$$

aan massa naar binnen, en gaat door het rechterzijvlak door convectief transport weer

$$[\rho v_x]_{x+dx,y,z} \, dy dz \quad (5.119)$$

aan massa naar buiten. Netto levert dit een nettobijdrage aan convectief massatransport in de  $x$ -richting van

$$[\rho v_x]_x \, dy dz - [\rho v_x]_{x+dx} \, dy dz = -\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) \, dx dy dz \quad (5.120)$$

Op identieke wijze leveren de convectieve massastromen door de voor- en achtervlakken netto op

$$[\rho v_y]_y \, dx dz - [\rho v_y]_{y+dy} \, dx dz = -\frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) \, dx dy dz \quad (5.121)$$

en door de onder- en bovenvlakken

$$[\rho v_z]_z \, dx dy - [\rho v_z]_{z+dz} \, dx dy = -\frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \, dx dy dz \quad (5.122)$$

Samenvoegen van de termen (5.117), (5.120), (5.121) en (5.122) en delen door de vaste grootte  $dx dy dz$  van het kubusje levert de zogenaamde *continuïteitsvergelijking*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} - \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} - \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \quad (5.123)$$

Deze continuïteitsvergelijking is een rechtstreeks gevolg van het *principe van het behoud van massa*. Dat geldt ook nog steeds als de dichtheid constant is en daardoor (5.123) overgaat in

$$0 = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (5.124)$$

Wat bijvoorbeeld door het linkervlak aan massa binnenkomt en niet door het rechtervlak naar buiten gaat, moet, bij constante dichtheid, wel door één of meer van de andere vlakken naar buiten gaan. Dat geldt op elk moment! Merk op dat in vergelijking (5.124) de dichtheid (de massa) niet meer voorkomt.

### Samenvatting

Met behulp van de cubic volume element methode is op basis van een massabalans de continuïteitsvergelijking afgeleid, waaraan elk snelheidsveld op elk moment moet voldoen: het directe gevolg van de wet van behoud van massa.

### 5.8.3 De Navier-Stokes-vergelijkingen

Voor de afleiding van de algemene microbalansen voor impulstransport, oftewel de Navier-Stokes-vergelijkingen, is het raadzaam weer te werken met het begrip *impulsconcentratie* zoals dat in § 1.4 is ingevoerd: de snelheidscomponent  $v_x$  (in m/s) in de  $x$ -richting is eigenlijk een concentratie van  $x$ -impuls (in Ns/kg). Vandaar ook dat  $\rho v_x$  de impulsconcentratie op volumebasis (in Ns/m<sup>3</sup>) voorstelt.

De feitelijke snelheidsverdelingen, of het snelheidsveld, in een stromingsdomein komen tot stand doordat impuls herverdeeld wordt over het domein door convectieve en moleculaire impulsstromen, terwijl op de massa en op de randen van het domein krachten werken. Wederom wordt de *cubic volume element methode* gebruikt om deze impulshuishouding in kaart te brengen. Vanwege het vectorkarakter van impuls en van krachten dient voor elke richting een aparte impulsbalans voor het kubusje van figuur 5.28 opgesteld te worden. Hieronder wordt alleen de afleiding voor de  $x$ -impulsbalans gepresenteerd. Eerst worden weer de afzonderlijke bijdragen tot deze microbalans geïnventariseerd.

#### Accumulatie

De instationaire term is

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_x \, dx dy dz \quad (5.125)$$

#### Convectief transport

Door het linkerzijvlak stroomt een volumedebiet  $v_x(x,y,z,t) \cdot dy dz$  het kubusje binnen, terwijl de  $x$ -impulsconcentratie in deze stroom  $\rho v_x(x,y,z,t)$  is. In het algemeen staat immers de lokale snelheidsvector niet toevallig loodrecht op het linkerzijvlak. Deze vector wordt ontbonden in zijn componenten in het gekozen assenstelsel; de  $x$ -component van de snelheid brengt als enige door dit linkerzijvlak massa het kubusje in en die massa draagt (o.a.)  $x$ -impuls bij zich. Convectief komt er derhalve door het linkerzijvlak

