

# 1

## THEORIE EN MODEL

Als weerstanden, condensatoren, transistoren, generatoren en andere elektrotechnische bouwstenen zodanig met elkaar worden verbonden dat er elektrische stromen kunnen vloeien, ontstaat een *elektrisch circuit*, ook wel een elektrische *stroomketen* of *schakeling* genoemd. Elektrische circuits zijn in staat om allerlei technisch nuttige functies te verrichten. Zij spelen een sleutelrol in communicatie-apparatuur, computers en robots. Maar ook een uitgestrekt hoogspanningsnet is een elektrisch circuit.

De ingenieurswetenschap die het elektrische gedrag van elektrische circuits in formele zin bestudeert, heet de *netwerkteorie*. (De naam verwijst naar de mogelijke complexiteit van de bedrading; de Engelse benaming ‘*circuit theory*’ legt het accent op het circuleren van elektrische stromen in die bedrading.) Elektrische *spanningen* en *stromen* zijn de basisgrootheden, terwijl de bouwstenen waarmee de circuits zijn samengesteld als abstract *model* worden behandeld. Meer dan de overwegend toepassingsgerichte vakgebieden, tracht de circuittheorie te *generaliseren* en te *unificeren*. De resulterende analyse- en ontwerptheorieën dragen een sterk methodologisch karakter.

De circuittheorie is pas echt tot bloei gekomen met het gebruik van *lange-afstandskabels* ten behoeve van het eerste telefoonverkeer. De hieruit voortvloeiende theoretische inzichten hebben de basis gelegd voor wat nu de *klassieke filtertheorie* heet. Tevens voerde de noodzaak tot versterking van het spraaksignaal tot een ontwerptheorie voor zogeheten *teruggekoppelde versterkers*. De eerdere uitvinding van de elektronenbuis was daarbij van prominent belang. Een volgende, nog steeds actuele ontwikkeling werd in gang gezet door de revolutionaire opkomst van de *halfgeleidertechnologie*. Na de definitieve doorbraak van de *transistor*, werd het spoedig mogelijk om complete elektrische circuits van toenemende omvang als een samenhangend geheel van zeer geringe afmetingen te vervaardigen. Zulke *geïntegreerde circuits* staan bekend onder de naam *chip*.

Aldus is er in de loop der tijd een groeiende behoefte ontstaan om een steeds grotere *klasse van bouwstenen* in de theorie te betrekken, en werd het gewenst om bedradingen met alsmaar toenemende *complexiteit* te beheersen (Zie [1] voor een historisch overzicht.). Daarentegen is pas kort geleden onderkend dat zelfs zeer *eenvoudige*, maar essentieel *niet-lineaire* circuits een onverwacht ingewikkeld, *chaotisch* aandoend elektrisch gedrag kunnen vertonen [2].

Dit hoofdstuk biedt een *algemene oriëntatie* op de wetenschappelijke basis van de circuittheorie. Daarbij stellen wij ons op het standpunt dat de *elektromagnetische veldgrootheden* de fundamentele elektrotechnische entiteiten zijn. Beschouwingen van kwalitatieve aard moeten duidelijk maken dat men in de circuittheorie kan overstappen naar spanningen en stromen, daarbij afstand nemend van de elektromagnetische velden. Het type overweging dat daarbij wordt gehanteerd, is karakteristiek voor elke *modelvorming*. Kortweg is dit de kunst om de realiteit oordeelkundig in rekening te brengen. Het is een steeds terugkerend thema in dit hoofdstuk.

Onderdelen van het betoog zijn een voorzet op hetgeen in volgende hoofdstukken opnieuw aan de orde komt. *Daarom dienen minder bekende en niet nader toegelichte begrippen bij eerste lezing voor kennisgeving te worden aangenomen.* Niettemin ontwikkelt de lezer gaandeweg enig gevoel voor modelvorming en krijgt hij greep op het abstracte karakter van de theorie.

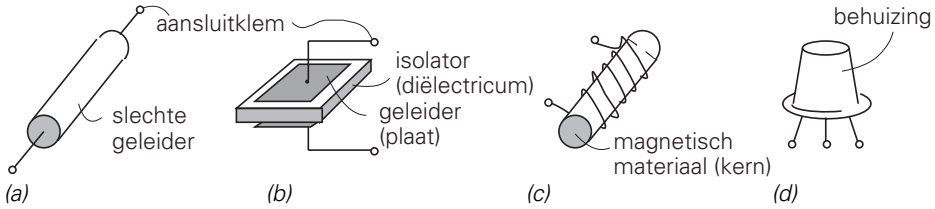
Na de inleidende notities van paragraaf 1.1, wordt in paragraaf 1.2 het elektrische gedrag van de *condensator*, de *spoel* en de *weerstand* behandeld. Daarbij wordt verondersteld dat elektrische spanningen en stromen steeds ondubbelzinnig zijn te meten met respectievelijk volt- en ampèremeters. In de praktijk blijkt dit echter alleen het geval als de aansluitdraden van de meters voldoende kort kunnen blijven. Genoemde veronderstelling (hypothese) is evenwel cruciaal voor het gelden van de circuittheorie. Daarom wordt in paragraaf 1.4 onderzocht hoe één en ander met elkaar valt te rijmen. Daar worden ook *criteria* gevonden waarbinnen de circuittheorie van toepassing is. Zij worden toegepast op zulke uiteenlopende elektrotechnische vakgebieden als de elektriciteitsvoorziening en de micro-elektronica.

