

# Vraagstukken over Mechanica

verzameld door drs. R. Roest

**© VSSD**

Eerste druk 1986

Zesde druk 2002

DUP Blue Print is een imprint van:

Delft University Press

P.O. Box 98, 2600 MG Delft, The Netherlands

tel. +31 15 27 85678, telefax +31 15 27 85706, e-mail [info@library.tudelft.nl](mailto:info@library.tudelft.nl)internet: <http://www.library.tudelft.nl/dup>

Uitgegeven in opdracht van:

Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft

Poortlandplein 6, 2628 BM Delft, The Netherlands

tel. +31 15 27 82124, telefax +31 15 27 87585, e-mail: [hlf@vssd.nl](mailto:hlf@vssd.nl)internet: <http://www.vssd.nl/hlf>URL over dit boek: **<http://www.vssd.nl/hlf/c002.htm>**

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

*All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.*

Printed in The Netherlands.

ISBN 90-407-1292-1

NUGI 812

*Trefw::* mechanica

# Voorwoord

Deze verzameling vraagstukken kan gezien worden als de opvolger van het gelijknamige vraagstukboekje, samengesteld door drs. A.N. Borghouts en eerder door de Delftse Uitgevers Maatschappij uitgegeven. Menig vraagstuk in deze verzameling zal de vaste gebruiker dan ook bekend voorkomen, ook al is aan de redactie hier en daar wel wat veranderd.

Daarnaast is een dankbaar gebruik gemaakt van vraagstukken die de laatste jaren aan de Afdeling Technische Natuurkunde van de TH Delft zijn bedacht ten behoeve van de diverse mechanica-tentamens. Voorts is getracht de vraagstukken in een wat handzamere volgorde te rangschikken.

Het oplossen van vraagstukken is (althans wat de mechanica betreft) nog altijd een geschikte methode om nieuw verworven kennis in te slijpen en te toetsen. Ook déze verzameling is vooral bedoeld voor eerstejaars-studenten natuurkunde, wiskunde, elektrotechniek, en scheikundige technologie.

Een woord van advies aan de studenten is hier op zijn plaats: het is beter een beperkt aantal vraagstukken uit te kiezen en deze grondig te bekijken, dan te proberen een groot aantal vluchtig door te zien. De theorie komt op de eerste plaats; de vraagstukken zijn slechts ter oefening. Het omgekeerde zou zeker onjuist zijn!

Ten slotte nodig ik alle gebruikers gaarne uit deze verzameling kritisch te bezien. Commentaar gericht aan de uitgever of aan mij, is altijd welkom. Moge dit boekje velen tot steun zijn bij de studie van de mechanica.

Voorburg, februari 1986

R. Roest

## *Bij de vijfde druk*

De nummering zoals die voor het eerst in de vierde druk is toegepast is niet gewijzigd. Het eerste nummer van elk vraagstuk verwijst dus naar het betreffende hoofdstuk van het theorieboek.

Van sommige vraagstukken is de tekst herzien. Waar dit het geval is, is de toevoeging 'nieuwe tekst' vermeld.

Enkele nieuwe vraagstukken zijn toegevoegd, met name de nummers 12.10 tot en met 12.15.

Voorburg, januari 1996

R. Roest

*Bij de omslag:*

**De baan van ISEE-3 (International Sun-Earth Explorer) tussen juni 1982 en april 1985**

Deze ruimtesonde was in augustus 1978 gelanceerd voor onderzoek aan de zonnwind en de wisselwerking daarvan met de aarde. Op 10 juni 1982 bevond zij zich nabij het punt waar de aantrekkingskracht van zon en aarde elkaar opheffen. Met behulp van de aanwezige stuurraketjes werd de koers zodanig gecorrigeerd dat, beurtelings gebruik makend van de aantrekkingskracht van de aarde en van de maan, het ruimtevaartuig uiteindelijk (ten koste van bijzonder weinig brandstof) op weg was naar de komeet Giacobini-Zinner. Bij die gelegenheid werd de naam van de sonde veranderd in ICE (International Cometary Explorer).

Op 11 september 1985 schoot ICE door de gasstaart van de komeet Giacobini-Zinner en was daarmee de eerste ruimtesonde die gebruikt is voor onderzoek aan een komeet.

De cirkel in de tekening is de baan van de maan ten opzichte van de aarde, de zon staat ver links onder de tekening. Bron van de tekening is het tijdschrift *Zenit* van september 1985, uitgave Stichting De Koepel te Utrecht; het origineel was getekend door Govert Schilling.

# Inhoud

|  |    |
|--|----|
| Voorwoord  | 3  |
| Inhoud   | 5  |
| Eenheden, reeksen, benaderingen                                    | 6  |
| <b>1.</b> Inleiding  | 9  |
| <b>2.</b> Kinematica van puntvormige lichamen                      | 10 |
| <b>3.</b> De grondwetten van de dynamica                           | 14 |
| <b>4.</b> Dynamica van een puntmassa                               | 15 |
| <b>5.</b> Arbeid, energie, impuls, impulsmoment                    | 21 |
| Arbeid en energie  | 21 |
| Krachtstoot en impuls  | 24 |
| Krachtmoment en impulsmoment; perkenwet                            | 26 |
| <b>6.</b> Twee-deeltjes systemen; botsingen                        | 31 |
| Botsingen  | 32 |
| Impulsmoment van een twee-deeltjes systeem                         | 35 |
| <b>7.</b> Dynamica van een verzameling puntmassa's                 | 37 |
| <b>8.</b> Starre lichamen; rotatie van een lichaam om een vaste as | 38 |
| Fysische slingers  | 42 |
| <b>9.</b> Vlakke dynamica van een star lichaam                     | 44 |
| <b>10.</b> Relatieve beweging en traagheidskrachten                | 54 |
| <b>11.</b> Niet-gebalanceerde systemen                             | 59 |
| <b>12.</b> Het omgekeerd kwadratisch centrale krachtveld           | 65 |
| <b>13.</b> Trillingen  | 72 |
| <b>14.</b> Lineaire deformaties                                    | 77 |
| <b>15.</b> Vloeistofmechanica                                      | 79 |
| Hydrostatica   | 79 |
| Mechanica van wrijvingsloze fluïda                                 | 80 |
| Mechanica van newtonse fluïda                                      | 83 |
| <b>16.</b> Oppervlakteverschijnselen bij vloeistoffen              | 85 |
| <b>17.</b> Mechanische aspecten van de relativiteitstheorie        | 87 |
| Antwoorden   | 88 |

# Eenheden, reeksen, benaderingen

De versnelling bij vrije val aan het aardoppervlak (symbool  $g$ ) wordt in alle vraagstukken (voorzover niet anders aangegeven) gelijk gesteld aan  $10 \text{ m/s}^2$ .

In alle opgaven worden uitsluitend SI-eenheden gebruikt.

## Reeksen

$$\sum_0^N n = \frac{1}{2} N(N+1) \quad \text{voor } n \in \text{IN.}$$

$$\sum_0^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{mits } |x| < 1.$$

*Taylor*  $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x_0) + \dots$

*McLaurin*  $f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots$

Binomiaal-reeksontwikkeling:

$$(1 + \varepsilon)^n = A + B\varepsilon + C\varepsilon^2 + \dots$$

waarin  $A = \binom{n}{0} = 1$ ,  $B = \binom{n}{1} = n$ ,  $C = \binom{n}{2} = \frac{1}{2} n(n-1)$ , i.h.a.  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

In eerste orde benadering is (voor  $|x| \ll 1$ ):

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x \\ \ln(1+x) &= x \\ \sin x &= x \\ \cos x &= 1 \\ \text{tg } x &= x \\ (1+x)^n &= 1 + nx \quad \text{voor elke } n \in \text{IR.} \end{aligned}$$

In tweede orde benadering is (voor  $|x| \ll 1$ ):

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2.$$

*Het Griekse alfabet*

|       |   |         |       |   |          |
|-------|---|---------|-------|---|----------|
| α     | A | alfa    | ν     | N | nu       |
| β     | B | bèta    | ξ     | Ξ | xi       |
| γ     | Γ | gamma   | ο     | Ο | o-mikron |
| δ     | Δ | delta   | π     | Π | pi       |
| ε     | E | epsilon | ρ     | Ρ | rho      |
| ζ     | Z | zêta    | σ     | Σ | sigma    |
| η     | H | êta     | τ     | Τ | tau      |
| θ (θ) | Θ | thêta   | υ     | Υ | u-psilon |
| ι     | I | iota    | φ (φ) | Φ | fi       |
| κ     | K | kappa   | χ     | Χ | chi      |
| λ     | Λ | labda   | ψ     | Ψ | psi      |
| μ     | M | mu      | ω     | Ω | o-mega   |



# 1. Inleiding

**1.1.** Voor de luchtweerstand  $F_w$  die een auto tijdens het rijden ondervindt geldt de formule:  $F_w = C_w \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot S$ .

Hierin is  $S$  de oppervlakte van de grootste dwarsdoorsnede van de auto;  $v$  is zijn snelheid t.o.v. de omringende lucht;  $\rho$  is de massadichtheid van die lucht;  $C_w$  is de bekende 'C<sub>w</sub>-waarde' die kleiner is naarmate de auto beter gestroomlijnd is. Ga na wat de dimensie is van  $C_w$ .

**1.2.** De viscositeit (taaiheid) van een vloeistof wordt aangeduid met het symbool  $\eta$ . De S.I.-eenheid voor viscositeit is:  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Een heel klein bolletje (straal  $r$ ) dat langzaam valt (bijvoorbeeld een mistdruppeltje in de lucht of een fietskogeltje in een met glycerol gevuld glas) ondervindt een weerstandskracht  $F_w$  die groter is naarmate  $\eta$ ,  $r$  en/of de valsnelheid groter zijn. We schrijven daarom:  $F_w = C \cdot \eta^\alpha \cdot r^\beta \cdot v^\gamma$  waarin  $C$  een dimensieloze constante is, terwijl de exponenten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  uiteraard ook dimensieloos zijn. Zoek, met behulp van dimensie-analyse, uit hoe groot  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  zijn.

**1.3.** Van een punt  $P$  zijn de cartesische coördinaten:  $x = 3,0$ ;  $y = 4,0$ ;  $z = 12,0$  (meter).

Bereken de bol-coördinaten  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$ .

**1.4.** Van een punt  $P$  zijn de cilinder-coördinaten:  $\rho = 5,0$  (m);  $\varphi = 4,0$  (rad);  $z = 1,0$  (m).

Bereken de cartesische coördinaten  $x$  en  $y$ .

## 2. Kinematica van puntvormige lichamen

**2.1.** Een puntmassa beweegt langs een rechte lijn ( $x$ -as). Zijn versnelling is:  $\ddot{x} = 3 - 2t$  ( $\text{m/s}^2$ ). Op tijdstip  $t = 0$  passeert het deeltje de oorsprong met snelheid  $\dot{x} = 4$   $\text{m/s}$ .

- Bereken  $\dot{x}$  als functie van de tijd; schets het diagram van  $\dot{x}$  tegen  $t$ .
- Bereken  $x$  als functie van de tijd. Wat is de maximale waarde van  $x$  sinds  $t = 0$ ?
- Wanneer passeert het deeltje opnieuw de oorsprong?

**2.2.** Op een deeltje werkt langs een rechte lijn een periodieke kracht, die het de versnelling  $\ddot{x} = 3 \sin(\frac{1}{2} \pi t)$   $\text{m/s}^2$  geeft. Op tijdstip  $t = 0$  is  $x = 0$  en  $v = 0$ . Bereken de plaats van het deeltje als functie van de tijd. (Voorbeeld: een elektrisch geladen deeltje tussen de platen van een condensator die op een wisselspanning is aangesloten.)

**2.3.** Een deeltje beweegt langs een rechte lijn ( $x$ -as). Op  $t = 0$  bevindt het zich in  $x = 0$  en heeft dan de snelheid  $v_x = v_0 > 0$ . Er werkt een vertragende kracht op die evenredig is met de snelheid, zodat  $a_x = -bv_x$ , waarin  $b > 0$ .

- De differentiaalvergelijking (D.V.) waaraan  $v_x$  moet voldoen, luidt dus:

$\frac{dv_x}{dt} + bv_x = 0$ . De oplossing van deze D.V. is van de vorm  $v_x = Ae^{Bt}$ . Bewijs dat  $B = -b$  en dat  $A = v_0$ .

- Bereken de plaats  $x$  als functie van de tijd  $t$ .
- Pas na oneindig lange tijd zou de snelheid geheel nul geworden zijn. De afgelegde weg zou dan toch niet oneindig lang zijn! Bereken, hoe lang die weg zou zijn.

**2.4.** Een deeltje beweegt langs een rechte lijn ( $x$ -as). Op  $t = 0$  bevindt het zich in  $x = 0$  en heeft dan de snelheid  $v_x = v_0 > 0$ . Er werkt een vertragende kracht op die van de snelheid afhangt (bijvoorbeeld een wrijvingskracht); daardoor ondervindt het deeltje een versnelling  $a_x = -bv_x^2$  waarin  $b > 0$ .

- De differentiaalvergelijking (D.V.) waaraan  $v_x$  moet voldoen, luidt dus:

$\frac{dv_x}{dt} + bv_x^2 = 0$ . De oplossing van deze D.V. is van de vorm  $v_x = \frac{A}{t+B}$ . Bewijs dat  $A = \frac{1}{b}$  en dat  $B = \frac{1}{bv_0}$ .

- Bereken de plaats  $x$  als functie van de tijd  $t$ .

**2.5.** Twee auto's A en B rijden in dezelfde richting achter elkaar aan, B voorop. De snelheden zijn  $\vec{v}_A$  en  $\vec{v}_B$  waarbij  $v_A > v_B$ . Als de auto's nog op een afstand  $d$  van

elkaar af zijn, gaat de bestuurder van A remmen; de remvertraging heeft de constante waarde  $a$ . Bewijs dat een botsing onvermijdelijk is indien  $v_A - v_B > \sqrt{2ad}$ .

**2.6.** Plaats B ligt ten noorden van plaats A. Een vliegtuig heeft de opdracht in rechte lijn van A naar B en weer terug te vliegen. De afstand tussen A en B is  $\ell$ . De snelheid van het vliegtuig ten opzichte van de omringende lucht is  $\vec{v}$ ; de windsnelheid is  $\vec{v}'$ .

a. Toon aan dat de benodigde tijd (voor de retourvlucht), in het geval dat de wind een westenwind is, gelijk is aan:

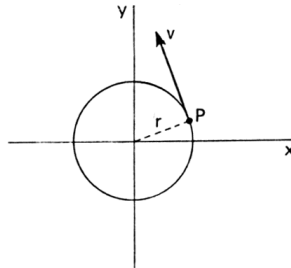
$$\frac{2\ell}{v} \left( 1 - \frac{v'^2}{v^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

b. Toon aan dat de benodigde tijd, in het geval dat de wind uit het noorden komt, gelijk is aan:

$$\frac{2\ell}{v} \left( 1 - \frac{v'^2}{v^2} \right)^{-1}.$$

c. In welk geval duurt de reis langer, bij westenwind of bij noordenwind?