$$[v_x \rho v_x]_{x,y,z} \, dy dz \quad (5.126)$$

aan  $x$ -impuls het kubusje binnen. Door het rechtervlak verlaat

$$[v_x \rho v_x]_{x+dx,y,z} \, dy dz \quad (5.127)$$

weer het kubusje, waarbij zowel  $v_x$  als  $\rho v_x$  rechts andere waarden hebben dan links. Netto leveren deze stromen in de  $x$ -richting een bijdrage van

$$[v_x \rho v_x]_{x,y,z} \, dy dz - [v_x \rho v_x]_{x+dx,y,z} \, dy dz = - \frac{\partial}{\partial x} (v_x \rho v_x) \, dx dy dz \quad (5.128)$$

aan de accumulatie van  $x$ -impuls in het kubusje. Op soortgelijke wijze brengt de  $y$ -component van de snelheid aan de voorzijde van het kubusje massa naar binnen die

(o.a.)  $x$ -impuls bij zich draagt:

$$[v_y \rho v_x]_{x,y,z} dx dz \quad (5.129)$$

Samen met een dergelijke term aan de achterzijde van het kubusje wordt zo de netto-bijdrage van het convectief transport in de  $y$ -richting aan de accumulatie van de  $x$ -impuls verkregen:

$$[v_y \rho v_x]_y dx dz - [v_y \rho v_x]_{y+dy} dx dz = -\frac{\partial}{\partial y} (v_y \rho v_x) dx dy dz \quad (5.130)$$

De nettobijdrage door onder- en bovenvlak luidt analoog

$$[v_z \rho v_x]_z dx dy - [v_z \rho v_x]_{z+dz} dx dy = -\frac{\partial}{\partial z} (v_z \rho v_x) dx dy dz \quad (5.131)$$

### Moleculair transport

Mits de wet van Newton geldt, kan voor de moleculaire  $x$ -impulsstroom door het voorvlak geschreven worden

$$\left(-\mu \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{x,y,z} dx dz \quad (5.132)$$

en door het achtervlak

$$\left(-\mu \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{x,y+dy,z} dx dz \quad (5.133)$$

zodat een nettobijdrage van het moleculaire transport van  $x$ -impuls in de  $y$ -richting aan de accumulatie resulteert van

$$\left[-\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{x,y,z} dx dz\right] - \left[-\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{x,y+dy,z} dx dz\right] = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) dx dy dz \quad (5.134)$$

De linker- en rechtervlakken dragen bij tot een nettobijdrage aan de accumulatie ter grootte van

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}\right) dx dy dz \quad (5.135)$$

Hierbij moet aangetekend worden dat het hierbij gaat om *moleculair* transport van  $x$ -impuls aan ieder van de twee vlakken dat samenhangt met de lokale waarden van de snelheidsgradiënt  $\partial v_x / \partial x$ . Deze gradiënt drukt uit of gemiddeld gesproken moleculen in de  $x$ -richting *versnellen* of *vertragen*, terwijl  $\mu \partial v_x / \partial x$  dan een maat is voor de lokale netto-overdracht van  $x$ -impuls door botsingen van *individuele* moleculen *gegeven die gemiddelde versnelling of vertraging*. Links en rechts is deze netto-overdracht verschillend en daaruit resulteert de bijdrage (5.135).

Moleculair transport van  $x$ -impuls in de  $z$ -richting aan onder- en bovenkant resulteert in

de nettobijdrage

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (5.136)$$

In bovenstaande afleidingen van de moleculaire transporttermen is aangenomen dat aan elk vlak van een kubusje er of alleen een schuifspanning of alleen een normaalspanning heerst waarvoor de wet van Newton geldt. Deze voorstelling is feitelijk niet correct, miskent het gelijktijdig optreden en de onderlinge samenhang van schuif- en normaalspanningen in ieder vervormend fluïdum-elementje en staat op gespannen voet met een aantal fysische wetmatigheden. Het uiteindelijke resultaat, vergelijking (5.139), is evenwel correct. Voor de fysisch juiste afleiding, die gebruik maakt van een lineair verband tussen spanningen in een fluïdum en vervormingssnelheden van fluïdum-elementjes, wordt de lezer verwezen naar paragraaf 6.1 in het boek *Fundamentals of Fluid Mechanics* van B.R. Munson, D.F. Young en Th.H. Okiishi (Wiley, 1994).