In paragraaf 1.3 wordt een *elektrisch circuit* gedefinieerd als een samenstel van circuitelementen. Een *circuitelement* brengt een niet verder te ontleden elektromagnetisch verschijnsel apart in rekening. Onder de in paragraaf 1.4 besproken voorwaarden blijkt het mogelijk om het elektrische gedrag van elektrische circuits met behulp van een beperkte klasse van zulke elementen of primitieven te verklaren. Voorts komen in paragraaf 1.3 allerlei *modelkenmerken* aan de orde. Paragraaf 1.5 geeft een overzicht van de gebruikte *eenheden*.

## 1.1 HET ELEKTRISCHE CIRCUIT

Onder een *elektrisch circuit* verstaan we een samenstel van elektrotechnische bouwstenen of *componenten*, onderling verbonden door elektrische stroomgeleiders (bijvoorbeeld koperdraad).

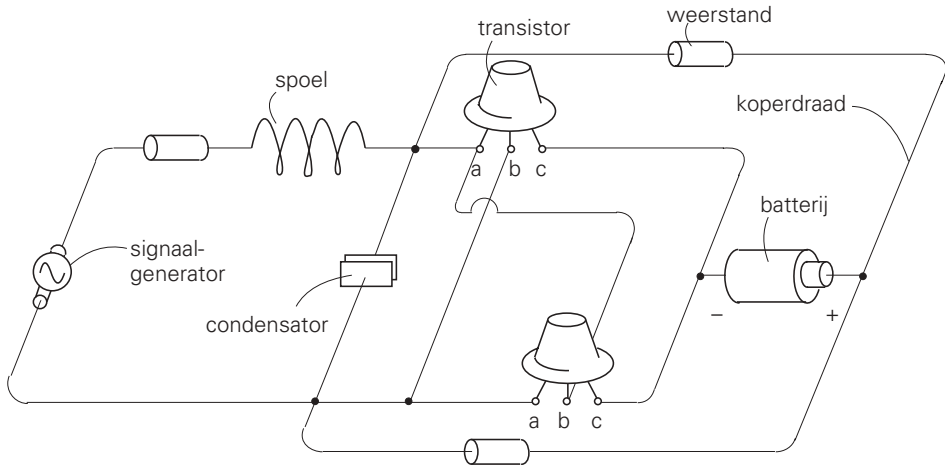
Bekende voorbeelden van componenten zijn de *weerstand*, de *diode*, de *batterij*, de *elektrische lamp*, de *schakelaar*, de *transistor*, de *condensator*, de *spoel*, de *transformator* en de *elektromotor*. De *elektrische signaalgenerator* en het *stopcontact* beschouwen we ook als component. Evenals de batterij zijn het



Figuur 1.1. Een discrete weerstand (a), condensator (b), spoel (c) en transistor (d).

voorbeelden van een elektrische energiebron. In figuur 1.1 zijn enkele componenten afgebeeld. Ze zijn steeds voorzien van twee of meer *aansluitklemmen* (Eng. terminals).

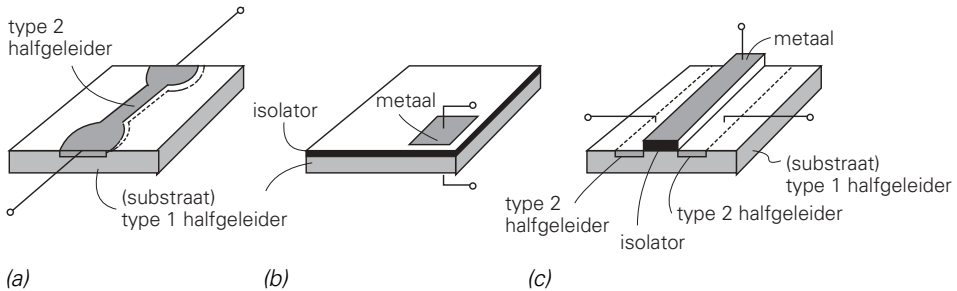
De in figuur 1.1 weergegeven technische uitvoeringsvormen (realisaties) heten *discreet*, omdat zij los van elkaar worden vervaardigd. Figuur 1.2 toont een voorbeeld van een (discreet) circuit.



Figuur 1.2. Een elektrisch circuit.

Bij een *geïntegreerd circuit* of *IC* (van Eng. Integrated Circuit) ontstaan de componenten samen met de onderlinge elektrische verbindingen gelijktijdig op hetzelfde minuscule schijfje halfgeleider materiaal (het substraat). Naar de schilfer (Eng. chip) halfgeleider materiaal wordt een IC ook een *chip* genoemd. In figuur 1.3 zijn een geïntegreerde weerstand, condensator en transistor terwille van de overzichtelijkheid los van elkaar afgebeeld. (Het is niet goed mogelijk om een geïntegreerde spoel te fabriceren.)

In het elektrische circuit spelen zich allerlei natuurkundige processen af. Als gevolg van de elektrische energiebron(nen) gaan er elektrische stromen vloeien en ontstaan er elektrische en magnetische velden. Op hun beurt veroorzaken deze velden mechanische krachten op de componenten en verbindingdraden. Tevens zijn er temperatuurstijgingen en chemische veranderingen waar te nemen.



Figuur 1.3. Een geïntegreerde weerstand (a), condensator (b) en transistor (c).