**2.7.** Een puntmassa P voert een eenparige cirkelbeweging uit. De straal van de cirkel is  $r$ . Op tijdstip  $t = 0$  was  $x = r$  en  $y = 0$ :



De hoeksnelheid is  $\omega$ .

a. Geef  $x(t)$  en  $y(t)$  van P.

b. Geef  $v_x(t)$  en  $v_y(t)$  van P en ga na dat  $\vec{v} \perp \vec{r}$ .

c. Geef  $a_x(t)$  en  $a_y(t)$  van P en ga na dat  $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$ .

**2.8.** Een vliegwiel (diameter 3 m) heeft een hoeksnelheid die gelijkmatig afneemt van 100 toeren per minuut op  $t = 0$  tot nul op  $t = 4$  s.

Bereken de tangentiële en de normale versnelling van een punt op de omtrek op  $t = 2$  s.

**2.9.** Een deeltje beweegt langs een cirkel, 'tegen de wijzers van de klok in'. De straal van de cirkel is 25 m.

Op het tijdstip  $t$  is de lengte van de afgelegde boog  $\ell$  vanaf een vast punt van de cirkel:  $\ell = 5t^2 - 5t$ .

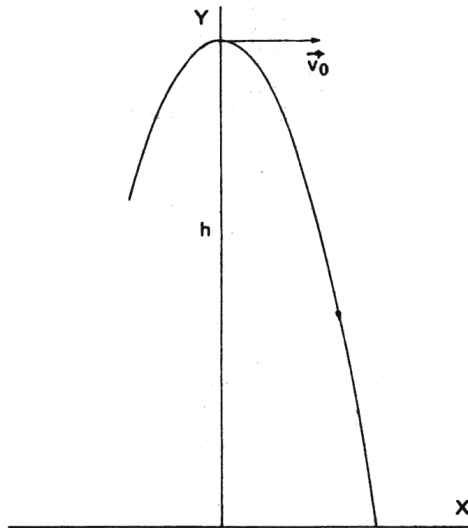
Bereken de snelheid, hoeksnelheid, hoekversnelling en de grootte van de versnelling op het tijdstip  $t = 2$  s. Bereken ook de hoek tussen de versnelling en de momentane voerstraal van het deeltje op dat tijdstip.

**2.10.** De coördinaten van een in een plat vlak bewegende puntmassa zijn:  $x = 2 \sin \omega t$  en  $y = 2 \cos \omega t$ . Hierin is  $\omega$  een constante.

- Wat is de baan-vergelijking?
- Bereken de grootte van de snelheid als functie van de tijd.
- Bereken  $a_{\text{tan}}$  en  $a_n$  als functie van de tijd.
- Wat voor beweging is hier beschreven?

**2.11.** Een bal (puntmassa) wordt schuin omhoog geworpen. Verwaarloos de luchtweerstand. Het ogenblik waarop hij het hoogste punt passeert noemen we  $t = 0$ . De hoogte boven de grond is dan  $h = 30$  m; zijn snelheid is dan  $v_0 = 4$  m/s. In de figuur is de baan getekend en is een coördinatenstelsel aangebracht. De plaatsvector op  $t = 0$  is in dit coördinatenstelsel:

$\vec{r}_0 = (0; 30\text{m})$ , de snelheidsvector op  $t = 0$  is  $\vec{v}_0 = (4 \text{ m/s}; 0)$ .



- Geef plaats- en snelheidsvector ( $\vec{r}_1$  en  $\vec{v}_1$ ) op tijdstip  $t = 1$  s.
- $\Delta \vec{r} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r}_1 - \vec{r}_0$ ; ga na welke hoek  $\Delta \vec{r}$  maakt met de X-as.
- $\Delta \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{v}_1 - \vec{v}_0$ ; ga na welke hoek  $\Delta \vec{v}$  maakt met de X-as.
- Bereken de grootte van de tangentiële en van de normale component van de versnelling op tijdstip  $t = 1$  s.
- Bereken de kromtestraal in het hoogste punt van de baan.

**2.12.** Een puntmassa doorloopt een vlakke baan in het XY-vlak. Voor zijn plaatsvector  $\vec{r}(t)$  geldt:  $\vec{r} = \{3 \cos(5t); 2 \sin(5t)\}$ .

- Bereken de snelheid  $\vec{v}(t)$  en de versnelling  $\vec{a}(t)$ .
- Het punt (0;2) ligt op de baan. Bereken de kromtestraal in dat punt.
- De plaats van de puntmassa kan niet alleen door de rechthoekige coördinaten  $x$  en  $y$  worden aangegeven, maar eveneens door de *poolcoördinaten*  $r$  en  $\varphi$ . Bereken  $r$  en  $\varphi$  op het tijdstip  $t = 0,15$  s.
- Bereken de grootte van de *radiale* en de *transversale* component van de snelheid op het tijdstip  $t = 0,15$  s.

**2.13.** Een boot beweegt in stromend water. Ten opzichte van het water heeft de boot een snelheid 4 km/h in noordwestelijke richting. De werkelijke snelheid (ten opzichte van de wal) is 5 km/h in westelijke richting.

Ga na, in welke richting de stroming is en hoe groot de stroomsnelheid is.

**2.14.** In twee ten opzichte van elkaar bewegende coördinatensystemen OXYZ en O'X'Y'Z' zijn de eenheidsvectoren  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  en  $\vec{k}$  in dezelfde richting. De plaatsvector van een puntmassa is in het eerstgenoemde stelsel:

$$\vec{r} = (6t^2 - 4t)\vec{i} - 3t^3\vec{j} + 3\vec{k}$$

en ten opzichte van het andere stelsel:

$$\vec{r}' = (6t^2 + 3t)\vec{i} - 3t^3\vec{j} + 3\vec{k}.$$

- Ga na, met welke snelheid O'X'Y'Z' beweegt ten opzichte van OXYZ.
- Toon aan dat de versnelling van de puntmassa in beide stelsels gelijk is.

# 3. De grondwetten van de dynamica

**3.1.** Astronauten in spe worden gewend aan een toestand van gewichtsloosheid in een vliegtuig waarvan op zeker ogenblik de motoren worden uitgeschakeld zodat het toestel gedurende enige tijd als een ballistisch projectiel door de atmosfeer beweegt. De luchtweerstand die het vliegtuig ondervindt is te verwaarlozen in vergelijking met de zwaartekracht.

De astronauten oriënteren zich ten opzichte van een met het vliegtuig verbonden coördinatenstelsel. Is dit een inertiestelsel?

**3.2.** Een kunstmaan cirkelt rond de aarde. De bemanning (en alles wat zich verder in de kunstmaan bevindt) is gewichtloos.

Is een aan de kunstmaan verbonden coördinatenstelsel een inertiestelsel?

## 4. Dynamica van een puntmassa

**4.1.** Een deeltje (massa  $m$ ) kan bewegen in een plat vlak onder invloed van twee krachten  $\vec{F}_1$  en  $\vec{F}_2$ .

$\vec{F}_1$  is steeds naar het vaste punt A  $(-a,0)$  gericht en heeft de grootte  $F_1 = c/r_1^2$  als  $r_1$  de afstand van het deeltje tot A is.

$\vec{F}_2$  is steeds van het punt B  $(a,0)$  af gericht en heeft de grootte  $F_2 = ac/r_2^3$  als  $r_2$  de afstand van het deeltje tot B is. Het deeltje passeert het punt P  $(-a,+a)$  met de snelheid  $\vec{v} = (2,4\sqrt{c/am})\vec{i}$ .

- Hoe groot zijn de normale en de tangentiële versnelling dan?
- Hoe groot is de kromtestraal van de baan in P?

**4.2.** Een man van 90 kg staat in een lift. Bereken de grootte van de kracht die de bodem van de lift uitoefent op de man als:

- de lift versneld omlaag gaat met versnelling  $3 \text{ m/s}^2$ ;
- de lift vertraagd omlaag gaat met vertraging  $3 \text{ m/s}^2$ .

**4.3.** Een fietskogeltje wordt voorzichtig losgelaten, vlak onder het wateroppervlak van een met water gevuld hoog glas.

De beginsnelheid van het kogeltje is nul. De resultante van zwaartekracht en opwaartse kracht op het kogeltje is  $4,0 \cdot 10^{-4} \text{ N}$ .

De massa van het kogeltje is  $4,5 \cdot 10^{-5} \text{ kg}$ . Het kogeltje ondervindt een wrijvingskracht die evenredig is met zijn snelheid:  $\vec{F}_w = -C\vec{v}$ , waarin  $C = 3,0 \cdot 10^{-4} \text{ kg/s}$ .

- Stel de differentiaalvergelijking op, waaraan  $v$  moet voldoen.
- De snelheid neemt weliswaar toe, maar nadert een eindwaarde die willekeurig dicht benaderd zou kunnen worden indien de af te leggen afstand willekeurig groot zou zijn. Bereken die 'eindwaarde'.
- De oplossing van de in *a* gevraagde vergelijking is van de vorm  $v = \alpha + \beta e^{\gamma t}$ , waarin  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  reële constanten zijn.  
Bereken de snelheid, ééntiende seconde na het loslaten.

**4.4.** Een voorwerp (massa  $m$ ) hangt, in de toestand van rust, aan een schroefveer. Wordt de veer nog wat verder uitgerekt en dan losgelaten, dan gaat het voorwerp een trillende beweging uitvoeren.

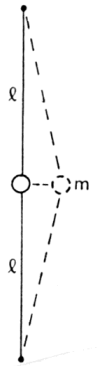
- Stel de bewegingsvergelijking van het trillende lichaam op. Voer daartoe een plaatscoördinaat  $z$  in, met positieve richting naar beneden, en kies  $z = 0$  voor het vrije einde van de veer als het lichaam er nog niet aan bevestigd is. Stel de veerconstante gelijk aan  $b$ , en stel de massa van de veer gelijk aan nul.
- Leid uit de bewegingsvergelijking de trillingstijd van het lichaam af. Ga na dat de

zwaartekracht geen invloed heeft op de trillingstijd.

- c. Stel dat, als het voorwerp in rust aan de schroefveer hangt, deze nog 0,1 m extra wordt uitgerekt. De trillingstijd blijkt 0,5 s te zijn. Met welke snelheid gaat het voorwerp door de evenwichtsstand?
- d. Bereken de versnelling die het voorwerp heeft als het zich 0,05 m boven de evenwichtsstand bevindt.
- e. Hoeveel wordt de veer korter als het voorwerp afgehaakt wordt?

**4.5.** Op een glad horizontaal oppervlak zijn twee vaste punten aangebracht. Een puntmassa met massa  $m$  is via twee identieke gespannen snaren bevestigd aan de beide vaste punten. De lengte van elke snaar is  $\ell$ .

Geeft men de puntmassa een kleine uitwijking  $u$  in een horizontale richting loodrecht op de snaren en laat men dan los, dan zal de puntmassa vervolgens een trilling gaan uitvoeren.

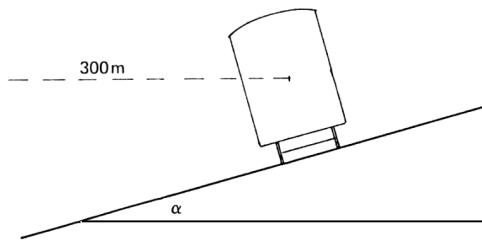


- a. De snaren zijn strak gespannen; de spankracht in elke snaar is  $S_0$ . Toon aan dat voor kleine uitwijkingen  $u$  de puntmassa harmonisch trilt. Bereken voor dit geval de trillingstijd. (Neem aan dat de spankracht in de snaren steeds dezelfde waarde ( $S_0$ ) behoudt).
- b. Stel nu, dat de spankracht in de beide snaren juist nul is in de evenwichtssituatie. Zodra de puntmassa een uitwijking  $u$  bezit, heerst in de snaren een spankracht waarvan de grootte recht evenredig is met de lengtetoe name van de snaren. Toon aan dat de trilling nu *niet* harmonisch is.

**4.6.** Twee konische slingers zijn aan hetzelfde plafond bevestigd. Ze hebben verschillende lengten maar ze bewegen zodanig dat de beide puntmassa's op dezelfde hoogte boven de vloer hun cirkels beschrijven.

Bewijs dat beide slingers dezelfde omlooptijd hebben.

**4.7.** Een trein rijdt met 63 km/h door een schiefgelegde (verkante) bocht. De kromtestraal van de bocht is 300 m.

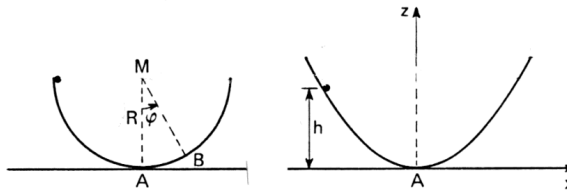


- Bereken de verkantingshoek  $\alpha$  opdat geen zijdelingse wrijving optreedt.
- Bereken de hoek die een ketting, opgehangen aan het plafond in één van de wagons, maakt met de verticaal.

Opmerking:

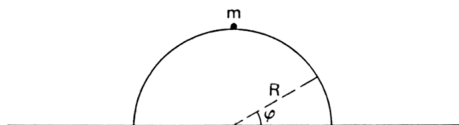
Bij de vraagstukken 4.8 t/m 4.11 dient de wet van behoud van mechanische energie te worden gebruikt in de vorm  $\Delta(\frac{1}{2} mv^2) = -\Delta(mgh)$ .

**4.8.** Een gladde schaal heeft de vorm van een halve bol. Men laat vanaf de rand een puntmassa naar beneden glijden met beginsnelheid nul.



- Met welke snelheid passeert het deeltje het onderste punt A van de schaal?
- Hoe groot is de kracht die de schaal in het punt A ondervindt bij het passeren van het deeltje?
- Hoe groot is de kracht op de kom bij het passeren van punt B ( $\angle AMB = \varphi$ )?
- Een andere gladde schaal heeft de gedaante van een omwentelingsparaboloïde. De vergelijking van de doorsnede met het  $x,z$ -vlak is  $x^2 = 2pz$ . Men laat vanaf een punt op hoogte  $z = h$  een puntmassa naar beneden glijden met beginsnelheid nul. Hoe groot is de kracht op deze schaal bij het passeren van het onderste punt A? (N.B. De kromtestraal  $R_A$  in A is gelijk aan  $p$ ).

**4.9.** Een puntmassa ( $m$ ) bevindt zich op een halfbolvormige ijsberg. Men geeft de puntmassa een uiterst kleine verplaatsing, waarna hij uit zichzelf verder naar beneden glijdt. Op zeker ogenblik verliest de puntmassa dan het contact met de (volkomen glad veronderstelde) ijsberg. Ga na, bij welke waarde van hoek  $\varphi$  dat het geval is.

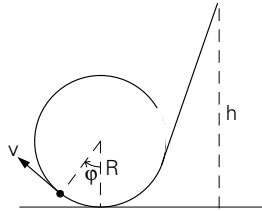


**4.10.** Een bol die als puntmassa beschouwd kan worden, is door middel van een massaloze staaf in een punt A vrij draaibaar opgehangen. De lengte van de staaf is  $\ell$ . Met welke minimum snelheid moet men de bol uit de rusttoestand wegstoten, opdat de staaf over  $\pi$  rad draait?