#### *Productie*

Productie van  $x$ -impuls geschiedt door de  $x$ -componenten van alle krachten die op het kubusje werken. Wat de druk betreft: in de  $x$ -richting werkt die alleen op de linker- en rechterzijvlakken van het kubusje. Netto resulteert

$$p \Big|_x dy dz - p \Big|_{x+dx} dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \quad (5.137)$$

Tenslotte werkt de  $x$ -component  $g_x$  (in Ns/kg) van de zwaartekracht op de massa in het kubusje:

$$g_x \rho dx dy dz \quad (5.138)$$

Daarmee is de zwaartekracht een typisch voorbeeld van een ‘*body force*’, waar de druk (in N/m<sup>2</sup>) op een vlak werkt.

#### *De bewegingsvergelijkingen*

Samenvoegen van de termen (5.125), (5.128), (5.130) en (5.131) met (5.134) - (5.138) en delen door  $dx dy dz$  levert de  $x$ -impulsbalans.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_x}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial x} (v_x \rho v_x) - \frac{\partial}{\partial y} (v_y \rho v_x) - \frac{\partial}{\partial z} (v_z \rho v_x) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \\ & - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \end{aligned} \quad (5.139)$$

Overigens kan de  $x$ -impulsbalans ook afgeleid worden in termen van schuifspanningen en is dan ook geldig voor niet-Newtonse fluïda. In die afleiding komen dan geen moleculaire transporttermen voor van de vorm (5.132), maar dienen onder het hoofdje *Productie* de schuifspanningskrachten op de zes vlakken opgenomen te worden. Zo

stroomt er fluïdum in de  $x$ -richting buiten langs het voorvlak van het kubusje van figuur 5.28; dit fluïdum oefent door een schuifspanning als gevolg van een zekere snelheidsgradiënt  $\partial v_x/\partial y$  een kracht

$$\tau_{yx} \Big|_{x,y,z} dx dz \quad (5.140)$$

uit op het fluïdum in het kubusje. Een soortgelijke kracht in de  $x$ -richting is er aan de achterkant ten gevolge van het fluïdum dat daar aan de buitenkant langs het kubusje stroomt:

$$-\tau_{yx} \Big|_{x,y+dy,z} dx dz \quad (5.141)$$

Tezamen geven deze twee krachten in de  $x$ -richting de nettokracht

$$-\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz \quad (5.142)$$

op het kubusje. Aan de andere vier vlakken werken soortgelijke krachten in de  $x$ -richting met de nettobijdragen

$$-\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx dy dz \quad (5.143)$$

en

$$-\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz \quad (5.144)$$

aan de  $x$ -impulsbalans en wel ten gevolge van variaties in de lokale waarden van de snelheidsgradiënten  $\partial v_x/\partial x$  en  $\partial v_x/\partial z$ .

Samenvoegen van de bijdragen (5.125), (5.128), (5.130), (5.131), (5.137) en (5.138) met (5.142) - (5.144) en delen door  $dx dy dz$  levert

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_x}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x} (v_x \rho v_x) - \frac{\partial}{\partial y} (v_y \rho v_x) - \frac{\partial}{\partial z} (v_z \rho v_x) + \\ & -\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \end{aligned} \quad (5.145)$$

Veelal wordt de  $x$ -impulsbalans in een andere vorm gepresenteerd. Daartoe wordt het linkerlid van de vergelijkingen (5.139) en (5.145) uitgeschreven tot

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5.146)$$

Zo wordt ook de tweede convectieve term aan de rechterkant van de vergelijkingen (5.139) en (5.145) uitgewerkt tot

$$\rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_x \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} \quad (5.147)$$

Door zulks ook te doen met de twee overige convectieve termen ontstaan ter rechterzijde van (5.139) en (5.145) zes termen. Drie daarvan vallen, dankzij de *continuïteitsvergelijking* (5.123), weg tegen de tweede term van (5.146). Daardoor kan vergelijking (5.139) geschreven worden als

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= \\ &= \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \end{aligned} \quad (5.148)$$

waarin nu bovendien  $\mu$  constant is verondersteld.