De circuittheorie concentreert zich op het *elektrische* gedrag van het circuit. Optredende mechanische, thermische en chemische processen worden niet bestudeerd. Bovendien wordt aangenomen dat de componenten in beginsel niet toegankelijk zijn voor inwendige metingen; zij worden als het ware als een *zwarte doos* (Eng. black box) opgevat. Wat over blijft zijn de *uitwendig*, aan de *klemmen* te meten spanningen en stromen. Het *elektrische klemgedrag* staat centraal.

De vraag rijst nu in hoeverre deze selectieve aandacht voor het elektrische klemgedrag tot een vruchtbare theorie kan leiden. Een theorie, waarvan de logische consequenties in overeenstemming zijn met de technische realiteit. In de volgende paragrafen wordt op deze vraag ingegaan.

## 1.2 NATUURKUNDIGE BASIS

De circuittheorie is gebaseerd op de algemene *elektriciteitsleer*. Daarin zijn de elektromagnetische *veldgrootheden* de basisgrootheden, terwijl elektrische spanningen en stromen als afgeleide grootheden naar voren komen. In deze paragraaf wordt geïllustreerd hoe de veldgrootheden zich vertalen naar spanningen en stromen. Paragraaf 1.4 stelt deze kwestie in breder perspectief.

### 1.2.1 Basishypothesen

Het is een experimenteel gegeven dat elektrische lading gekwantiseerd voorkomt. De kleinste mogelijke hoeveelheid elektrische lading is die van het *elektron*. Elke ladingshoeveelheid is daar een veelvoud van.

In de circuittheorie wordt echter verondersteld dat alle elektrische lading is uitgesmeerd. Dit heet de *continuïum hypothese*. De hypothese vindt haar rechtvaardiging in de omstandigheid dat er buiten de componenten om steeds zóveel ladingsdragers bij het ladingstransport zijn betrokken, dat het individuele gedrag van een ladingsdrager geheel in het groepsgedrag opgaat. Daarom spelen quantummechanische overwegingen in de circuittheorie geen rol.

Voorts wordt verondersteld dat de optredende elektrische *spanningen* en *stromen* *ondubbelzinnig* zijn te meten met respectievelijk *volt-* en *ampèremeters*. Dit

komt er praktisch op neer dat de ruimtelijke positie van de meters wordt verondersteld geen invloed te hebben op de gemeten waarden. In paragraaf 1.4 wordt toegelicht dat deze hypothese ten nauwste samenhangt met het gelden van de twee *wetten van KIRCHHOFF*. Deze luiden als volgt.

*Wetten van KIRCHHOFF*

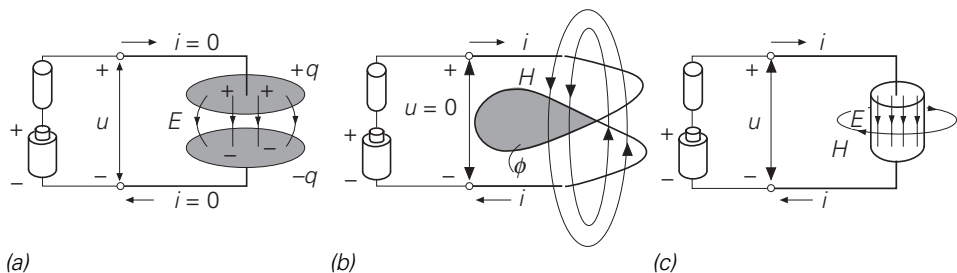
- (1.1)
1. De som van de naar een verbindingspunt toevloeiende elektrische stromen is op elk moment gelijk aan de som van de van dat punt afvloeiende stromen.
  2. De som van de meewerkende elektrische spanningen in een gesloten keten is op elk moment gelijk aan de som van de tegenwerkende spanningen in die keten.

In tegenstelling tot de algemeen geldige wetten van MAXWELL voor elektromagnetische veldgrootheden, gelden de wetten van KIRCHHOFF voor spanningen en stromen slechts onder voorwaarden (zie paragraaf 1.4 voor de onderlinge samenhang tussen de wetten van MAXWELL en KIRCHHOFF). Binnen het kader van de circuittheorie worden de wetten van KIRCHHOFF echter als *postulaat* opgevat. Ze zijn hier slechts genoteerd als gedachtebepaling en dienen thans voor kennisgeving te worden aangenomen.

## 1.2.2 Het statische klemgedrag

In deze en de volgende paragraaf bespreken wij de werking van respectievelijk de *condensator*, de *spoel* en de *weerstand*. Daarbij spitsen wij ons toe op het *elektrische klemgedrag* van deze componenten.

Beschouw dan eerst figuur 1.4, alwaar de optredende elektromagnetische velden in genoemde componenten schematisch zijn weergegeven. De componenten zijn elk via een weerstand met een *batterij* verbonden. Daar de batterij een *constante* spanning afgeeft, zullen de optredende elektrische grootheden een *statisch* gedrag vertonen.



Figuur 1.4. Een condensator (a), een spoelwinding (b) en een weerstand (c) zijn via een weerstand met een batterij verbonden.