Als men de staaf door een massaloos ondersteeld touwtje vervangt, met welke horizontaal gerichte minimum snelheid moet men dan de bol wegstoten opdat de bol over de hoogte  $2\ell$  stijgt?

**4.11.** Een cirkelvormige, aan de binnenzijde open goot is in een verticaal vlak opgesteld. De straal van de goot is  $R$ . Een deeltje waarvan de massa  $m$  is glijdt langs een hellend vlak naar beneden, zo, dat het de goot in het laagste punt horizontaal binnentreedt. Stel dat nergens wrijvingskrachten optreden.

a. Op welke hoogte  $h$  moet het deeltje minstens worden losgelaten opdat het het bovenste punt van de cirkelbaan passeert?



b. Bereken de snelheid  $v$  als functie van de hoek  $\phi$  (zie tekening), als het deeltje van die hoogte is losgelaten.

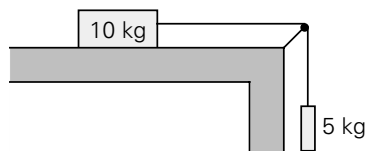
c. Bereken ook de tangentiële versnelling  $\dot{v}$  als functie van de hoek  $\phi$ .

d. Uit de uitdrukkingen voor  $v$  en voor  $\dot{v}$  kan men nu  $d\phi/dt$  (en dus ook  $dt/d\phi$ ) berekenen als functie van  $\phi$ . Stel nu een uitdrukking op voor de tijd die het deeltje nodig heeft om de gehele cirkel te doorlopen (het wordt een integraal die *niet* analytisch is uit te rekenen, een zogenaamde elliptische integraal).

**4.12.** Een planeet (P) voert een eenparige cirkelbeweging uit om de zon (Z). De massa van P is  $m$ ; de massa van Z is  $M \gg m$ . De straal van de cirkelbaan is  $r$ . Hoe groter  $r$  is, des te groter is ook de omlooptijd  $T$ .

Bewijs dat  $T$  recht evenredig is met  $r^{1.5}$ .

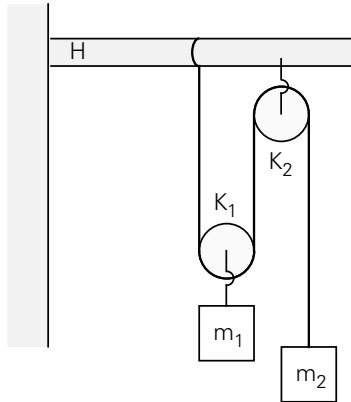
**4.13.** Op een ruwe tafel ligt een blok waarvan de massa 10 kg is. Aan het blok is een koord bevestigd dat over een gladde pin aan de rand van de tafel hangt en dat aan het andere uiteinde een lichaam met massa 5 kg draagt. De wrijvingskracht van de tafel op het blok is 20 N.



Bereken de spankracht in het koord en de versnelling van het blok.  
Verwaarloos de massa van het koord.

**4.14.** Over een horizontale gladde pin glijdt een koord dat aan het ene einde een lichaam van 6 kg draagt en aan het andere einde een lichaam van 3 kg. Bereken de kracht, die het koord op de pin uitoefent tijdens de beweging van de lichamen (verwaarloos de massa van het koord).

**4.15.**  $K_1$  is een losse katrol;  $K_2$  is een vaste katrol; H is een hijsbalk.  
Het lichaam met massa  $m_1$  hangt aan de losse katrol. Het koord, waar deze katrol aan hangt, is enerzijds aan de hijsbalk bevestigd en anderzijds over de, eveneens aan de hijsbalk bevestigde, vaste katrol geslagen. Aan het vrije uiteinde van het koord hangt het lichaam met massa  $m_2$ . De rechte stukken van het koord hangen verticaal. De massa van het koord wordt, evenals die van de katrollen, verwaarloosd.



- Bereken de grootte van de spankracht in het koord.
- Bereken de versnellingen waarmee de beide lichamen bewegen (uitgedrukt in  $\vec{g}$ ).  
Hoe zijn die versnellingen gericht?

**4.16.** Een homogene balk waarvan de lengte  $\ell$  is en de oppervlakte van de dwarse doorsnede A, wordt in zijn lengterichting door een constante kracht  $\vec{F}$ , die aan een van de uiteinden aangrijpt, over een horizontaal volkomen glad oppervlak voortgetrokken.

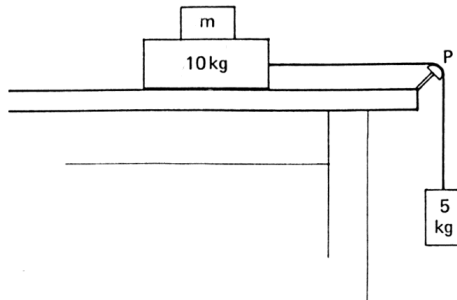
- Hoe groot is de trekspanning in de balk op een afstand  $x$  van het voorste eindvlak? (Trekspanning  $\sigma = \text{trekkracht gedeeld door doorsnede.}$ )
- Hoe groot is de trekspanning als de balk in zijn lengterichting vrij valt?

**4.17.** Om een wiel is een dunne band van rubber gespannen. De spankracht in de band is  $F_s$ . De straal van het wiel is  $R$ ; de breedte van de band is  $b$ .

- Hoe groot is de druk die de band op het wiel uitoefent?
- Stel de massa van de band per lengte-eenheid  $\lambda$ . Als men het wiel om zijn as laat draaien, bij welke hoeksnelheid oefent de band dan geen druk meer op het wiel

uit?

**4.18.** Een blok van 10 kg ligt op een horizontale tafel. Op het blok rust een onbekende massa  $m$ . Het blok is door middel van een massaloos koord verbonden met een vrij hangend lichaam van 5 kg. Het koord loopt over de volkomen gladde pin P. De statische wrijvingscoëfficiënt  $\mu_s$  voor de wrijving tussen blok en tafel is 0,20; de kinetische wrijvingscoëfficiënt  $\mu_k$  is 0,15.



- Bereken de minimaal benodigde waarde van  $m$  opdat het blok blijft liggen.
- Bereken de versnelling van het blok als de massa  $m$  is weggenomen.

# 5. Arbeid, energie, impuls, impulsmoment

## Arbeid en energie

**5.1.** Een lichaam van 0,5 kg valt van 1 m hoogte op een verticaal geplaatste drukveer waarvan de bindingssterkte (veerconstante) 2000 N/m is.

Bereken de maximale indrukking van de veer.

**5.2.** Een schroefveer is aan een plafond opgehangen; de veerconstante is  $b$ . Aan het onderste einde van de veer wordt een steen, waarvan de massa  $m$  is, gehaakt, en uit deze stand losgelaten. Verwaarloos de massa van de veer ten opzichte van die van de steen.

- De steen heeft tijdens zijn beweging een potentiële energie ten gevolge van de zwaartekracht en een potentiële energie ten gevolge van de veerkracht. Stel een uitdrukking op voor de totale potentiële energie van de steen ten opzichte van de oorspronkelijke stand. Maak een grafische voorstelling van de potentiële energie als functie van de uitrekking  $z$ .
- Hoe groot is de potentiële energie van de steen in zijn laagste stand? Leid daaruit af over welke lengte de steen in zijn laagste stand gedaald is.
- Het stelsel veer plus steen gaat een trillende beweging uitvoeren, die, tengevolge van dempingskrachten, na enige tijd tot rust komt. Over welke lengte is de veer in deze eindstand uitgerekt?

**5.3.** Een puntmassa beweegt langs de  $x$ -as. Hij ondervindt een kracht, ten gevolge waarvan hij een potentiële energie bezit:  $E_p = 3x^2 - x^3 + 1$ .

- Schets de grafiek van  $E_p$  tegen  $x$ .
- Ga na, hoe de richting van de kracht is voor  $x < 0$ , voor  $0 < x < 2$ , en voor  $x > 2$  meter.
- Stel dat nu nog gegeven is dat het deeltje in dit krachtveld een trilling uitvoert. Ga na, tussen welke waarden in dat geval zijn totale mechanische energie moet liggen.
- Als het trillende deeltje een zo hoog mogelijke totale mechanische energie bezit, tussen welke grenzen van  $x$  beweegt het dan?

**5.4.** Op een deeltje werkt een kracht  $\vec{F} = (y^2 - x^2)\vec{i} + 3xy\vec{j}$ .

- Toon aan dat dit krachtveld *niet* conserverend is.
- Bereken de arbeid, verricht door  $\vec{F}$ , als het deeltje van punt O (0,0) wordt verplaatst naar punt A (2,4) langs de volgende weg: Eerst langs de  $x$ -as tot (2,0) en dan evenwijdig aan de  $y$ -as naar A.

- c. Dezelfde vraag voor een andere weg: Eerst langs de y-as tot (0,4) en dan verder evenwijdig aan de x-as tot A.
- d. Dezelfde vraag voor nog een andere weg: van O in rechte lijn naar A.

**5.5.** Op een deeltje werkt een kracht  $\vec{F} = 2xy \vec{i} + x^2 \vec{j}$ .

- a. Toon aan dat dit krachtveld conserverend is.
- b. Bereken de arbeid, verricht door  $\vec{F}$ , als het deeltje van punt O (0,0) naar punt A (2,4) gaat.
- c. Bereken de potentiële energie van het deeltje als functie van x en y.

**5.6.** Op een deeltje werkt een kracht  $\vec{F} = 2axy \vec{i} + (ax^2 + 3ay^2) \vec{j}$ .

- a. Toon aan dat het krachtveld conserverend is.
- b. Bereken de potentiële energie van het deeltje in het punt P (1,2) als we  $E_p = 0$  kiezen in het punt Q (3,0).

**5.7.** Een deeltje beweegt in een conserverend krachtveld. De massa  $m = 0,2$  kg. Voor de kracht die het ondervindt in een punt met coördinaten x, y, z geldt:  $F_x = 2px^3y^2$ ;  $F_y = x^4y$ ;  $F_z = 0$ ; de constanten p en q zijn  $\neq 0$ .

- a. Bereken p en q.
- b. Het deeltje passeert het punt (1,2,0) met een snelheid  $\vec{v} = 6 \vec{j}$ . Bereken de grootte van de tangentiële versnellingscomponent en van de kromtestraal R van de baan in dat punt.
- c. Bereken de potentiële energie van het deeltje ten opzichte van de oorsprong in het punt P (1,2,0).

**5.8.** Een deeltje waarvan de massa m is, beweegt langs een rechte lijn. De potentiële energie is  $E_p = cx/(x^2 + a^2)$ , waarin a en c positieve constanten zijn.

- a. In welke punten kan het deeltje in een evenwichtstoestand zijn? Onderzoek of het evenwicht labiel of stabiel is. Schets het diagram van  $E_p$  tegen x.
- b. Stel het deeltje bevindt zich in rust in de stabiele evenwichtstoestand. Welke snelheid zou men het dan moeten geven opdat het deeltje naar  $-\infty$  verdwijnt? En welke snelheid opdat het naar  $+\infty$  gaat?

**5.9.** a. Bewijs dat de potentiële energie  $E_p$  van een deeltje met massa m in het gravitatieveld van de aarde (opgevat als bolsymmetrisch verdeelde massa; straal  $R_A$ ) is, t.o.v. zeeniveau:

$$E_p = mg_0 h \frac{R_A}{R_A + h} .$$

Hierin is  $g_0$  de valversnelling op zeeniveau en h de hoogte boven zeeniveau. De invloed van de rotatie van de aarde wordt verwaarloosd.

- b. Bereken de potentiële energie  $E_p$  van een deeltje van 1 kg in het gravitatieveld van de aarde met behulp van bovenstaande formule voor  $h = 50 \text{ km}$ ,  $500 \text{ km}$  en  $5000 \text{ km}$ , alsook voor  $h \rightarrow \infty$ .

Gegeven is nog dat  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$  en  $R_A \approx 6350 \text{ km}$ .

Bereken  $E_p$  voor de genoemde hoogten ook met behulp van de formule  $E_p \approx m g_0 h$ .

- 5.10.** a. Een deeltje bevindt zich in een centraal krachtveld. Voor de veldkracht geldt:

$$\vec{F} = \frac{-c}{r^2} \vec{e}_r;$$

$c$  is een positieve constante.

Bereken de potentiële energie van het deeltje in dit veld (op een constante na).

- b. Dezelfde vraag voor het geval dat de veldkracht is:

$$\vec{F} = \frac{ac}{r^3} \vec{e}_r$$

waarin  $a$  een lengte is.

- c. Bereken nu de potentiële energie van het in vraagstuk 4.1 genoemde deeltje in het daar beschreven krachtveld, als functie van  $r_1$  en  $r_2$ .
- d. Bereken laatstgenoemde potentiële energie als het deeltje zich bevindt in het punt  $P(-a, +a)$ . Stel  $E_p = 0$  in het oneindige.
- e. Dezelfde vraag, maar nu wordt  $E_p = 0$  gesteld als het deeltje zich bevindt in het punt  $(0, 0)$ .
- f. De snelheid  $\vec{v}$  in het punt  $P$  is  $(2, 4\sqrt{c/am})\vec{i}$ ; deze is zo groot dat het deeltje willekeurig ver weg komt. Bereken de grootte van zijn snelheid in het oneindige.

- 5.11.** Bereken de amplitude en de beginfase van een trillend punt, als voor de uitwijking geldt:  $u = 3 \sin(\omega t) + 4 \cos(\omega t)$ .

- 5.12.** Een deeltje trilt langs de  $x$ -as in het in vraagstuk 5.3 beschreven krachtveld. De amplitude is klein (d.w.z.  $\ll 1 \text{ m}$ ). De massa van het deeltje is  $0,24 \text{ kg}$ . Bewijs dat het deeltje nagenoeg harmonisch trilt en bereken de trillingstijd.

- 5.13.** Een puntmassa (massa  $m$ ) beweegt langs een rechte lijn ( $x$ -as), onder invloed van een kracht  $F_x = c/x^2 - kx$  ( $c$  en  $k$  zijn positieve constanten).

- a. Bereken de coördinaat  $x_0$  van het punt waar de puntmassa in evenwicht verkeert.
- b. Bereken de potentiële energie als functie van  $x$  (stel  $E_p = 0$  voor  $x = x_0$ ) en schets de grafiek, voor  $x > 0$ .
- c. Men geeft de puntmassa vanuit de evenwichtsstand een kleine uitwijking  $\Delta x$  en laat hem dan los. Bewijs dat voor  $|\Delta x| \ll x_0$  de beweging bij benadering is op te

vatten als een harmonische trilling; bereken de trillingstijd.

**5.14.** Op een deeltje waarvan de massa  $m$  is werkt de kracht:

$$\vec{F} = \left( \frac{a}{r^5} - \frac{b}{r^2} \right) \vec{e}_r.$$

Hierin is  $a > 0$  en  $b > 0$ .