Voor de twee overige snelheidscomponenten kunnen soortgelijke vergelijkingen afgeleid worden:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= \\ &= \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \end{aligned} \quad (5.149)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \\ &= \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \end{aligned} \quad (5.150)$$

Deze set bewegingsvergelijkingen (5.148) - (5.150) is vernoemd naar Navier (1785-1836) en Stokes (1819-1903). In vectornotatie luidt de set

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (5.151)$$

In termen van schuifspanningen (voortbordurend op vergelijking (5.145) wordt gevonden:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (5.152)$$

Voor stromingen waarin viskeuze effecten kunnen worden verwaarloosd, geldt de Euler-vergelijking:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (5.153)$$

Het valt buiten de scope van dit boek de vorm van deze stelsels vergelijkingen weer te geven in het geval van cilinder- of bolcoördinaten. Hiervoor wordt verwezen naar Bird, Stewart & Lightfoot.

De stelsels (5.151), (5.152) en (5.153) gelden zeer algemeen voor tijdsafhankelijke driedimensionale stromingen. Een vergelijking voor een simpeler type stroming, zoals bijvoorbeeld behandeld in § 5.6, kan gemakkelijk uit een algemeen stelsel geëxtraheerd

worden. Zo kan vergelijking (5.76) voor tijdsafhankelijke, ééndimensionale, verticale, incompressibele stroming van een laag met uniforme dikte verkregen worden uit stelsel (5.152) door de volgende aannamen:

$$v_x = 0, \quad v_z = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad g_x = g_z = 0, \quad g_y = g,$$

alle drukgradiënten nul en alle schuifspanningen nul behalve  $\tau_{xy}$ .

Overigens kan, op soortgelijke wijze als bij de omschrijving van vergelijking (5.139) naar eindresultaat (5.148), namelijk met behulp van de continuïteitsvergelijking (5.123), ook de warmtetransportvergelijking (3.114) herschreven worden tot

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial c_p T}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial c_p T}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial c_p T}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial c_p T}{\partial z} = \\ = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q \end{aligned} \quad (5.154)$$

Op identieke wijze volgt uit vergelijking (4.59) als eindresultaat

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} = \mathbb{D} \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) + r \quad (5.155)$$

Opgemerkt kan worden dat in vergelijking (5.154) de combinatie  $c_p T$  de eenheid J/kg heeft en dus als *energieconcentratie* opgevat kan worden, zoals eerder betoogd. Tenslotte gaat vergelijking (5.154) voor constante  $c_p$  over in

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q}{\rho c_p} \quad (5.156)$$

Ga zelf na hoe bijvoorbeeld vergelijking (3.54) uit vergelijking (5.156) verkregen kan worden.

De vergelijkingen (5.148) - (5.150), (5.154) en (5.155) illustreren in hun vorm op perfecte wijze de analogie tussen impuls-, warmte- en stoftransport. Tezamen met continuïteitsvergelijking (5.123) is zo een stelsel van zes partiële differentiaalvergelijkingen beschikbaar, waaruit in principe, met voldoende rand- en beginvoorwaarden, de ruimtelijke verdelingen van snelheden, druk, temperatuur en een componentconcentratie als functie van de tijd berekend kunnen worden. Dit stelsel van zes differentiaalvergelijkingen is onderling sterk gekoppeld en is dankzij de convectietermen ook sterk niet-lineair.

### Samenvatting

Met behulp van de *cubic volume element methode* is voor de  $x$ -impuls geïllustreerd hoe de Navier-Stokes-vergelijkingen worden afgeleid: aan alle vlakken van een kubusje moeten zowel convectieve als moleculaire transporttermen geformuleerd worden; voorts dienen alle relevante krachten in ogenschouw te worden genomen. De moleculaire

transporttermen kunnen ook als schuifspanningen verantwoord worden. De continuïteitsvergelijking kan worden gebruikt om de impulsbalansen te herschrijven; hetzelfde geldt voor de warmte- en componenttransportvergelijkingen. De klassieke analogie tussen impuls-, warmte- en stoftransport blijkt uit de onderlinge gelijkheid van de verschillende transportvergelijkingen. Tenslotte kunnen uit de algemene transportvergelijkingen de specifieke vergelijkingen voor specifieke simpele gevallen worden verkregen door weglating van de niet-relevante termen.