De werking van de *condensator* berust op het verzamelen van *elektrische lading* op de platen. Dit gaat gepaard met een gebundeld *elektrisch veld* in de ruimte tussen die platen (figuur 1.4(a)). Het wiskundige verband tussen de elektrische veldsterkte  $E$  en de lading  $q$  wordt beschreven door de wetten van de elektrostatica. Symbolisch noteren wij

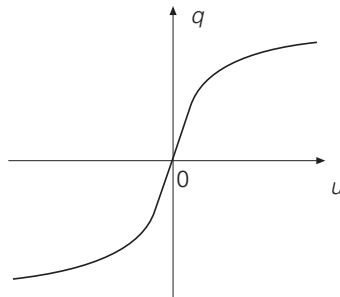
$$(1.2) \quad q \text{ (op de platen)} \bullet \text{---} \bullet E\text{-veld (in de ruimte).}$$

Het  $E$ -veld manifesteert zich *aan de klemmen* van de condensator als de *spanning*  $u$ . Er kan daarom worden gesteld dat het *statische klemgedrag* van de condensator volledig is getypeerd als bij elke waarde van  $u$  de verzamelde lading  $q$  bekend is. Dit rechtstreekse verband tussen  $q$  en  $u$  heet de *statische klemrelatie* van de condensator, die wij hier als volgt noteren

$$(1.3) \quad \boxed{q \bullet \text{---} \bullet u \text{ met } q \text{ en } u \text{ constant in de tijd (condensator)}}$$

Door bij elke waarde van  $u$  steeds de waarde van  $q$  te *meten*, is de klemrelatie (1.3) experimenteel te achterhalen. Het is duidelijk dat naast de fysieke *afmetingen* van de condensator, tevens de *elektrische eigenschappen* van het (niet afgebeelde) *diëlectricum* via (1.2) in (1.3) zullen doorwerken.

Het is natuurlijk ook mogelijk om het wiskundige verband (1.3) grafisch weer te geven. Figuur 1.5 toont hoe zo'n grafiek eruit zou kunnen zien.



Figuur 1.5. Een grafiek van de statische klemrelatie  $q \bullet \text{---} \bullet u$  (condensator).

Een *spoel* concentreert het magnetische veld tot een magnetische flux (figuur 1.4(b)). Het wiskundige verband tussen de magnetische veldsterkte  $H$  en de flux  $\phi$  wordt beschreven door de wetten van de magnetostatica. Symbolisch noteren wij

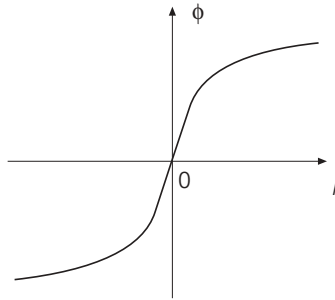
$$(1.4) \quad \phi \text{ (tussen de windingen)} \bullet \text{---} \bullet H\text{-veld (in de ruimte).}$$

Het  $H$ -veld manifesteert zich *aan de klemmen* van de spoel als de *stroom*  $i$  (wet van AMPÈRE). Er kan daarom worden gesteld dat het *statische klemgedrag* van de spoel volledig is getypeerd als bij elke waarde van  $i$  de geconcentreerde flux  $\phi$  bekend is.

Dit rechtstreekse verband tussen  $\phi$  en  $i$  heet de *statische klemrelatie* van de spoel, die wij hier als volgt noteren

$$(1.5) \quad \phi \bullet \text{---} \bullet i \quad \text{met } \phi \text{ en } i \text{ constant in de tijd} \quad (\text{spoel})$$

Door bij elke waarde van  $i$  steeds de waarde van  $\phi$  te *meten*, is de klemrelatie (1.5) experimenteel te achterhalen. Het is duidelijk dat naast de fysieke *afmetingen* van de spoel, tevens de *magnetische eigenschappen* van het (niet afgebeelde) *kernmateriaal* via (1.4) in (1.5) zullen doorwerken. Figuur 1.6 toont hoe de grafische weergave van het wiskundige verband (1.5) eruit zou kunnen zien.



Figuur 1.6. Een grafiek van de statische klemrelatie  $\phi \bullet \text{---} \bullet i$  (spoel).

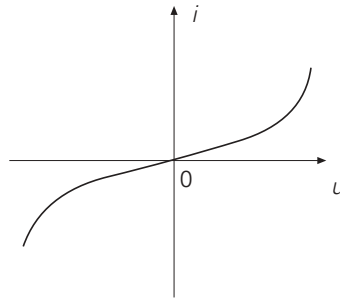
De werking van de *weerstand* berust op het weerstand bieden aan een onbelemmerde stroomdoorgang. Het resulterende ladingstransport uit zich *aan de klemmen* van de weerstand als de *stroom*  $i$ . Om de door het weerstandsmateriaal geboden tegenwerking te overwinnen, is een elektrisch veld nodig (figuur 1.4(c)). Dit  $E$ -veld manifesteert zich *aan de klemmen* van de weerstand als de *spanning*  $u$ .

Merk op dat als gevolg van de klemgrootte  $i$ , tevens een *magnetisch veld* in de weerstand aanwezig is (wet van AMPÈRE). Dit statische  $H$ -veld levert echter geen bijdrage aan de andere klemgrootte  $u$ . Dientengevolge wordt het mechanisme ‘weerstand bieden’ er niet door beïnvloed. Er kan daarom worden gesteld dat het *statische klemgedrag* van de weerstand volledig is getypeerd als bij elke waarde van  $u$  de stroom  $i$  bekend is. Dit rechtstreekse verband tussen  $i$  en  $u$  heet de *statische klemrelatie* van de weerstand, die wij hier als volgt noteren

$$(1.6) \quad i \bullet \text{---} \bullet u \quad \text{met } i \text{ en } u \text{ constant in de tijd} \quad (\text{weerstand})$$

Door de waarde van  $i$  bij elke waarde van  $u$  te *meten*, kan de klemrelatie (1.6) experimenteel worden achterhaald. Het is daarom niet nodig gebruik te maken van de wetten van de elektrostatica en de magnetostatica die de optredende  $E$ - en  $H$ -velden in de weerstand beschrijven. Duidelijk is wel, dat naast de fysieke *afmetingen* van de weerstand, tevens de *elektrische eigenschappen* van het *weerstandsmateriaal*

in (1.6) zullen doorwerken. Figuur 1.7 geeft een mogelijke grafiek van het wiskundige verband (1.6).