- Schets in een grafiek de potentiële energie  $E_p$  van het deeltje als functie van  $r$ .  
Stel  $E_p = 0$  voor  $r \rightarrow \infty$ .
- Op welke afstand  $r_0$  van de oorsprong (het krachtcentrum) kan het deeltje in stabiel evenwicht verblijven? Met welk punt in de grafiek correspondeert deze evenwichtsstand?
- Als men het deeltje vanuit de evenwichtsstand een verplaatsing  $\Delta r > 0$  geeft, gaat het een trilling uitvoeren. Geldt dat ook voor elke  $\Delta r < 0$ ? Onderzoek beide gevallen met behulp van de grafiek.
- Als  $|\Delta r| \ll r_0$  gaat het deeltje een *harmonische* trilling uitvoeren. Hoe groot is daarvan de trillingstijd?

## Krachtstoot en impuls

**5.15.** Op een lichaam werkt gedurende 5 seconden een naar grootte en richting constante kracht van 4 N. Beantwoord de volgende vragen zonder de versnelling van het lichaam uit te rekenen.

- Hoe groot is de impuls (hoeveelheid beweging) die het lichaam krijgt, als het oorspronkelijk in rust was?
- Als het lichaam een massa van 0,2 kg heeft, en het, voor de kracht begon te werken, een snelheid van 3 m/s had in de richting waarin de kracht werkt, hoe groot is dan de eindsnelheid?
- Indien het lichaam (massa 0,2kg), voor de kracht begon te werken, een snelheid van 4 m/s had in de richting tegengesteld aan die waarin de kracht werkt, hoe groot is dan de eindsnelheid?
- Beantwoord vraag c als op het lichaam, in plaats van een constante kracht, de kracht  $F = t/5$  N gedurende 5 seconden werkt.

**5.16.** Een wagentje kan zonder wrijving op zeer kleine wielen uitsluitend in één richting rijden. Het wagentje staat aanvankelijk stil; de massa is 50 kg.

- Een man loopt in de genoemde richting met een snelheid van 2 m/s op het wagentje toe; de massa van de man is 70 kg.  
Welke snelheid krijgt het wagentje als de man er op springt en zich dan aan het wagentje vasthoudt? Geldt bij deze gebeurtenis de wet van behoud van energie? Verklaar uw bevinding.
- Terwijl het wagentje rijdt, gooit iemand er nog een zak zand van 20 kg op, in een

richting loodrecht op de rijrichting. Welke snelheid heeft het wagentje daarna?

- c. Even later gooit de man de zak zand er weer af, in een richting loodrecht op de rijrichting. Welke snelheid heeft het wagentje nu?

**5.17.** Een aan zichzelf overgelaten wagentje, waarvan de massa  $m_0$  is, rijdt met snelheid  $\vec{v}_0$  over rechte horizontale rails. Wrijving, luchtweerstand en wielmassa zijn verwaarloosbaar klein. Het begint opeens te regenen, waardoor er per seconde  $r$  kg water in de wagen valt. De regen valt loodrecht naar beneden. Bereken de snelheid van de wagen na  $t$  seconden regenval in de volgende twee gevallen.

- a. Het regenwater blijft in de wagen staan.  
 b. Het regenwater vloeit door een verticale afvoerpijp in de bodem van de wagen weg, zó dat er per seconde evenveel water wegstroomt als er in de wagen valt.  
 c. Na hoeveel tijd is in elk van de gevallen (a) en (b) de snelheid tot  $\frac{1}{2}\vec{v}_0$  afgenomen?

**5.18.** Men laat een ei en een tennisbal beide van één meter hoogte op een marmeren vloer vallen. Ei en tennisbal hebben beide een massa van 0,050 kg. Welk van beide lichamen ondervindt bij de botsing de grootste krachtstoot? Bereken de grootten van de krachtstoten.

**5.19.** In een verticaal opgestelde dikke plank worden  $n$  kogels per seconde geschoten, die in het hout blijven steken. Elke kogel heeft een massa  $m$  en een snelheid  $\vec{v}$  loodrecht op de plank. Welke constante kracht is nodig om de plank op zijn plaats te houden?

Als de plank vervangen wordt door een stalen plaat waar de kogels tegen terugkaatsen met een snelheid even groot als de trefsnelheid, hoe groot is dan de kracht, nodig om de plaat op zijn plaats te houden?

**5.20.** Hoe kunt u verklaren dat een ei, dat van een bepaalde hoogte valt, op een harde bodem kapot valt en op een zachte bodem niet?

**5.21.** Van een stapel damschijven kan men één der schijven uit de stapel wegstoten door er met een dun latje hard tegen te slaan, zonder dat de stapel omvalt. Het lukt echter niet één schijf langzaam uit de stapel weg te trekken. Verklaar dat.

**5.22.** Een raket is klaargezet om verticaal op te stijgen. Zijn oorspronkelijke massa (inclusief brandstof) is 1000 kg. De verbrandingsgassen verlaten de raket met een debiet van 2 kg per s. Gevraagd de minimale snelheid waarmee deze gassen de raket moeten verlaten opdat de raket zich ook werkelijk van de aarde verheft.

**5.23.** In de zwaartekrachtvrije ruimte (ver van alle sterren en planeten) bevindt zich een raket. Op zeker tijdstip  $t = 0$  is de snelheid van de raket ten opzichte van een bepaald inertiestelsel nul. De massa van de raket zonder brandstof is  $m_0$ ; de massa

van de brandstof in de raket is  $2m_0$  op  $t = 0$  (de totale massa is dan dus  $3m_0$ ).

De raket stoot  $r$  kg per s uit in de vorm van verbrandingsgassen die met een constante snelheid  $\vec{v}'$  (ten opzichte van de raket) uitstromen.

- Ten gevolge van het uitstromen van de verbrandingsgassen ondervindt de raket een constante kracht. Bereken de grootte van deze kracht.
- Doordat de massa steeds kleiner wordt, is de versnelling  $a$  van de raket *niet* constant. Bereken de snelheid  $v$  als functie van de tijd en schets het  $v$ - $t$  diagram voor het tijd-interval  $[0; 3m_0/r]$ .

**5.24.** Een raket gaat recht omhoog; de beginsnelheid is nul. De massa van de raket zonder brandstof is  $M$ ; de oorspronkelijke massa van de brandstof is  $m_0$ . Per s stoot de raket  $r$  kg brandstof uit;  $r = 0,05 m_0$ .

De uitstroomsnelheid  $v'$  van de gassen *t.o.v. de raket* is constant;  $v' = 5 \cdot 10^3$  m/s.

- Bewijs dat voor de snelheid van de raket als functie van de tijd geldt, voor het tijd-interval  $[0; 20$  s]:

$$v = -gt + v' \ln\left(\frac{M + m_0}{M + m_0 - rt}\right)$$

indien we de luchtweerstand mogen verwaarlozen en de valversnelling als constant mogen beschouwen.

- Voor het geval dat  $M = m_0$  is de genoemde formule te vereenvoudigen tot:

$$v = -gt - v' \ln(1 - 0,025t).$$

Bereken voor dat geval de grootte van de snelheid op het tijdstip  $t = 20$  s. Ga na, op welke hoogte de raket zich dan bevindt.

*Aanwijzing:*  $\int \ln x \, dx = x \ln x - x$ .

## Krachtsmoment en impulsmoment; perkenwet

**5.25.** Voor de plaatsvector van een puntmassa van 1 kg geldt:

$$\vec{r} = t^2 \vec{i} + t^3 \vec{j} - t \vec{k}$$

- Bereken de kracht op de puntmassa.
- Bereken het krachtsmoment ten opzichte van de oorsprong.
- Bereken de impuls van het deeltje en ook het impulsmoment ten opzichte van O.
- Ga na dat inderdaad  $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$ .

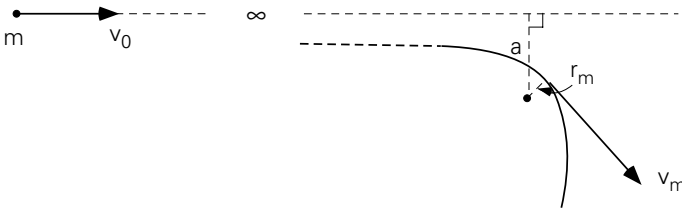
**5.26.** Een planeet beschrijft, in het gravitatieveld van de zon, een ellipsbaan waarbij de zon in één der brandpunten staat. Voor de ellipsbaan geldt:  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  waarbij  $a$  de halve lange as is en  $b$  de halve korte as.

De plaatscoördinaten van het middelpunt van de (stilstaand gedachte) zon zijn:  $(+f; 0)$ , waarin  $f = \sqrt{a^2 - b^2}$ . In het perihelium (d.i. het punt waar de afstand tot de

zon minimaal is) is de snelheid van de planeet  $v_0$ .

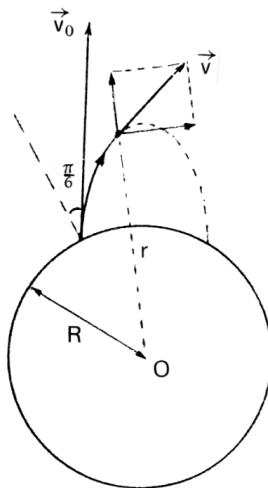
- Bereken de *perksnelheid* (dat is de per seconde door de voerstraal zon-planeet doorsneden oppervlakte), uitgedrukt in  $a$ ,  $f$  en  $v_0$ .
- Bereken de omlooptijd, uitgedrukt in  $v_0$ ,  $a$  en  $f$ . *Opmerking*: de oppervlakte van de ellips is  $\pi ab$ .

**5.27.** Op een deeltje waarvan de massa  $m$  is, werkt een naar een vast punt  $O$  gerichte kracht waarvan de grootte  $c/r^2$  is ( $c = \text{constante}$ ). Aanvankelijk bevindt het deeltje zich op zeer grote afstand van  $O$  en heeft dan de snelheid  $\vec{v}_0$  in de getekende richting. De afstand van  $O$  tot de drager van  $\vec{v}_0$  is  $a$ . Tengevolge van de aantrekkende kracht beschrijft het deeltje een gekromde baan om  $O$ . Stel vergelijkingen op waaruit berekend kunnen worden: de kleinste afstand  $r_m$  waarmee het deeltje tot  $O$  nadert, en de snelheid  $v_m$  die het deeltje op het ogenblik van dichtste nadering heeft.



**5.28.** Een projectiel met massa  $m$  wordt van het aardoppervlak weggeschoten met een snelheid  $\vec{v}_0$  die een hoek van  $\frac{\pi}{6}$  rad met de verticaal op het aardoppervlak maakt. De invloed van de luchtweerstand mag verwaarloosd worden. De aardstraal is  $R$ . Het middelpunt van de aarde heet  $O$ . De rotatie van de aarde wordt verwaarloosd.

- Hoe groot is het impulsmoment van het projectiel ten opzichte van  $O$  op het ogenblik van afschieten? Wat is de richting van dit impulsmoment?



- Op een later tijdstip bevindt het projectiel zich op een afstand  $r$  ( $> R$ ) van  $O$ . Men

denkt zich de snelheid  $\vec{v}$  van het projectiel ontbonden in een radiale component  $\vec{v}_{\text{rad}}$  en een transversale component  $\vec{v}_{\text{tr}}$  loodrecht daarop. Hoe groot is  $v_{\text{tr}}$ ? (uitgedrukt in de gegevens).

- c. Bewijs, dat de potentiële energie van het projectiel gelijk is aan:

$$-mg_0 \frac{R^2}{r}. \quad \text{Hierin is } g_0 = \frac{Gm_A}{R^2}$$

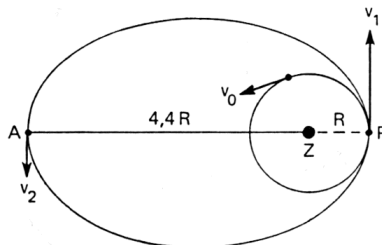
( $G$  = gravitatieconstante;  $m_A$  = massa van de aarde). Waar is het nulpunt van de potentiële energie gekozen? Wat is de fysische betekenis van  $g_0$ ?

- d. Stel,  $v_0 = \sqrt{g_0 R}$ . Het projectiel bereikt een grootste hoogte  $h$  boven het aardoppervlak. Bereken  $h$ , uitgedrukt in  $R$ .
- e. Bereken ook de kromtestraal  $\rho$  in het hoogste punt van de baan.
- f. Bereken de ontsnappingssnelheid (dit is: de waarde die  $v_0$  minstens moet hebben opdat het projectiel niet meer terugkeert).

**5.29.** Men wil een kunstsatelliet in een elliptische baan om de aarde brengen, zo, dat de afstanden *tot het aardoppervlak* variëren van  $R$  (in het perigeum) tot  $5R$  (in het apogeum), als  $R$  = straal van de aarde. (Beschouw de aarde als bolvormig en homogeen van samenstelling.) Stel de versnelling van de gravitatiekracht aan het aardoppervlak  $g_0$ .

- a. Toon aan dat men de satelliet in het perigeum een beginsnelheid gelijk aan  $\sqrt{3g_0 R} / 4$  moet geven.
- b. Als de satelliet zich op een hoogte van  $2R$  boven het aardoppervlak bevindt, maakt de richting van de baan een hoek  $\alpha$  met de voerstraal uit het middelpunt van de aarde. Toon aan:  $\sin \alpha = \sqrt{0,8}$ .
- c. Bereken de kromtestraal van de baan in het perigeum.

**5.30.** Een ruimtevaartuig met massa  $m$  beschrijft een cirkelvormige baan met straal  $R$  rond de zon ( $Z$ ) met massa  $m_z$ . De grootte van zijn snelheid is  $v_0$ . In een bepaald punt  $P$  van die baan wordt de snelheid plotseling vergroot tot  $v_1$ . De nieuwe baan is ellipsvormig; het verste punt  $A$  ligt op afstand  $4,4R$  van het middelpunt van de zon (het meest nabijgelegen punt is uiteraard  $P$ ). In  $A$  heeft de snelheid de grootte  $v_2$ . Het ruimtevaartuig kan als puntmassa worden opgevat;  $m_z \gg m$ . De gravitatieconstante is  $G$ .



- Bereken de potentiële energie  $E_p$  van het ruimtevaartuig in het gravitatieveld van de zon als functie van de afstand  $r$  tot het middelpunt van de zon. Stel  $E_p = 0$  als  $r = \infty$ .
- Bereken  $v_2$  uitgedrukt in  $v_1$ .
- Bereken  $v_1$  uitgedrukt in  $v_0$ .
- Bereken de kromtestraal van de ellipsbaan in het punt P, uitgedrukt in R.

**5.31.** Een deeltje, waarvan de massa  $m$  is, beweegt in een centraal krachtveld. De plaatsvector  $\vec{r}$  ten opzichte van het krachtcentrum O is, als functie van  $t$ :

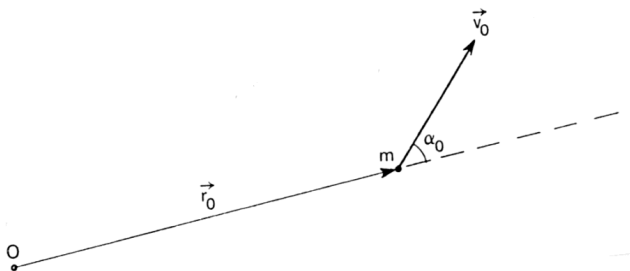
$$\vec{r} = \vec{i}r_0 \cos \omega t + \vec{j} \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

waarin  $v_0$ ,  $r_0$  en  $\omega$  constanten zijn.