#### **5.8.4 Computational Fluid Dynamics**

Stelsels als (5.148) - (5.150), (5.154), (5.155), (5.123) vormen de basis van wat thans 'Computational Fluid Dynamics' (CFD) is gaan heten. De moderne fysische technologie bedient zich van CFD ten einde op basis van informatie over *lokale* variabelen (snelheden, druk, temperatuur, concentraties) te komen tot bijvoorbeeld betere beschrijvingen en ontwerpen van procesapparaten. De stand van de computertechniek laat het in toenemende mate toe de fenomenologische benadering van transportverschijnselen te vervangen door CFD-simulaties. Toch is er niets nieuws onder de zon: het blijft gaan om de concepten, de wetten en de techniek van balansen opstellen als behandeld in de hoofdstukken 1 en 2.

De bedoelde stelsels transportvergelijkingen zijn alle afgeleid aan de hand van een klein typisch kubusje (figuur 5.28). De afmetingen daarvan zijn niet nader gespecificeerd; die moeten bij voorkeur wel klein zijn ten opzichte van de afmetingen van het stromingsdomein (het apparaat) om inderdaad op lokale waarden van de variabelen uit te komen. Absolute ondergrens voor de afmetingen van het kubusje is de vrije weglengte van de moleculen: wordt die benaderd, dan verliezen continuïteitsbegrippen als gemiddelde snelheid en convectief transport hun betekenis. Zolang dat niet het geval is, mogen de snelheden, de temperatuur en de concentraties die in de *cubic volume element* methode aan een kubusje worden toegekend, opgevat worden als puntgrootheden op de plaats van het centrum van het kubusje.

Voor CFD-berekingen volgens de *eindige-volumemethode* wordt het stromingsdomein dan ook opgedeeld in een zeer groot aantal kleine volume-elementjes (kubusjes in een Cartesiaans assenstelsel). Het aantal 'cellen' wordt in de praktijk aan de onderkant begrensd door de gewenste mate van detaillering (resolutie), met name daar waar steile gradiënten in de variabelen verwacht mogen worden, en aan de bovenkant door de grootte en snelheid van de computer.

Over elk van de volume-elementjes worden massa-, impuls-, warmte- en/of componentmassabalansen opgesteld. Dat is equivalent aan het oplossen van bijvoorbeeld het stelsel (5.123), (5.148) - (5.150), (5.154) en (5.155) in de roosterpunten in het hart van alle cellen. Alle termen met afgeleiden in de balansjes over de cellen (de microbalansen) worden gediscretiseerd met behulp van de puntgrootheden in de naburige

roosterpunten; daarvoor zijn een groot aantal differentieschema's beschikbaar. Daarmee gaan de partiële differentiaalvergelijkingen over in algebraïsche vergelijkingen en worden de waarden van de variabelen in naburige punten aan elkaar geknoopt. Elke cel levert zoveel algebraïsche vergelijkingen als er balansjes voor die cel opgezet zijn. Voor het gehele stromingsdomein met zijn vele cellen betekent dit een zeer groot aantal algebraïsche vergelijkingen die simultaan, in feite iteratief, moeten worden opgelost. Daartoe is weer keuze uit een veelheid van oplosmethoden. De iteraties worden voortgezet tot overal in het domein, met een tevoren gekozen nauwkeurigheid, aan alle microbalansen wordt voldaan.

Vervolgens moet evenwel hier herhaald worden dat de meeste stromingen (zowel in procesapparaten als in de natuur) *turbulent* zijn. Het rooster waarop de stroming dan berekend zou moeten worden, moet dan fijn genoeg zijn om ook de kleinste wervels inderdaad zichtbaar te laten worden. De stand van de computertechniek laat dit voor hogere Reynolds-getallen nog niet toe. (De kleinste wervels worden kleiner met toenemend Reynolds-getal.) Bovendien zijn de meeste technologen ook weer niet geïnteresseerd in het momentane snelheidsveld inclusief alle wervels. Doorgaans is kennis van gemiddelde grootheden en de variaties daarin over het stromingsdomein ruim voldoende.