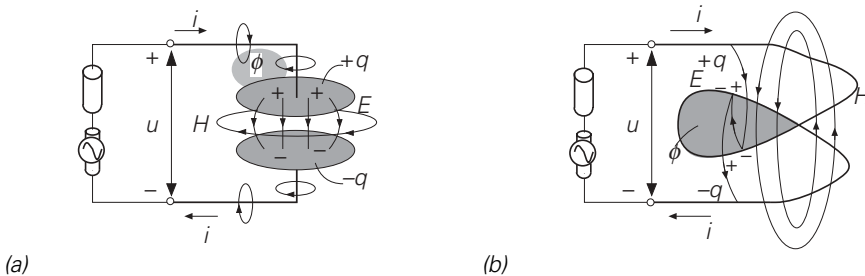
Figuur 1.7. Een grafiek van de statische klemrelatie  $i \bullet \bullet u$  (weerstand).

Merk nu op dat er in de klemrelaties (1.3), (1.5) en (1.6) *geen afstandsmaat* voorkomt. Daarom is het principieel onmogelijk om informatie over de ruimtelijke veldverdelingen uit deze relaties te distilleren. Het elektromagnetische veld uit zich *aan de klemmen* alsof het is geconcentreerd in een *puntvormige* component.

Tot slot wordt er op gewezen dat er vanwege de *constante* batterijspanning géén stroom door de condensator vloeit ( $i = 0$  in figuur 1.4(a)), en géén spanning over de perfect geleidend veronderstelde spoelwinding(en) staat ( $u = 0$  in figuur 1.4(b)).

### 1.2.3 Het dynamische klemgedrag

De situatie wijzigt als in plaats van de batterij een *elektrische signaalgenerator* met voortdurend *variërende* sterkte wordt gebruikt. De dan optredende toestand is in figuur 1.8 *op zeker tijdstip t* schematisch weergegeven. (Het is niet de bedoeling dat men zich in dit stadium bekommert over de herkomst van de plus- en mintekens of de richting van de pijlpunten.) Als gevolg van de variërende sterkte van de signaalgenerator, zullen de waarden van de elektrische grootheden eveneens *in de tijd bewegen*. Men zegt dat de grootheden een *dynamisch* gedrag vertonen.



Figuur 1.8. Een condensator (a) en een spoelwinding (b) zijn via een weerstand met een elektrische signaalgenerator verbonden.

Voor het condensatorcircuit van figuur 1.8(a) houdt de tijdsafhankelijkheid in, dat met name de verzamelde lading  $q$  een *variërende* waarde  $q(t)$  krijgt. Zo ook het met  $q(t)$  gepaard gaande elektrische veld  $E(t)$ , dat *aan de klemmen* een naar zal blijken niet langer als enige oorzaak, *variërende spanning*  $u(t)$  genereert. En, omdat een in de tijd *variërend* elektrisch veld altijd een eveneens *variërend* magnetisch veld  $H(t)$  opwekt, zal *aan de klemmen* nu ook een *variërende stroom*  $i(t)$  merkbaar zijn (wet van AMPÈRE-MAXWELL).

De grootte van  $i$  is volgens de wet van behoud van lading (er kan nimmer ergens netto elektrische lading ontstaan of verloren gaan) juist gelijk aan de mate waarin  $q$  verandert, dus

$$(1.7) \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt}.$$

Zie nog in dat er naast de lading  $q(t)$ , nu ook een met  $H(t)$  gepaard gaande variërende magnetische flux  $\phi(t)$  in de condensator ontstaat (figuur 1.8(a)). Maar er is meer. Het *variërende*  $H$ -veld houdt namelijk niet alleen de klemstroom  $i(t)$  in stand, maar levert bovendien een *extra* bijdrage aan de *andere* klemgrootheid  $u$  (inductiewet van FARADAY-MAXWELL)!

Om de invloed van deze complicatie te kunnen *schatten*, merken we op dat de overgang van een statisch  $E$ -veld (geen opgewekt  $H$ -veld) naar een *langzaam variërend*  $E$ -veld (wel een opgewekt  $H$ -veld) naar verwachting *geleidelijk* zal plaats vinden [3]. Dientengevolge zal een zeer traag variërend  $E$ -veld een relatief zwak  $H$ -veld opwekken. En, omdat dit toch al zwakke  $H$ -veld dezelfde trage variaties vertoont als het  $E$ -veld waardoor het wordt opgewekt, zal volgens dezelfde redenering de extra spanningsbijdrage enkele ordes kleiner zijn dan de door het  $E$ -veld veroorzaakte spanning.

Aldus komen wij tot de slotsom dat de extra spanningsbijdrage bij zeer trage variaties (zogenaamde *quasi-statische* variaties) toch nog als een te verwaarlozen neveneffect kan worden aangemerkt. Echter, naarmate de variaties sneller verlopen, verwachten wij dat de *variaties* in  $H(t)$  en dus in  $\phi(t)$ , een rol van toenemende betekenis zullen spelen.