- Bereken plaats en snelheidsvector op tijdstip  $t = 0$ .
- Stel de vergelijking van de baan van het deeltje op in rechthoekige coördinaten.
- Bereken de kracht  $\vec{F}$  die op het deeltje werkt.
- Bereken de snelheid van het deeltje als functie van  $r$ .
- Hoe groot is het impulsmoment van het deeltje ten opzichte van O? Bereken met behulp daarvan de transversale component van de snelheid (dit is de component die loodrecht staat op  $\vec{r}$ ), als functie van  $r$ .

**5.32.** Een puntmassa (massa  $m$ ) beweegt in een centraal krachtveld. Voor zijn potentiële energie geldt:  $E_p = -c/r^6$ , waarin  $r$  de grootte van de plaatsvector  $\vec{r}$  is;  $c$  is een positieve constante. Op zeker ogenblik is zijn plaatsvector  $\vec{r}_0$  en de snelheid  $\vec{v}_0$ . De hoek tussen snelheid en plaatsvector is op dat ogenblik  $\alpha_0$  ( $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ ). Tussen  $r_0$  en  $v_0$  bestaat het volgende verband:

$$v_0 = \frac{1}{r_0^3} \sqrt{\frac{2c}{m}} \quad \text{en dus:} \quad \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{c}{r_0^6}.$$



- Bewijs, dat er in dit geval een maximale waarde van  $r$  bestaat (met andere woorden: de puntmassa kan niet willekeurig ver weg komen). Hoe groot is deze waarde van  $r$ ?

- b. Bereken de kromtestraal van de baan van de puntmassa in zijn verste punt (uitgedrukt in  $r_{\max}$ ).

**5.33.** (*nieuw*) Een puntmassa (massa  $m$ ) doorloopt een ellipsvormige baan in een centraal krachtveld. Het krachtcentrum  $O$  valt samen met één der brandpunten van de ellips.

De potentiële energie van de puntmassa in dit krachtveld is:  $E_p = -c/r$  ( $c$  is een positieve constante;  $r$  is de afstand tot het krachtcentrum).

- a. In het perihelium (het punt van de ellips dat het dichtste bij  $O$  ligt) heeft  $r$  de waarde  $r_0$ , terwijl de snelheid is:

$$v_0 = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{c}{mr_0}} .$$

Bereken de totale mechanische energie  $E$  (dat is  $E_p + E_k$ ) alsook  $L$  (de grootte van het impulsmoment t.o.v.  $O$ ), uitgedrukt in  $c$ ,  $m$  en  $r_0$ .

- b. Bereken de potentiële energie  $E_p^*$  van het ééndimensionale equivalent (als functie van  $r$ ) en schets het diagram van  $E_p^*$  tegen  $r$ .
- c. Bereken  $r$  in het aphelium (het punt van de ellips dat het verst van  $O$  verwijderd is).

## 6. Twee-deeltjes systemen; botsingen

**6.1.** Langs een rechte lijn bewegen twee deeltjes, waarvan de massa's zijn:

$m_1 = 4$  kg en  $m_2 = 6$  kg. Zij trekken elkaar aan met een kracht waarvan de grootte recht evenredig is met hun afstand; de evenredigheidsfactor is  $0,02$  N/m.

Langs de lijn is een coördinaat-as aangebracht met een bepaalde oorsprong. Op het tijdstip  $t = 0$  bevinden de deeltjes zich op de plaatsen  $x_1 = 7$  m en  $x_2 = 57$  m. Zij bewegen op dit tijdstip van elkaar af, met snelheden respectievelijk  $3$  en  $2$  m/s.

- Toon aan dat de snelheid van het massamiddelpunt nul is. Bereken de plaats van dat punt.
- Hoe groot is de mutuele potentiële energie van het stelsel van de twee deeltjes, ten opzichte van de toestand van dichtste nadering, als hun onderlinge afstand  $r$  is?
- Welke snelheden hebben de deeltjes vlak vóór zij botsen?
- Hoe groot is de maximale afstand tussen de twee deeltjes vóór de botsing geweest?

**6.2.** Twee vrij beweeglijke elektrisch geladen deeltjes (massa  $m_1$  en  $m_2$ ; ladingen  $q_1$  en  $q_2$ , beide positief) bevinden zich aanvankelijk op grote afstand van elkaar. De snelheid  $\vec{v}_1$  van deeltje 1 is dan  $\vec{v}_0$  en is gericht naar deeltje 2, dat dan nog in rust is. Hoe dicht naderen de deeltjes elkaar? (De gravitatiekrachten zijn verwaarloosbaar ten opzichte van de coulombkrachten.)

**6.3.** Een deeltje, genummerd 1, wordt met snelheid  $\vec{v}_0$  geschoten in de richting van een ander deeltje, genummerd 2. De deeltjes stoten elkaar af met de kracht  $C/r^2$ , als  $r$  hun onderlinge afstand is ( $C$  is een constante). Op het ogenblik van afschieten is de afstand zeer groot ( $r = \infty$ ). De massa's van de deeltjes zijn  $m_1$  en  $m_2$ . De gravitatiekrachten tussen de deeltjes zijn verwaarloosbaar klein.

- Deeltje 2 is eerst vast opgesteld. Bereken de kleinste afstand waarop 1 tot 2 nadert.
- Op het ogenblik dat 1 zo dicht mogelijk tot 2 genaderd is, wordt deeltje 2 vrij beweeglijk. Bereken de snelheden van elk van de deeltjes als ze zich daarna op zeer grote afstand van elkaar bevinden.

**6.4.** De experimenteel bepaalde dissociatie-energie van een waterstofmolecuul is  $7,18 \cdot 10^{-19}$  J. Toon aan dat daaruit volgt dat de gravitationele interactie van de twee waterstofatomen waaruit het molecuul is opgebouwd niet de oorzaak kan zijn van de vorming van het molecuul uit zijn atomen.

Nadere gegevens: de afstand tussen de atomen in het molecuul is  $0,745 \cdot 10^{-10}$  m; de massa van een waterstofatoom is  $1,673 \cdot 10^{-27}$  kg; de gravitatieconstante is  $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ .

**6.5.** Van de aarde wordt een projectiel (massa 20 kg) verticaal omhoog geschoten; de beginsnelheid is 100 m/s. Het projectiel bevat een springlading die, als het projectiel op 320 meter hoogte is gekomen, ontploft. Door de ontploffing wordt het projectiel in twee stukken gedeeld, waarvan de massa's even groot zijn (elk 10 kg). Het ene deel vliegt weg in horizontale richting met een snelheid van 160 m/s. De duur van de ontploffing is zeer klein. Verwaarloos de massa van de springlading; verwaarloos de luchtweerstand.

- In welke richting beweegt het massamiddelpunt van de twee stukken (die als puntmassa's beschouwd kunnen worden) na de ontploffing?
- Hoe groot is de impuls van het stelsel van de twee stukken onmiddellijk na de ontploffing?
- Bereken de snelheid die het tweede deel van het projectiel heeft, onmiddellijk na de ontploffing.
- Hoeveel chemische energie moet er bij de explosie tenminste zijn vrijgekomen?

**6.6.** Door Lennard-Jones is aangetoond dat de mutuele potentiële energie van een stelsel van twee non-polare moleculen als functie van hun onderlinge afstand  $r$  wordt beschreven door de functie  $E_p(r) = 4\varepsilon[(\sigma/r)^{12} - (\sigma/r)^6]$ , waarin  $\varepsilon$  en  $\sigma$  constanten zijn.

- Schets het verloop van  $E_p$  als functie van  $r$ .
- Wat is de kleinste afstand waarop twee moleculen elkaar kunnen naderen als hun totale energie nul is? (Hieruit volgt de betekenis van  $\sigma$ .)
- Met welke onderlinge afstand van de moleculen kan het stelsel in stabiel evenwicht zijn? Hoe groot is dan hun interactie-energie? (Hieruit volgt de betekenis van  $\varepsilon$ .)
- Bereken de krachten die de moleculen op elkaar uitoefenen.
- Bereken de trillingstijd van het stelsel voor kleine uitwijkingen uit de stabiele evenwichtstoestand, als de massa's van de moleculen beide  $m$  zijn.

## Botsingen

**6.7.** Twee bollen (massa's  $m$  en  $5m$ ) bewegen naar elkaar toe met even grote snelheden  $\vec{v}$  en  $-\vec{v}$ .

- Bereken de snelheden van de bollen na de botsing, als deze centraal en volkomen elastisch is.
- Als de botsing centraal en volkomen *on*elastisch verloopt, hoe groot zijn dan de snelheden na de botsing? Hoeveel procent van de oorspronkelijke kinetische energie van beide bollen tezamen is in dit geval "verdwenen"?

**6.8.** Een atoom A, massa  $m_1$ , botst met snelheid  $\vec{v}$  tegen een in rust zijnd atoom B, massa  $m_2$ . Bij kleine relatieve snelheid is zo'n botsing altijd elastisch. Bij grotere relatieve snelheid kan de botsing ook wel gedeeltelijk elastisch zijn, of zelfs *on*-elastisch. In dat geval neemt de totale kinetische energie van beide atomen samen af met  $\epsilon$  (= energie, nodig om één van beide atomen aan te slaan). Het relatief grootste verlies aan kinetische energie treedt op indien de botsing centraal en *on*elastisch is. Bereken voor dat geval de kinetische energie van A vóór de botsing, uitgedrukt in  $\epsilon$ ,  $m_1$  en  $m_2$ .

**6.9.** De snelheid van een kogel wordt gemeten met een ballistische slinger. De kogel, waarvan de massa  $2,5 \cdot 10^{-3}$  kg is, wordt in een met zand gevuld kistje geschoten, dat aan een lang koord opgehangen is. De kogel blijft in het zand steken. De massa van het kistje met zand is 4 kg; de afstand van het zwaartepunt tot het punt waar het om kan slingeren is 3,6 m. Het zwaartepunt van het kistje krijgt na het schot een maximum uitwijking van 0,1 m in horizontale richting. Bereken de snelheid van de kogel vóór het treffen.

**6.10.** Een gladde bol, waarvan de massa  $2m$  is, botst met een snelheid  $\vec{v}$  scheef tegen een stilstaande bol waarvan de massa  $m$  is. De botsing verloopt elastisch. Op het ogenblik van botsing maakt de verbindingslijn van de (massa)middelpunten van de bollen een hoek van  $\frac{\pi}{4}$  rad met de richting van  $\vec{v}$ . Over welke hoek wijkt de eerstgenoemde bol ten gevolge van de botsing van zijn oorspronkelijke bewegingsrichting af?

**6.11.** Een gladde bol A (massa  $m$ ) heeft snelheid  $\vec{v}$  en botst scheef tegen een in rust zijnde bol B (massa  $2m$ ). De botsing is gedeeltelijk elastisch. Op het ogenblik van de botsing maakt de verbindingslijn van de (massa)middelpunten van de bollen een hoek van  $0,50$  rad met de richting van  $\vec{v}$ .

Bol B heeft na de botsing een snelheid  $\vec{u}_B$  waarvan de grootte  $0,30 v$  is; de richting maakt natuurlijk een hoek van  $0,50$  rad met  $\vec{v}$ .

- Bereken de snelheid  $\vec{v}_C$  van het massamiddelpunt van het twee-deeltjes systeem, uitgedrukt in  $\vec{v}$ .
- Bereken de snelheid  $\vec{v}'_B$  van B in het m.m.-stelsel vóór de botsing.
- Bereken de grootte van de snelheid  $\vec{u}'_B$  van B in het m.m.-stelsel na de botsing.
- Bereken de grootte van de snelheid  $\vec{u}_A$  van bol A na de botsing.

*Opmerking:* in dit vraagstuk speelt de zwaartekracht geen enkele rol.

**6.12.** Twee bollen (massa's 2 kg en 10 kg) bewegen langs onderling loodrechte wegen naar elkaar toe, met snelheden van respectievelijk 120 en 18 m/s. Na de botsing blijven de bollen aan elkaar gekleefd. In welke richting en met welke snelheid beweegt het geheel onmiddellijk na de botsing?

Construeer in een tekening de krachtstoten die ze bij de botsing op elkaar uitoefenen.

**6.13.** Een zware vrachtauto rijdt met een snelheid  $\vec{V}$  over een horizontale weg.

Iemand gooit van achteren een tennisbal tegen de vrachtauto. De bal treft de verticale achterwand van de auto met een snelheid  $\vec{v}$  die in dezelfde richting staat als  $\vec{V}$ .

a. De botsing is volkomen elastisch. Bereken de snelheid  $\vec{u}$  van de bal na de botsing, uitgedrukt in  $\vec{v}$  en  $\vec{V}$ .

*Aanwijzing:* denk aan de *relatieve snelheid* voor en na de botsing en bedenk dat de snelheid van de vrachtauto na de botsing niet merkbaar veranderd zal zijn.

b. Wat is er op te merken over  $\vec{u}$  in het geval dat de snelheid  $\vec{v}$  twee keer zo groot was als de snelheid  $\vec{V}$ ?

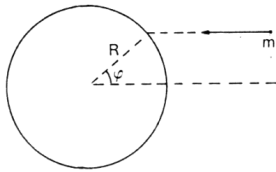
**6.14.** Een knikker valt van 5 m hoogte op een horizontale glazen plaat en komt na elke botsing 10% minder hoog.

a. Hoe groot is de restitutiecoëfficiënt bij de botsingen?

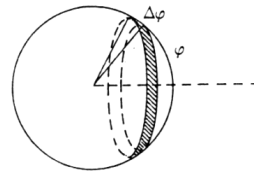
b. Hoeveel tijd verloopt er tussen de vierde en vijfde botsing?

c. Na hoeveel seconden komt de knikker tot rust?

**6.15.** Een gelijkmatige stroom moleculen treft een stilstaande bol waarvan de straal  $R$  is. De concentratie van de moleculen (aantal per  $m^3$ ) is  $n$ ; de massa van elk molecuul is  $m$ ; de snelheid van elk molecuul is  $\vec{v}_0$  (naar links gericht).



(a)



(b)

De moleculen botsen elastisch met de bol; veronderstel dat er geen botsingen tussen de moleculen onderling plaatsvinden. De massa van de bol  $\gg m$ .

a. Wij beschouwen een molecuul dat de bol treft onder een hoek  $\varphi$  (zie figuur a). Ga na, welke krachtstoot de bol hiervan ondervindt.

b. Wij beschouwen nu alle moleculen die in één seconde de bol treffen onder een hoek die varieert tussen  $\varphi$  en  $\varphi + \Delta\varphi$  (waarbij  $\Delta\varphi \ll \varphi$ ); zie figuur b. Ga na dat hun aantal is:  $2\pi n v_0 R^2 \sin \varphi \cos \varphi \Delta\varphi$ .