Dat betekent dat gerekend wordt op een grover rooster en dat het *impulstransport* door de *wervels* gemodelleerd wordt als een aparte bijdrage aan de impulshuishouding op een schaal tussen het convectieve transport door de (gemiddelde) stroming en het moleculaire transport in. Alle wervels individueel en bij elkaar transporteren (door convectie) tijdens hun bestaan o.a. impuls (zie ook § 3.5.2). Dit turbulente impuls-transport kan in een groot aantal gevallen met voldoende succes gemodelleerd worden in termen van twee kernbegrippen uit de turbulenteleer:

- de concentratie van *turbulente kinetische energie*, aangeduid met  $k$  en met de eenheid  $\text{m}^2/\text{s}^2$  ofwel  $\text{J}/\text{kg}$ : een maat voor de grootte en sterkte van alle momentane snelheidsfluctuaties als resultaat van het gehele spectrum van turbulente wervels; en
- de *snelheid*  $\varepsilon$  waarmee  $k$  in de kleinste werveltjes (de zgn. *Kolmogorov-wervels*) gedissipeerd wordt in warmte door de werking van de viscositeit; daarmee heeft  $\varepsilon$  de eenheid  $\text{m}^2/\text{s}^3$  ofwel  $\text{W}/\text{kg}$ . Het beeld dat bij  $\varepsilon$  past, is dat van het aantal kleinste werveltjes waarin de *energiedissipatie* plaatsvindt.

Zowel  $k$  als  $\varepsilon$  kunnen kennelijk als concentraties worden opgevat; voorts blijken beide variabelen behoorlijk te kunnen variëren over een stromingsdomein. Daarom is het, met het oog op het lokale impulstransport door wervels, meestal gewenst ook  $k$  en  $\varepsilon$  te berekenen. Voor beide variabelen kunnen ook weer transportvergelijkingen afgeleid worden, die in feite weer staan voor microbalansen voor  $k$  en  $\varepsilon$  en die qua vorm (aantal en soort termen) sterke gelijkenis vertonen met de Navier-Stokes-vergelijkingen. Wel

moet erop gewezen worden dat  $k$  en  $\varepsilon$  weer *geen behouden grootheden* zijn (zie ook de discussie in § 1.3.3). Een en ander betekent dat in deze benadering van turbulente systemen het aantal transportvergelijkingen dat opgelost moet worden, nog groter is dan voor laminaire stromingen.

Als de klassieke fysische technologie, die fenomenologische concepten als stof- en warmteoverdrachtscoëfficiënten hanteert, vergeleken wordt met de moderne, op CFD gebaseerde fysische technologie, dan valt op dat

- beide sterk leunen op het opstellen van balansen;
- beide dezelfde concepten en wetten hanteren;
- de fenomenologische aanpak heel snel tot een vrij nauwkeurig eindresultaat leidt en in het verleden tot grote successen heeft geleid;
- CFD veel meer gedetailleerde informatie oplevert en daardoor een grote belofte voor de toekomst inhoudt;
- voor CFD een nadere scholing in stromingsleer (inclusief turbulentie) en numerieke wiskunde wenselijk is.

Opgemerkt moet worden dat de huidige stand van de CFD-techniek met name voor turbulente stromingen nog zeker experimentele verificatie van de simulatieresultaten vergt. Mede daarom zullen zeker voorlopig nog de fenomenologische benadering van fysische transportverschijnselen en CFD-simulaties als waardevolle, complementaire technieken naast elkaar blijven bestaan.

### **Samenvatting**

Het principe van Computational Fluid Dynamics (CFD) gebaseerd op de algemene transportvergelijkingen (microbalansen) voor impuls, warmte en massa, is geschetst. De procedure van oplossen als gevolgd in de eindige-volumemethode is kort aangestipt. Voor turbulente stromingen is het gebruik toegelicht van twee nieuwe variabelen, namelijk de turbulente kinetische energie  $k$  en de dissipatie  $\varepsilon$  daarvan. Met behulp daarvan wordt impulstransport door de wervels van het turbulente snelheidsveld gemodelleerd. Als eindoordeel is gegeven dat simulaties met behulp van CFD een welkome en veelbelovende uitbreiding zijn van het instrumentarium van de fysische technologie.