Het kan nu duidelijk zijn dat het *klemgedrag* van de condensator slechts *ten dele* is getypeerd als bij elke waarde van  $u$  de verzamelde lading  $q$  bekend is. De karakterisering wordt echter *nauwkeuriger*, naarmate de variaties in  $q$  en  $u$  trager verlopen (quasi-statische variaties). In dat geval gaat de statische klemrelatie (1.3) over in de volgende *quasi-statische klemrelatie* (vergelijk figuur 1.8(a))

$$(1.8) \quad \boxed{q(t) \bullet \text{---} \bullet u(t) \quad \text{met} \quad \frac{dq(t)}{dt} = i(t) \quad (\text{condensator})}$$

Merk nog op dat de suggestie wordt gewekt alsof de stroom  $i$  dwars door de ruimte tussen de condensatorplaten passeert (figuur 1.8(a)). Dit is minder vreemd als

op het eerste gezicht lijkt, als bedacht wordt dat de in het tijdsinterval  $\Delta t$  naar plaat 1 toevloeiende lading  $+\Delta q$  nagenoeg gelijktijdig een even grote maar tegengestelde lading  $-\Delta q$  naar plaat 2 laat vloeien (elektrische inductie). Welnu, een stroom van negatieve lading naar plaat 2 *toe* gericht, heeft aan de klemmen dezelfde uitwerking als een stroom van positieve lading van plaat 2 *af* gericht.

Het is één van de verdiensten van J.C. MAXWELL dat hij in de ruimte tussen de condensatorplaten een niet-materiële ‘stroom’ postuleerde — MAXWELL’s *verplaatsingsstroom* — die op elk tijdstip inderdaad even groot is als de materiële stroom  $i$  in de verbindingsdraden! Hiermee was de wet van AMPÈRE-MAXWELL een feit [4].

Tot slot wordt er op gewezen dat de *netto* lading op de condensator op elk tijdstip nagenoeg gelijk is aan *nul* coulomb. De condensator separeert de verzamelde lading op elk moment in twee even grote, maar tegengesteld geladen porties  $+q$  en  $-q$ .

Beschouw nu figuur 1.8(b). De tussen de spoelwinding geconcentreerde flux  $\phi$  heeft ook hier een *variërende* waarde  $\phi(t)$ . Zo ook het met  $\phi(t)$  gepaard gaande magnetische veld  $H(t)$ , dat *aan de klemmen* een *variërende stroom*  $i(t)$  teweeg brengt. En, omdat een in de tijd *variërend* magnetisch veld altijd een eveneens *variërend* elektrisch veld  $E(t)$  opwekt, zal *aan de klemmen* nu ook een *variërende spanning*  $u(t)$  ontstaan. De grootte van  $u$  is volgens de inductiewet van FARADAY-MAXWELL juist gelijk aan de mate waarin  $\phi$  verandert, dus

$$(1.9) \quad u(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}.$$

Zie nog in dat naast de flux  $\phi(t)$ , nu ook een met  $E(t)$  gepaard gaand variërende elektrische lading  $q(t)$  in de spoel ontstaat (figuur 1.8(b)). Op grond van het eerder aangehaalde *geleidelijkheidsbeginsel* kan echter worden geconcludeerd dat de invloed van deze complicatie van afnemende betekenis zal zijn, naarmate de variaties trager verlopen.

Het moet nu duidelijk zijn dat het *klemgedrag* van de spoel slechts *ten dele* is getypeerd als bij elke waarde van  $i$  de geconcentreerde flux  $\phi$  bekend is. De karakterisering wordt echter *nauwkeuriger*, naarmate de variaties in  $\phi$  en  $i$  trager verlopen (quasi-statische variaties). In dat geval gaat de statische klemrelatie (1.5) over in de volgende *quasi-statische klemrelatie* (vergelijk figuur 1.8(b))

$$(1.10) \quad \boxed{\phi(t) \bullet \bullet i(t) \quad \text{met} \quad \frac{d\phi(t)}{dt} = u(t) \quad (\text{spoel})}$$

Eerder zagen wij dat in de weerstand zowel een  $E$ -veld als een  $H$ -veld aanwezig is (figuur 1.4(a)). Indien de weerstand met een elektrische signaalgenerator is verbonden, zal met de dan *variërende* veldbestanddelen een *variërende* lading  $q(t)$  en een *variërende* flux  $\phi(t)$  gepaard gaan. De te beredeneren verdere consequentie is

dat *variaties* in het éne veldbestanddeel, steeds een eveneens variërende *extra* spanning- of stroombijdrage aan de *andere* klemgrootte zullen leveren.

Dit laat inzien dat het *klemgedrag* van de weerstand slechts *ten dele* is getypeerd als bij elke waarde van de spanning  $u$  de stroom  $i$  bekend is. Duidelijk is ook dat de karakterisering *nauwkeuriger* wordt, naarmate de variaties in  $i$  en  $u$  trager verlopen (quasi-statische variaties). In dat geval gaat de statische klemrelatie (1.6) over in de volgende *quasi-statische klemrelatie*

$$(1.11) \quad \boxed{i(t) \bullet \text{---} \bullet u(t) \quad (\text{weerstand})}$$

Men dient zich ervan te overtuigen dat de quasi-statische klemrelaties (1.8), (1.10) en (1.11) op elk moment *dezelfde* wiskundige vorm hebben als hun statische analogons (1.3), (1.5) en (1.6). Dit heeft de praktisch voordelige consequentie dat de *statische* klemrelaties onder een *quasi-statisch meetregime* kunnen worden verkregen [5]. Praktisch voordelig, omdat directe lading en flux metingen minder voor de hand liggen dan spanning en stroom metingen. In dit verband is het verhelderend om (1.7) en (1.9) als volgt te interpreteren

$$(1.12) \quad q = \int i \, dt \quad \text{en} \quad \phi = \int u \, dt.$$

Hieruit lezen wij af dat een praktisch eenvoudig uitvoerbare tijdsintegratie van  $i$  en  $u$  een indirecte meting van  $q$  en  $\phi$  oplevert.