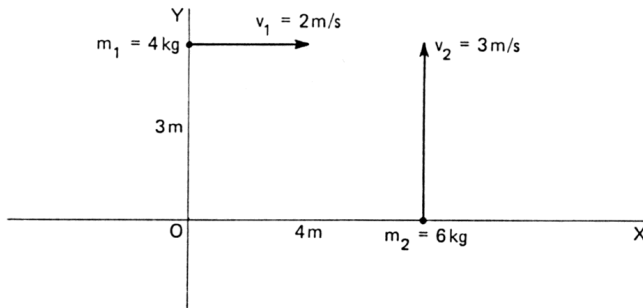
c. Bereken de totale krachtstoot die de bol van de in vraag b genoemde moleculen ondervindt.

d. Bereken de grootte van de kracht die op de bol moet worden uitgeoefend om deze op zijn plaats te houden.

e. Ga na, hoe groot de gezamenlijke impuls is geworden van alle moleculen die in één seconde de bol hebben getroffen.

## Impulsmoment van een twee-deeltjes systeem

6.16. Gegeven een stelsel van twee puntmassa's:



- Bereken het impulsmoment  $\vec{L}$  van het stelsel van twee puntmassa's t.o.v. O.
- Bereken het impulsmoment  $\vec{L}_C$  ten opzichte van het massamiddelpunt C.
- Ga na dat  $\vec{L} = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times (m_1 + m_2)\vec{v}_C$ .
- Bereken de totale kinetische energie ( $E_k$ ).
- Bereken ook de kinetische energie in het massamiddelpuntstelsel ( $E'_k$ ).
- Ga na dat  $E_k = E'_k + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_C^2$ .
- Controleer ook (door invulling van de numerieke gegevens) de relatie  $E_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_C^2 + \frac{1}{2}\mu v_{rel}^2$ , waarin  $\mu^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-2}$  en  $\vec{v}_{rel} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ .

- 6.17. a. Twee puntmassa's A en B (massa's  $m_A$  en  $m_B$ ) zijn uitsluitend onderworpen aan onderlinge (afstotende of aantrekkende) krachten. Welke behoudswetten gelden in dat geval?
- b. Stel nu dat A een cirkelbaan beschrijft met straal  $R_A$  en constante hoeksnelheid. Bewijs dat in dat geval B noodzakelijkerwijze ook een cirkelbaan beschrijft met dezelfde hoeksnelheid. Bereken  $R_B$ , uitgedrukt in  $R_A$ ,  $m_A$  en  $m_B$ .

6.18. Twee puntmassa's A en B (massa's  $m_1 = 3$  kg en  $m_2 = 2$  kg) trekken elkaar aan met een kracht waarvoor geldt:  $-\vec{F}_{21} = \vec{F}_{12} = (-c/r^2)\vec{e}_{12}$  waarin  $c$  een positieve constante is; de eenheidsvector  $\vec{e}_{12} = \vec{r}_{12}/r$ .

Aanvankelijk bevinden ze zich op zeer grote afstand van elkaar ( $r \approx \infty$ ). A beweegt dan met een snelheid  $\vec{v}_0$  naar rechts; B heeft dan nog geen snelheid. Zie de tekening.



De afstand van B tot de drager van de vector  $\vec{v}_0$  is  $a$ . Voor de grootte van de snelheid  $\vec{v}_0$  geldt:  $v_0 = \sqrt{c/a}$ .

Na enige tijd is de onderlinge afstand ingekrompen tot een minimale waarde  $r_m$ .

- a. Bereken de snelheid  $\vec{v}_C$  van het massamiddelpunt C van het twee-deeltjessysteem, uitgedrukt in  $\vec{v}_0$ .
- b. Voor het impulsmoment van het twee-deeltjessysteem t.o.v. het massamiddelpunt ( $\vec{L}_C$ ) geldt, zoals bekend:  $\vec{L}_C = \vec{r}_{12} \times \mu \vec{v}_{\text{rel}}$  waarin  $\mu$  de gereduceerde massa is. Bereken de grootte van  $\vec{L}_C$ .
- c. *Schets de banen van de beide deeltjes in het massamiddelpunt-coördinatenstelsel.*
- d. Bewijs dat de kleinste afstand  $r_m \approx 0,47a$ . (Maak voor dit bewijs gebruik van de methode van het ééndimensionale equivalente probleem!)

## 7. Dynamica van een verzameling puntmassa's

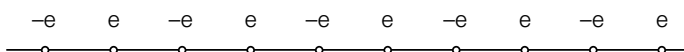
**7.1.** Een puntmassa van 3 kg heeft een snelheid  $6\vec{j}$  (m/s). Een tweede puntmassa van 2 kg beweegt met 8 m/s in een richting die een hoek van  $-30^\circ$  maakt met  $\vec{i}$ . Een derde puntmassa van 5 kg heeft een zodanige snelheid dat het massamiddelpunt van het stelsel van de drie puntmassa's in rust is.

Gevraagd de snelheid van het derde deeltje.

**7.2.** De afstand tussen twee ionen (puntladingen  $-e$  resp.  $+e$ ) noemt men  $r$ . Voor de mutuele potentiële energie van de twee ionen geldt:  $E_{p \text{ mut}} = a/(r^9) - b/r$  waarin  $a$  en  $b$  positieve constanten zijn.

a. Bereken de evenwichtsafstand  $r_0$  (tussen de beide ionen).

b. Een kristal bestaat uit evenveel positieve als negatieve ionen in een bepaalde rangschikking. Wij beschouwen nu een eenvoudig, *ééndimensionaal* model:



(De tekening in gedachten naar links en rechts uitbreiden!).

Bereken in dit model de potentiële energie van 1 ion (niet te dicht bij één der uiteinden van de keten) in het krachtveld van alle andere; neem in de berekening voor de term met  $a$  alleen de naaste burens mee!

*Opmerking:*  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln(2)$ .

c. Er zijn  $N$  ionen per meter; de keten is vele meters lang. Bereken de mutuele potentiële energie per strekkende meter (niet te dicht bij één der uiteinden).

d. Bereken de evenwichtsafstand  $r_0'$  voor de ionen in de keten.

**7.3.** Voor een verzameling van  $N$  puntmassa's geldt:  $\vec{M} = \dot{\vec{L}}_A$  mits het betrekkingspunt  $A$  een *vast* punt is in een inertiestelsel.

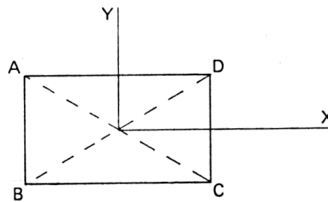
Is  $A$  een bewegend punt, dan is de genoemde betrekking niet juist.

Op deze regel is één uitzondering: kiest men het massamiddelpunt  $C$  van de verzameling als betrekkingspunt, dan is de relatie altijd geldig.

Bewijs dat  $\vec{M}_C = \dot{\vec{L}}_C$  ook als  $\vec{v}_C \neq \vec{0}$ .

## 8. Starre lichamen; rotatie van een lichaam om een vaste as

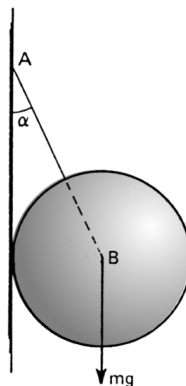
**8.1.** Op een rechthoekige plaat ABCD ( $AB = 0,4$  m lang,  $AD = 0,6$  m lang) werken vijf krachten: In A grijpen aan: een kracht van 6 N die naar B toe is gericht, een kracht van 4 N die naar C wijst, en een kracht van 3 N die naar D wijst; in C grijpen aan: een kracht van 5 N in de richting van punt D, en een kracht van 4 N die naar B wijst.



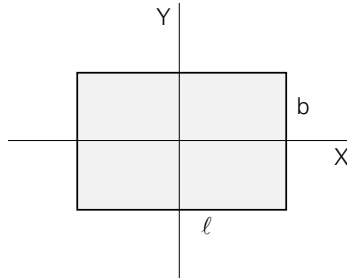
Gevraagd wordt de grootte en de richting van de resulterende kracht, alsook de grootte van het resulterend krachtmoment ten opzichte van respectievelijk A, B en het snijpunt van de diagonalen te berekenen.

**8.2.** De werklijnen van twee krachten  $\vec{F}_1$  en  $\vec{F}_2$ , die in twee verschillende punten van één star lichaam aangrijpen, lopen parallel; de beide krachten hebben dezelfde richting. De afstand tussen hun werklijnen is 0,2 m.  $F_1 = 13$  N; de werklijn van de resultante ligt op een afstand van 0,08 m van die van  $\vec{F}_2$ . Bereken  $F_2$ .

**8.3.** Een draad AB is met het uiteinde A bevestigd aan een punt van een verticale wand; het uiteinde B valt samen met het middelpunt van een homogene bol met massa  $m$ . De bol 'leunt' tegen de (gladde!) muur; daarbij maakt AB een hoek  $\alpha$  met de muur. Bereken de grootte van de spankracht in de draad, en de grootte van de normale kracht die de wand uitoefent op de bol.



- 8.4. a.** Bereken van een overall even dunne homogene plaat (massa  $m$ ; lengte  $\ell$ ; breedte  $b$ ) het traagheidsmoment ( $I_{xx}$ ) t.o.v. de in de figuur aangegeven X-as.



- b.* Idem t.o.v. de Y-as ( $I_{yy}$ ).  
*c.* Idem t.o.v. de Z-as ( $I_{zz}$ ).

**8.5.** Een homogene massieve cilinder kan zonder wrijving draaien om een horizontale as, die samenvalt met zijn lichaamsas. Om de cilinder is een koord gewikkeld, waarvan het ene einde aan de cilinder bevestigd is, terwijl aan het andere, afhangende, einde een lichaam hangt, waarvan de massa 3 kg is. De straal van de cilinder is  $R$ , de massa is 12 kg. De massa van het koord wordt verwaarloosd.

- a.* Toon aan dat het aangehangen lichaam een eenparig versnelde beweging heeft. Hoe groot is de versnelling?  
*b.* Hoe groot is de spankracht in het afhangende gedeelte van het koord?

**8.6.** Aan een balans hangt aan het ene einde een schaal, aan het andere einde een katrol, die een homogene cirkelvormige schijf is, met straal  $R$  en massa 2 kg. Over de katrol hangt een touw, dat aan zijn uiteinden twee 'gewichten' draagt van 3 kg respectievelijk 1 kg. De massa's van de schaal en van het touw worden nul gesteld.

- a.* Indien de katrol geklemd is, en hij zo ruw is, dat het touw er niet over glijden kan, welke massa moet dan op de schaal geplaatst worden om de balans in evenwicht te brengen?  
*b.* Welke massa moet op de schaal geplaatst worden, als de katrol glad is?  
*c.* Indien de katrol ruw is, en niet geklemd is, welke massa houdt dan de balans in evenwicht? Bereken in dit geval ook de versnelling  $a_C$  van het massamiddelpunt van het gehele systeem (katrol + gewichten).

**8.7.** Men blaast gedurende  $t$  seconden langs de rand van een homogene schijf met straal  $R$  en massa  $m$ , die zonder wrijving draaibaar is om zijn (vaste) as door het middelpunt. Daardoor wordt een constante kracht  $\vec{F}$ , gericht langs een raaklijn, op de schijf uitgeoefend. Bereken de kinetische energie die de schijf ten slotte bezit als deze aanvankelijk in rust was.

**8.8.** Een lichaam dat aanvankelijk in rust is, is draaibaar om een vaste as. Men laat er gedurende enige tijd een koppel op werken ( $\vec{T}$  is gericht langs de as) waarvan het

moment  $4 \text{ Nm}$  is. Het lichaam krijgt daardoor een rotatie-energie van  $120 \text{ J}$ . Hoeveel omwentelingen heeft het lichaam gedurende de werking van het koppel gemaakt?

**8.9.** *a.* Een homogene schijf met massa  $m$  en straal  $R$  draait om zijn verticaal opgestelde as met constante hoeksnelheid  $\omega$ . Toon aan dat de impuls van de schijf nul is. Bereken het impulsmoment ten opzichte van het midden van de as. Oefent de as een kracht uit op de schijf?

*b.* Dezelfde schijf draait nu om een excentrische verticale as, aangebracht op afstand  $\frac{1}{2} R$  van het middelpunt, met constante hoeksnelheid  $\omega$ . Hoe groot is nu de impuls? Bereken het impulsmoment ten opzichte van het midden van de as. Bereken de grootte van de kracht die de as uitoefent.

**8.10.** Een man staat op een tafeltje dat zonder wrijving om een verticale as kan draaien. Hij heeft in elke hand een gewicht waarvan de massa  $3 \text{ kg}$  is en draait met gestrekte armen — spanwijdte  $2 \text{ m}$  — rond met hoeksnelheid  $1 \text{ rad/s}$ . Hij trekt vervolgens de armen in tot een spanwijdte van  $1 \text{ m}$  en draait dan rond met hoeksnelheid  $1,6 \text{ rad/s}$ .

*a.* Hoe groot is het traagheidsmoment van de man plus het tafeltje als dat tijdens de handeling constant ondersteld wordt?

*b.* Tijdens het intrekken van de armen heeft de man arbeid op de gewichten verricht. Bereken deze arbeid.

*c.* Ga na dat deze arbeid gelijk is aan de toeneming van de rotatie-energie.

**8.11.** Een dunne homogene staaf is in een horizontaal vlak draaibaar om een verticale as door een van de uiteinden van de staaf. Men schiet tegen het andere einde van de staaf, in het draaivlak van de staaf en in een richting loodrecht erop, een kogel waarvan de massa  $m$  en de snelheid  $\vec{v}$  is. De massa van de staaf is  $m_s$ ; de lengte is  $\ell$ . De botsing van kogel en staaf is volkomen veerkrachtig.

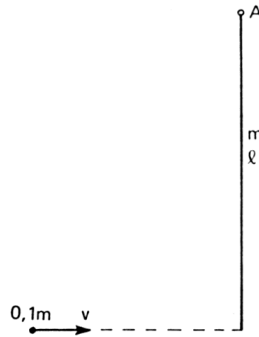
*a.* Met welke hoeksnelheid draait de staaf na de botsing?

*b.* Hoe groot zijn de krachtstoten die door de kogel op de staaf en door de staaf op de kogel uitgeoefend worden?

**8.12.** Een dunne homogene staaf (massa  $m$ , lengte  $\ell$ ) hangt aan een horizontale as door één van zijn uiteinden (A) en kan om die as zonder wrijving draaien in een verticaal vlak. Men schiet tegen het andere uiteinde van de staaf, in het draaivlak van, en loodrecht op, de staaf een kogeltje (massa  $0,1 \text{ m}$ ) met snelheid  $\vec{v}$ . De botsing is volkomen elastisch.

De botsingsduur is uiterst kort, dat wil zeggen de staaf heeft, onmiddellijk na de botsing, nog geen merkbare verdraaiing ondergaan.

*a.* Bewijs dat het traagheidsmoment van de staaf ten opzichte van de as door A gelijk is aan  $\frac{1}{3}m\ell^2$ .



- De totale impuls onmiddellijk na de botsing is *niet* gelijk aan de impuls vóór de botsing. Wat is daarvan de oorzaak?
- Bereken de hoeksnelheid van de staaf onmiddellijk na de botsing.
- Bereken de horizontale krachtstoot die de as tijdens de botsing op de staaf heeft uitgeoefend.

**8.13.** Een man staat op een stilstaand tafeltje dat zonder wrijving om een verticale as kan draaien. Het traagheidsmoment van man en tafeltje samen, ten opzichte van de draaiingsas van het tafeltje, is  $2,5 \text{ kgm}^2$ . Een helper geeft de man op het tafeltje een draaiend wiel aan, dat deze bij de as vastgrijpt. Het wiel wentelt 4 maal per seconde om zijn eigen as; het traagheidsmoment van het wiel ten opzichte van deze as is  $1 \text{ kgm}^2$ .

- Welke hoeksnelheid krijgen tafeltje en man als de helper het wiel met de as in de verticale richting heeft aangegeven?
- De man verplaatst het wiel evenwijdig aan zichzelf, zó dat de assen van het wiel en van het tafeltje in elkaars verlengde liggen. Daarna kantelt hij de wielas  $\pi$  rad. Hoe groot is daarna de hoeksnelheid van man plus tafel?
- De man grijpt daarna de omtrek van het wiel met de hand vast. Hoe groot wordt dan zijn hoeksnelheid?

**8.14.** Een plat linaaltje, dat een lengte van  $0,2 \text{ m}$  heeft, ligt zo op een tafel, dat het  $0,1 \text{ m}$  buiten de rand uitsteekt. Men laat van  $5 \text{ m}$  hoogte een knikker van  $0,010 \text{ kg}$  op het uiterste punt van het vrije uiteinde van het linaaltje vallen. Stel de botsing is volkomen veerkrachtig.

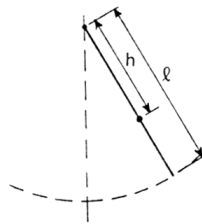
- Hoe groot moet de massa van het linaaltje zijn, opdat de knikker bij de botsing zijn snelheid geheel verliest?
- Hoe groot is in dat geval de hoeksnelheid van het linaaltje onmiddellijk na de botsing?

## Fysische slingers

**8.15.** Een staaf met lengte  $\ell$  hangt aan een horizontale as door één van de uiteinden.

- Bereken de lengte van een mathematische slinger die dezelfde trillingstijd bij kleine amplitude zou hebben als de staaf.
- De staaf hangt nu aan een horizontale as die de staaf doorboort in een punt dat op de in vraag a gevonden afstand ligt van het onderste uiteinde. Bereken de trillingstijd voor kleine amplitude.

**8.16.** Een dunne staaf van lengte  $\ell$  en massa  $m$  kan slingeren om een horizontale as door één van de uiteinden. Op de staaf wordt een puntmassa  $m$  aangebracht op een afstand  $h$  van de rotatie-as. De versnelling van de vrije val is  $g$ . Het traagheidsmoment van de staaf (zonder puntmassa) ten opzichte van de rotatieas is  $\frac{1}{3} m\ell^2$ .



- Druk de trillingstijd  $T$  voor kleine slingeren uit in  $g$ ,  $\ell$  en  $h$ .
- Bestaat er een waarde voor  $h \neq 0$  waarbij de trillingstijd met extra massa  $m$  gelijk is aan die zonder extra massa? Zo ja, welke waarde?

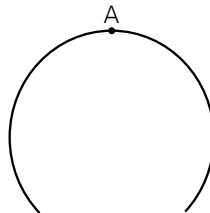
**8.17.** Een dunne hoepel met straal  $R$  en massa  $m$  is in een punt van zijn omtrek opgehangen. Bereken de slingertijd (voor kleine uitwijkingen):

- indien hij in zijn eigen vlak slingert;
- indien hij loodrecht op zijn eigen vlak slingert.

Kunt u zonder berekening inzien in welk geval de slingertijd het grootst is?

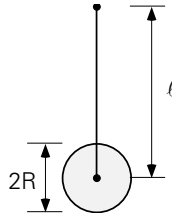
**8.18.** (nieuwe tekst) Van een hoepel ontbreekt een kwart gedeelte.

De massa van deze gedeeltelijke hoepel is  $m$ ; zijn straal is  $R$ . De hoepel kan slingeren in een verticaal vlak om een horizontale as door het punt A; de as staat loodrecht op het slingervlak.



- Bereken de afstand tussen punt A en het massamiddelpunt C.
- Bereken de slingertijd voor slingeren met kleine amplitude.

**8.19.** Een slinger bestaat uit een lange dunne staaf die aan het ene uiteinde een massieve cirkelvormige schijf draagt. De draaiingsas van de slinger bevindt zich aan het andere einde van de staaf en staat loodrecht op het vlak van de schijf; het middelpunt van de schijf ligt in het eerstgenoemde einde. De lengte van de staaf is  $\ell$ , de massa  $m$ ; de massa van de schijf is  $M$ , de straal  $R$ . Bereken de slingertijd.



**8.20.** Twee bollen, waarvan de massa's 5 kg en 2 kg zijn, zijn verbonden door een staaf van 0,80 m lengte. De diameters van de bollen zijn klein ten opzichte van de lengte van de staaf; de massa van de staaf wordt verwaarloosd ten opzichte van die van de bollen. De staaf is draaibaar om een horizontale as opgehangen in een punt dat 0,60 m van de zwaarste bol verwijderd is.

- Bereken de slingertijd als men dit stelsel met kleine amplitude laat slingeren.
- Indien de bollen niet als puntmassa's opgevat mogen worden, en de gegeven lengte van de staaf de afstand van de middelpunten voorstelt, is de slingertijd dan groter of kleiner dan de zojuist berekende?

**8.21.** Een dunne platte schijf met massa  $m$  en straal  $R$  is draaibaar om een door het middelpunt gaande horizontale as die in het vlak van de schijf ligt (doorgetrokken streep in de tekening).

- Bewijs dat het traagheidsmoment ten opzichte van die as gelijk is aan  $\frac{1}{4} mR^2$ .
- Als de as niet door het middelpunt gaat maar wel in het vlak van de schijf ligt (onderbroken streeplijn in de tekening), op afstand  $s$  van de vorige positie, kan men de schijf als fysische slinger laten fungeren. Voor een bepaalde waarde van  $s$  (uitgedrukt in  $R$ ) is de slingertijd (voor kleine amplitude) minimaal. Bereken deze waarde van  $s$ .

# Antwoorden

## 1. Inleiding

- 1.1.  $c_w$  is dimensieloos.  
 1.2.  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ .  
 1.3.  $r = 13$  (m);  $\varphi = 0,93$  (rad);  $\theta = 0,39$  (rad).  
 1.4.  $x = -3,3$  (m);  $y = -3,8$  (m).

## 2. Kinematica van puntvormige lichamen

- 2.1. a.  $\dot{x} = -t^2 + 3t + 4$     b.  $x_{\max} = 18,7$  (m)    c.  $t = 6,4$  (s).  
 2.2.  $x = -1,2 \sin(1,57t) + 1,9t$ .  
 2.3. b.  $x = \frac{v_0}{b}(1 - e^{-bt})$   
 c.  $\lim_{t \rightarrow \infty} x = \frac{v_0}{b}$ .  
 2.4. b.  $x = \frac{1}{b} \ln(bv_0t + 1)$ .  
 2.8.  $-3,9$  respectievelijk  $41 \text{ m/s}^2$ .  
 2.9.  $v = 15 \text{ m/s}$ ;  $\omega = 0,6 \text{ rad/s}$ ;  $\alpha = 0,4 \text{ rad/s}^2$ ;  $a = 13,5 \text{ m/s}^2$ ;  $0,84 \text{ rad}$ .  
 2.10. a.  $x^2 + y^2 = 4$     b.  $v = 2\omega$ .  
 2.11. a.  $\vec{r}_1 = (4; 25)$ ;  $\vec{v}_1 = (4; -10)$     b.  $\Delta\vec{r} = (4; -5)$ ; de hoek is  $0,90 \text{ rad}$   
 c.  $\Delta\vec{v} = \vec{g} \cdot 1$  (recht omlaag) dus hoek  $= \frac{1}{2} \pi \text{ rad}$   
 d.  $a_{\tan} = 9,3 \text{ m/s}^2$ ;  $a_n = 3,7 \text{ m/s}^2$     e.  $R = 1,6 \text{ m}$ .  
 2.12. b.  $4,5 \text{ m}$     c.  $r = 2,58 \text{ m}$ ;  $\varphi = 0,56 \text{ rad}$   
 d.  $v_{\text{rad}} = -4,72 \text{ m/s}$ ;  $v_{\text{tr}} = 11,4 \text{ m/s}$ .  
 2.13. Stroming ongeveer in zuidwestelijke richting; hoek tussen stroomsnelheid en echte snelheid van de boot is ruim  $0,9 \text{ rad}$ ;  $v_{\text{str}} = 3,6 \text{ km/h}$ .  
 2.14.  $-7\vec{i}$ .

## 3. De grondwetten van de dynamica

- 3.1. Neen.  
 3.2. Neen.

## 4. Dynamica van een puntmassa

- 4.1.  $a_n = \frac{24}{25} \frac{c}{a^2 m}$  ;  $a_{\tan} = \frac{2}{25} \frac{c}{a^2 m}$  ;  $R = 6a$ .  
 4.2. a.  $630 \text{ N}$     b.  $1170 \text{ N}$ .

- 4.3. a.  $0,45 \dot{v} + 3v = 4$     b. 1,3 m/s    c. 0,65 m/s.
- 4.4. c. 1,3 m/s    d.  $7,9 \text{ m/s}^2$     e. 0,063 m.
- 4.5. a.  $T = 2\pi\sqrt{m\ell/2S_0}$   
 b. De teruggedrijvende kracht is evenredig met de derde macht van de uitwijking.
- 4.7. a. 0,1 rad    b. 0,1 rad.
- 4.8. a.  $\sqrt{2gR}$     b. 3 mg    c.  $3mg \cos \varphi$     d.  $(1 + 2(h/p)) \text{ mg}$ .
- 4.9.  $\varphi = 0,73 \text{ rad}$ .
- 4.10.  $\sqrt{4g\ell}$  respectievelijk  $\sqrt{5g\ell}$ .
- 4.11. a.  $h = 2,5R$     b.  $v = \sqrt{gR(3 + 2 \cos \varphi)}$     c.  $\dot{v} = -g \sin \varphi$   
 d.  $T = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{3 + 2 \cos \varphi}} \approx 4\sqrt{\frac{R}{g}}$ .
- 4.13. 40 N;  $2 \text{ m/s}^2$ .
- 4.14. 80 N.
- 4.15. a.  $F_s = 3m_1m_2g/(4m_2 + m_1)$ .  
 b.  $\vec{a}_1 = -(2m_2 - m_1) \vec{g}/(4m_2 + m_1)$ ;  $\vec{a}_2 = +2(2m_2 - m_1) \vec{g}/(4m_2 + m_1)$ .
- 4.16. a.  $(1 - \frac{x}{\ell}) \frac{F}{A}$     b. 0.
- 4.17. a.  $p = F_s/bR$     b.  $\omega = \sqrt{F_s/\lambda R^2}$ .
- 4.18. a. 15 kg    b. 2,3 m/s.

## 5. Arbeid, energie, impuls, impulsmoment

- 5.1. 0,073 m.
- 5.2. b. gedaald over  $2mg/b$     c.  $mg/b$ .
- 5.3. b.  $\vec{F}$  heeft dezelfde richting als  $\vec{i}$  voor  $x < 0$  of  $x > 2$  m; daartussen heeft  $\vec{F}$  de tegengestelde richting    c. tussen 1 en 5 J  
 d. tussen  $x = -1$  en  $x = 2$  m.
- 5.4. b. 45,3 J    c. 29,3 J    d. 40 J.
- 5.5. b. 16 J    c.  $E_p = -x^2y + \text{constante}$ .
- 5.6. b.  $-10a$ .
- 5.7. a.  $p = 1$  en  $q = 4$     b.  $a_{\text{tan}} = 10 \text{ m/s}^2$ ;  $R = 0,9 \text{ m}$     c.  $-2 \text{ J}$ .
- 5.8. a. Stabiël in  $x = -a$ ; labiel in  $x = +a$   
 b.  $v \geq \sqrt{c/am}$  respectievelijk  $v > \sqrt{2c/am}$ .
- 5.9. b.
- | h (m)          | $E_p$ (J)        | $mg_0h$ (J)      |
|----------------|------------------|------------------|
| $5 \cdot 10^4$ | $4,9 \cdot 10^5$ | $4,9 \cdot 10^5$ |
| $5 \cdot 10^5$ | $4,5 \cdot 10^6$ | $4,9 \cdot 10^6$ |
| $5 \cdot 10^6$ | $2,7 \cdot 10^7$ | $4,9 \cdot 10^7$ |
| $\infty$       | $6,2 \cdot 10^7$ | $\infty$         |

**5.10.** a.  $E_p = -\frac{c}{r} + \text{const.}$     b.  $E_p = +\frac{ac}{2r^2} + \text{const.}$

c.  $E_p = -\frac{c}{r_1} + \frac{ac}{2r_2^2} + \text{const.}$     d.  $-0,9 c/a$

e.  $-0,4c/a$     f.  $2\sqrt{c/am}$ .

**5.11.**  $A = 5 \text{ (m); } \beta = -0,64 \text{ (rad).}$

**5.12.**  $T = 1,3 \text{ s.}$

**5.13.** a.  $x_0 = \sqrt[3]{\frac{c}{k}}$     b.  $E_p = \frac{c}{x} + \frac{1}{2} kx^2 - \frac{3}{2} \frac{c}{x_0}$     c.  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$ .

**5.14.** b.  $r_0 = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$     d.  $T = 2\pi\sqrt{\frac{am}{3b^2}}$ .

**5.15.** a.  $20 \text{ kg m s}^{-1}$     b.  $103 \text{ m/s}$     c.  $96 \text{ m/s}$     d.  $8,5 \text{ m/s.}$

**5.16.** a.  $\frac{7}{6} \text{ m/s}$     b.  $1 \text{ m/s}$     c.  $1 \text{ m/s.}$

**5.17.** a.  $\vec{v} = \vec{v}_0/(1 + rt/m_0)$     b.  $\vec{v}_0 e^{-rt/m_0}$

c. respectievelijk na  $\frac{m}{r}$  en na  $0,69 \frac{m}{r}$ .

**5.18.** Ei:  $0,22 \text{ Ns}$ ; bal:  $0,45 \text{ Ns}$ .

**5.19.**  $\vec{F} = -nm\vec{v}$  respectievelijk  $-2nm\vec{v}$ .

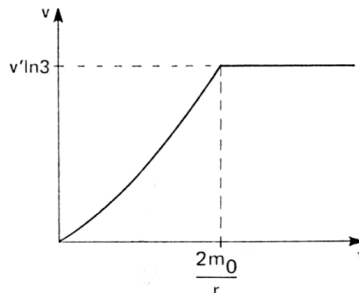
**5.20.** Het ei moet een krachtstoot opvangen die de snelheid nul maakt. Dat kan door een grote kracht, maar ook door een betrekkelijk kleine kracht.

**5.21.** De wrijvingskracht die de weggeslagen steen op de andere stenen uitoefent is bij snel wegslaan vrijwel even groot als bij langzaam wegtrekken. Maar de werkingstijd, en dus de meegedeelde impuls, is bij snel wegslaan kleiner dan bij langzaam wegtrekken.