Uit het voorgaande moge blijken dat de klemrelaties onder een niet quasi-statisch, waarlijk *dynamisch* regime, een (aanmerkelijk) gecompliceerder vorm hebben dan de quasi-statische tegenhangers. (Zie [6], [7], [8] en [9] voor geavanceerde beschouwingen.) Als bijvoorbeeld de invloed van de altijd optredende flux  $\phi(t)$  in de condensator niet langer is te negeren, lijkt het plausibel dat de quasi-statische klemrelatie (1.8) in eerste benadering kan worden vervangen door de nauwkeuriger, *dynamische klemrelatie* (zie ook Vraagstuk 1.1)

$$(1.13) \quad q \bullet \text{---} \bullet u - \frac{d\phi}{dt} \quad \text{met} \quad \frac{dq}{dt} = i \quad (\text{condensator}).$$

Voor de spoel gelden soortgelijke overwegingen. Als daarin de lading  $q(t)$  een rol van betekenis speelt, lijkt het plausibel dat in plaats van de quasi-statische klemrelatie (1.10) in eerste benadering met de volgende, nauwkeuriger *dynamische klemrelatie* kan worden gerekend

$$(1.14) \quad \phi \bullet \text{---} \bullet i - \frac{dq}{dt} \quad \text{met} \quad \frac{d\phi}{dt} = u \quad (\text{spoel}).$$

Als tenslotte de invloed van de gezamenlijk optredende flux  $\phi(t)$  en lading  $q(t)$  in de weerstand niet zijn te verwaarlozen, kan het aannemelijk worden gemaakt dat de

quasi-statische klemrelatie (1.11) in eerste benadering kan worden vervangen door de nauwkeuriger, *dynamische klemrelatie* (zie ook Vraagstuk 1.2)

$$(1.15) \quad i - \frac{dq}{dt} \quad \bullet \text{---} \bullet \quad u - \frac{d\phi}{dt} \quad (\text{weerstand}).$$

**Oefening 1.1** Laat zien dat de dynamische klemrelaties zowel de quasi-statische als de statische klemrelaties impliceren.

### 1.2.4 Basisgrootheden

Inmiddels kan het duidelijk zijn dat men zich ten aanzien van het *klemgedrag* steeds kan beperken tot vier *basisgrootheden*:  $u$ ,  $i$ ,  $q$  en  $\phi$ . Bovendien kunnen  $q$  en  $\phi$  volgens (1.12) als *hulpgrootheden* worden opgevat. Dit houdt in, dat de elektrische klemrelaties van de componenten zijn te beschrijven in termen van *spanningen* en *stromen*. In het algemeen gaan wij er vanuit dat zij een dynamisch gedrag vertonen.

In de algemeen geldige elektromagnetische veldtheorie van MAXWELL zijn  $E$ ,  $H$ ,  $D$ ,  $B$  en  $J$  de basisgrootheden. Hierin zijn  $E$  en  $H$  respectievelijk de elektrische en magnetische veldsterkte,  $D$  en  $B$  respectievelijk de elektrische en magnetische fluxdichtheid, terwijl  $J$  de ruimtelijke stroomdichtheid is. De laatste grootheid beschrijft de mate van ladingstransport, en heeft alleen in elektrisch geleidende materialen een waarde ongelijk aan nul.

Onder *statische* condities zijn  $u$ ,  $i$ ,  $q$  en  $\phi$  als volgt met de optredende elektromagnetische veldgrootheden in de componenten gelieerd

$$(1.16) \quad \begin{array}{lll} q \bullet \text{---} \bullet & D \bullet \text{---} \bullet & E \bullet \text{---} \bullet u \quad (\text{condensator}) \\ \phi \bullet \text{---} \bullet & B \bullet \text{---} \bullet & H \bullet \text{---} \bullet i \quad (\text{spoel}) \\ i \bullet \text{---} \bullet & J \bullet \text{---} \bullet & E \bullet \text{---} \bullet u \quad (\text{weerstand}). \\ & \swarrow & \\ & H & \end{array}$$

Hierin gedragen zich de links en rechts staande relaties als *evenredigheden* (als een klemgrootheid  $\alpha$  maal zo groot wordt, dan wordt de ermee corresponderende veldgrootheid eveneens  $\alpha$  maal zo groot). Zij hebben niets van doen met het materiaal waarin het elektromagnetische verschijnsel zich voordoet. Het zijn de middelste paren in (1.16) die deze *elektromagnetische materiaaleigenschappen* vertolken. Vandaar dat het de *gedragsrelaties* of de *constitutieve relaties* van de materialen heten.