**5.22.**  $5,0 \cdot 10^3 \text{ m/s.}$

**5.23.** a.  $F = rv'$     b.  $v = v' \ln\left(\frac{3m_0}{3m_0 - rt}\right)$ ; zie figuur.

*Toelichting:* op tijdstip  $t$  is de massa van de raket  $m (= 3m_0 - rt)$  en de snelheid  $\vec{v} \Rightarrow \vec{p} = m\vec{v}$ . Op  $t + dt$  is de massa  $m - r dt$ , de snelheid  $\vec{v} + d\vec{v}$ , en dus de impuls:  $(m - r dt)(\vec{v} + d\vec{v})$ . De uitgestoten massa had impuls  $(r dt)\vec{v}$  (reeds inbegrepen in  $m\vec{v}$ ) en heeft nu de impuls  $r dt(v - v')(\vec{v}/v)$ .



Impulsbehoud  $\Rightarrow mv = (m - r dt)(v + dv) + r dt(v - v')$   
 $\Rightarrow 0 = m dv - rv' dt. \dots$  enzovoort ...

**5.24. b.**  $v(20) = 3,3 \cdot 10^3$  m/s;  $h = 29$  km.

**5.25. a.**  $2\vec{i} + 6t\vec{j}$     **b.**  $6t^2\vec{i} - 2t\vec{j} + 4t^3\vec{k}$   
**c.**  $2t\vec{i} + 3t^2\vec{j} - \vec{k}$ , respect.  $2t^3\vec{i} - t^2\vec{j} + t^4\vec{k}$ .

**5.26. a.**  $\frac{1}{2}(a - f) v_0$     **b.**  $T = \frac{2\pi a}{v_0} \sqrt{\frac{a+f}{a-f}}$ .

**5.27.**  $r_m v_m = a v_0$ ;  $m v_m^2 - 2c/r_m = m v_0^2$ .

**5.28. a.**  $\frac{1}{2} m R v_0$     **b.**  $v_{trans} = \frac{1}{2} v_0 R/r$     **d.**  $h = 0,87R$

**e.**  $\rho = \frac{1}{4} R$     **f.**  $\sqrt{2g_0 R}$ .

**5.29. c.**  $\rho = 3R$ .

**5.30. b.**  $v_2 = 0,23v_1$     **c.**  $v_1 = 1,28v_0$     **d.**  $\rho = 1,63R$ .

**5.31. a.**  $\vec{r}_0 = \vec{i}r_0$ ;  $\vec{v}_0 = \vec{j}v_0$

**b.**  $(x/r_0)^2 + (\omega y/v_0)^2 = 1$ : ellips met halve assen  $r_0$  en  $v_0/\omega$

**c.**  $\vec{F} = -\vec{i}m r_0 \omega^2 \cos \omega t - \vec{j}m v_0 \omega \sin \omega t = -m\omega^2 \vec{r}$ .

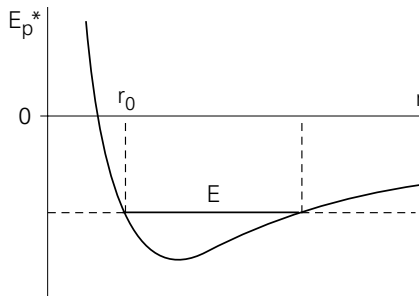
**d.**  $v = \sqrt{v_0^2 + \omega^2(r_0^2 - r^2)}$ . (Volgt uit behoud van energie; het krachtenveld is volgens (c) immers conserverend.)    **e.**  $\vec{r}_0 \times m\vec{v}_0 = \vec{r} \times m\vec{v}$ . (Het impulsmoment is constant omdat de kracht centraal is.) Hieruit volgt  $v_{trans} = (r_0/r)v_0$ .

**5.32. a.** Energiebehoud en behoud van impulsmoment (ten opzichte van O)

$\Rightarrow r$  altijd  $\leq \frac{r_0}{\sqrt{\sin \alpha_0}}$

**b.**  $\rho = \frac{1}{3} r_{max}$ .

**5.33. a.**  $E = -\frac{1}{4} c/r_0$ ;  $L = \sqrt{\frac{3}{2} c m r_0}$ .    **b.**  $E_p^* = \frac{3}{4} c r_0/r^2 - c/r$ :



**c.** In het perihelium is  $\dot{r} = 0 \Rightarrow E = E_p^*(r_0)$ . In het aphelium (A) is weer  $\dot{r} = 0 \Rightarrow E_p^*(r_A) = E = E_p^*(r_0)$ .

Hieruit volgt:  $\frac{3}{4} c r_0/r_A^2 - c/r_A = -\frac{1}{4} c/r_0 \Rightarrow r_A = 3r_0$ .

**6. Twee deeltje systemen; botsingen**

**6.1.** a.  $x_C = 37 \text{ m}$     b.  $E_p = 0,01r^2 \text{ (J)}$

c. 4,1 en 2,7 m/s    d. 74,2 m.

**6.2.**  $r_{\min} = \frac{(m_1 + m_2)q_1q_2}{2\pi\epsilon_0 m_1 m_2 v_0^2}$ .

**6.3.** a.  $r_{\min} = 2c/m_1 v_0^2$

b.  $\vec{v}_1 = -\vec{v}_0 \sqrt{m_2 / (m_1 + m_2)}$ ;  $\vec{v}_2 = \vec{v}_0 (m_1/m_2) \sqrt{m_2 / (m_1 + m_2)}$

**6.4.** De dissociatie-energie is de energie nodig om de atomen van elkaar te verwijderen tot hun interactie nul geworden is. De gravitationele interactie-energie in het molecuulverband ten opzichte van de gedissocieerde toestand is

$$\int_{r_0}^{\infty} -\frac{Gm^2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r}. \text{ Ga na dat de absolute waarde hiervan ongeveer } 3 \cdot 10^{-36} \times \text{ de}$$

gemeten dissociatie-energie is.

**6.5.** b.  $1,2 \cdot 10^3 \text{ kgm/s}$     c. 200 m/s (schuin omhoog)    d.  $2,9 \cdot 10^5 \text{ J}$ .

**6.6.** b.  $r_{\min} = \sigma$     c.  $r_0 = \sigma \sqrt[6]{2}$ ; interactie-energie:  $-\epsilon$

d.  $f(r) = -\frac{24\epsilon\sigma^6}{r^7} \left(1 - \frac{2\sigma^6}{r^6}\right)$     e.  $T = 0,59\sigma \sqrt{\frac{m}{\epsilon}}$ .

**6.7.** a.  $-\frac{7}{3}\vec{v}$  respectievelijk  $-\frac{1}{3}\vec{v}$ ; b.  $-\frac{1}{3}\vec{v}$ ; 56% van de kinetische energie is omgezet in warmte en vervormingsenergie.

**6.8.**  $(1 + m_1/m_2)\epsilon$ .

**6.9.** 267 m/s.

**6.10.** 0,46 rad.

**6.11.** a.  $\frac{1}{3}\vec{v}$     b.  $-\frac{1}{3}\vec{v}$     c. 0,16v    d. 0,55v.

**6.12.** 25 m/s onder ca. 0,64 rad met de oorspronkelijke snelheid van de lichtste bol.

**6.13.** a.  $\vec{u} = -\vec{v} + 2\vec{V}$ ; b.  $\vec{u} = \vec{0}$ .

**6.14.** a. 0,95    b. 1,6 s

c. ongeveer 38 s (de knikker is dan oneindig vaak heen en weer gegaan! De werkelijkheid is ingewikkelder: de knikker gaat elastisch vibreren, waarbij door inwendige wrijving een grotere dissipatie van energie plaatsvindt. De knikker komt daardoor eerder tot rust.)

**6.15.** a.  $2mv_0 \cos \varphi$  (loodrecht op het oppervlak)

c.  $(2\pi n v_0 R^2 \sin \varphi \cos \varphi \Delta\varphi)(2mv_0 \cos \varphi) \cos \varphi = 4\pi n m v_0^2 R^2 \sin \varphi \cos^3 \varphi \Delta\varphi$ .

d.  $\pi n m v_0^2 R^2 = (n v_0 \cdot \pi R^2) m v_0 = \text{de totale impuls van de moleculen die in 1 seconde de bol treffen}$

e. nul.

**6.16.**  $\vec{L}_0 = 48\vec{k}$     b.  $\vec{L}_C = 14,4\vec{k}$     c.  $\vec{r}_C \times m\vec{v}_C = 33,6\vec{k}$

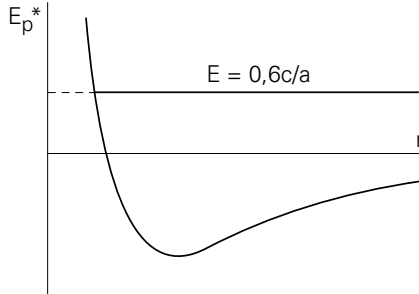
d. 35 J    e. 15,6 J    f.  $\frac{1}{2} m v_C^2 = 19,4 \text{ J}$     g.  $\frac{1}{2} \mu v_{\text{rel}}^2 = 15,6 \text{ J}$ .

**6.17.** a. Behoud van impuls; behoud van impulsmoment ten opzichte van ieder

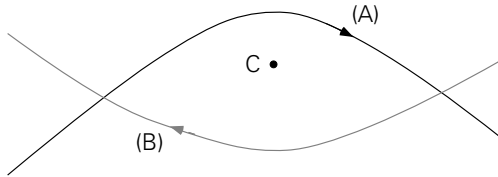
willekeurig punt; behoud van mechanische energie.

b.  $R_B = \frac{m_A}{m_B} R_A$ .

6.18. a.  $\vec{v}_c = 0,6\vec{v}_0$ . b.  $L_c = 1,2\sqrt{ca}$ .



c.



d.  $E_p^* = 0,6ca/r^2 - c/r$ ;  $E_p^* + \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,2v_0^2 = 0,6 c/a$ .

$r = r_m$  als  $E_p^* = E \Rightarrow 0,6 ca/r_m^2 - c/r_m = 0,6 c/a$ .

Oplossing:  $r_m = 0,47 a$ .

## 7. Dynamica van een verzameling puntmassa's

7.1. Van het derde deeltje is  $v_x = -2,8$  en  $v_y = -2$  m/s.

7.2. a.  $r_0 = \sqrt[8]{(9a/b)}$ ; b.  $E_p = 2a/(r^9) - 1,39b/r$ ;

c.  $E_p' = N\{a/(r^9) - 0,69b/r\}$ ; d.  $r_0' = 1,05r_0$ .

## 8. Starre lichamen; rotatie van een lichaam om een vaste as

8.1.  $\vec{F}_{res} = 2,33\vec{i} - 3,22\vec{j}$ ;  $\vec{M}_A = 1,4\vec{k}$ ;  $\vec{M}_B = 0,47\vec{k}$ ;  $\vec{M}_S = 1,9\vec{k}$

8.2. 19.5 N.

8.3.  $F_s = mg/\cos \alpha$ ;  $F_n = mg \tan \alpha$ .

8.4.  $I_{xx} = \frac{1}{12} mb^2$ ;  $I_{yy} = \frac{1}{12} m\ell^2$ ;  $I_{zz} = \frac{1}{12} m(b^2 + \ell^2)$ .

8.5. a.  $\frac{1}{3} g$  b. 20 N.

8.6. a. 6 kg b. 5 kg c. 5,2 kg; 1,3 m/s<sup>2</sup>.

8.7.  $F^2t^2/m$ .

8.8. Bijna 4,8 omwentelingen.

- 8.9.** a. Impulsmoment  $\frac{1}{2}mR^2\omega$ ; geen kracht    b. impuls  $\frac{1}{2}mR\omega$  waarvan de richting steeds verandert; impulsmoment  $\frac{3}{4}mR^2\omega$ ; kracht door as uitgeoefend is  $\frac{1}{2}mR\omega^2$ .
- 8.10.** a.  $6 \text{ kgm}^2$     b.  $3,6 \text{ J}$ .
- 8.11.** a.  $\frac{6mv}{(m_s + 3m)\ell}$     b.  $\frac{2mm_s v}{m_s + 3m}$ .
- 8.12.** b. Uitwendige kracht bij A    c.  $\frac{6}{13} \frac{v}{\ell}$     d.  $\frac{1}{13} m\vec{v}$ .
- 8.13.** a. 0    b.  $20 \text{ rad/s}$     c.  $7,2 \text{ rad/s}$ .
- 8.14.** a.  $0,030 \text{ kg}$     b.  $100 \text{ rad/s}$ .
- 8.15.** a.  $\frac{2}{3}\ell$     b.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}\ell / g}$ .
- 8.16.** a.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{6h^2 + 2\ell^2}{3g(\ell + 2h)}}$     b. ja:  $h = \frac{2}{3}\ell$ .
- 8.17.** a.  $2\pi \sqrt{2R / g}$     b.  $2\pi \sqrt{\frac{3}{2}R / g}$ .
- 8.18.** a.  $0,70R$     b.  $2\pi \sqrt{2R / g}$ .
- 8.19.**  $2\pi \sqrt{\frac{3MR^2 + 6M\ell^2 + 2m\ell^2}{3(2M + m)\ell g}}$ .
- 8.20.** a.  $T = 1,7 \text{ s}$     b. groter.
- 8.21.** b.  $s = \frac{1}{2}R$ .

## 9. Vlakke dynamica van een star lichaam

- 9.1.** a.  $Ft$     b.  $Ft^2/2m$     c.  $F^2t^2/2m$     d. translatie-energie  
 e.  $Ft$ ;  $Rf_t$     f.  $Ft^2/2m$     g.  $R^2Ft^2/2I$     h.  $(mR^2 + I)F^2t^2/2mI$   
 i. translatie-energie  $F^2t^2/2m$  en rotatie-energie  $R^2F^2t^2/2I$ .
- 9.3.** Het zwaartepunt van de staaf beweegt verticaal omlaag. Kies de z-as loodrecht op de tafel, richting naar boven positief. Dan is  $v_C = -dz_C/dt$ ;  $\omega = -d\beta/dt$ . Anderzijds is  $z_C = \frac{1}{2}\ell \sin \beta$ . Daarmee:  $v_C = \frac{1}{2}\ell \omega \cos \beta$ .  
 Verhouding  $E_{\text{transl.}}:E_{\text{rot.}} = 3 \cos^2\beta:1$ ; als  $\beta = 0$  dus  $3:1$ .
- 9.4.** a. Het zwaartepunt gaat verticaal naar beneden, waarbij de asrichting van de staaf niet verandert.  
 b.  $p = \frac{2m\sqrt{2gh}}{1 + 3\cos^2\alpha}$ . Zijn de snelheden van het massamiddelpunt C van de staaf onmiddellijk vóór en na de botsing  $\vec{v}_1$  en  $\vec{v}_2$ , dan is  $\vec{p} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$ . Daaruit volgt  $v_2 = (p/m) - \sqrt{2gh}$ . De rotatie om een as door C volgt uit het door stoot  $\vec{p}$  meegedeelde impulsmoment:  $p \cdot \frac{1}{2}\ell \cos \alpha = I_C \omega$ , dus  $\omega = \frac{p\ell \cos \alpha}{2I_C}$