Indien de veldgrootheden een *beperkte grootte* hebben, blijken de constitutieve relaties voor een grote *klasse van materialen* de volgende *evenredigheden* aan te nemen

$$(1.17) \quad D = \epsilon E, \quad B = \mu H \quad \text{en} \quad J = \sigma E.$$

Hierin heten  $\varepsilon$ ,  $\mu$  en  $\sigma$  respectievelijk de permittiviteit, de permeabiliteit en de soortelijke geleiding van het materiaal. Voor *andere materialen*, of *grotere waarden* van de veldgrootheden is (1.17) een incorrecte weergave van de realiteit. De constitutieve relaties zijn dan meestal *niet-lineair* [10].

**Oefening 1.2** Ga na dat de constitutieve relaties van materialen die resulteren in de grafieken van de figuren 1.5, 1.6 en 1.7, niet kunnen worden beschreven middels de lineaire betrekkingen (1.17).

## 1.2.5 Energetische eigenschappen

In deze paragraaf wordt nagegaan hoe de componenten omgaan met de *elektrische energie* die een energiebron eraan toevoert. Daartoe wordt het volgende experiment uitgevoerd.

Op zeker tijdstip  $t_0$  wordt in de circuits van figuur 1.4 de sterkte van de batterij gelijk aan nul gemaakt. (Dit kan worden bewerkstelligd door ten tijde  $t = t_0$  een kortsluitdraad over de batterij te plaatsen.) Het blijkt dan, dat de *condensatorspanning* en de *spoelstroom* toch nog enige tijd ná  $t_0$  een waarde ongelijk aan nul aanhouden. De nulwaarde wordt slechts *geleidelijk* bereikt.

Blijkbaar wordt de daarvoor benodigde energie door deze componenten zèlf geleverd. De batterij is immers ná  $t_0$  niet langer werkzaam! Dit moet betekenen dat de vóór  $t_0$  onttrokken elektrische energie door de componenten tijdelijk was *opgeslagen*. De natuurkundige achtergrond van dit verschijnsel is dat de condensator en de spoel de eraan toegevoerde elektrische energie op een *omkeerbare* wijze kunnen *omzetten* in respectievelijk *elektrische veldenergie* en *magnetische veldenergie*. Zij functioneren als *energiereservoirs* of *buffers* die een *zekere traagheid* vertonen. (Vergelijk een gespannen veer als opslagplaats voor mechanische energie.) Men zegt ook wel dat de condensator en de spoel *geheugenwerking* vertonen.

Bij de weerstand is de uitkomst van het experiment geheel verschillend. Daar blijken de spanning en de stroom ná  $t_0$  nagenoeg *onmiddellijk* de waarde nul aan te nemen. Kennelijk is de door de batterij vóór  $t_0$  geleverde elektrische energie *definitief* uit het circuit onttrokken, en door de weerstand omgezet in *warmte*. Deze *onomkeerbare* vorm van energieomzetting heet *dissipatie* (van Lat. *dissipare* = weggooien).

## 1.3 HET ELEKTRISCHE CIRCUIT ALS MODEL

### 1.3.1 Circuitelementen

Om het elektrische gedrag van elektrische circuits adequaat te kunnen beschrijven, worden er *circuitelementen* ingevoerd. Een circuitelement *modelleert* (brengt in rekening) de technisch gewenste en ongewenste elektromagnetische verschijnselen die in circuits kunnen voorkomen.

De technisch nagestreefde verschijnselen spelen zich af in de elementaire bouwstenen waarmee het circuit is samengesteld. In dit verband is een circuit-element een *sterk vereenvoudigd model* van de overeenkomstige materiële bouwsteen. *Alléén het primaire werkingsmechanisme* wordt daarbij in rekening gebracht. Ongewenste elektromagnetische neveneffecten worden niet meegenomen. Een circuit-element wordt daarom wel een ‘*ideale*’ bouwsteen genoemd. Juist omdat het model een *abstractie* is, heeft het een *wiskundig precies omschreven klemrelatie*.

Zo is het circuit-element ‘*capaciteit*’ identiek aan de ideale condensator. D.w.z. een condensator waarvan het klemgedrag *volledig* is getypeerd door het ladingverzamelings-mechanisme (alléén een *E*-veld). De ongewenste, doch onvermijdelijke fluxconcentratie en de (nog niet genoemde) warmteverliezen in de platen, verbindingsdraden en het diëlectricum zijn daarbij geheel genegeerd. De quasi-statische klemrelatie (1.8) van de condensator is derhalve de *exacte* beschrijving van de capaciteit, óók onder een niet quasi-statisch, dynamisch regime!

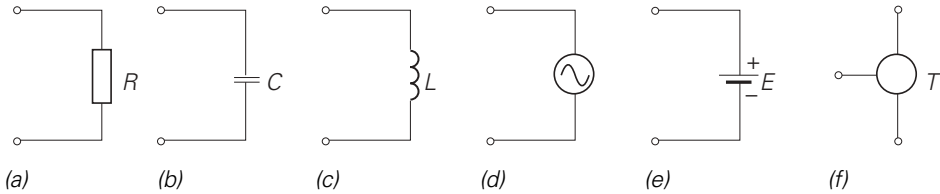
Volgens een analoge uitleg is het circuit-element ‘*inductiviteit*’ identiek aan de ideale spoel (alléén fluxconcentratie; alléén een *H*-veld), terwijl het circuit-element ‘*weerstand*’ identiek is aan de ideale weerstand (alléén weerstand bieden). Daarom zijn de klemrelaties (1.10) en (1.11) de *exacte* beschrijving van respectievelijk de inductiviteit en de (abstracte) weerstand. (Merk op dat de term ‘weerstand’ in twee geheel *verschillende* betekenissen wordt gebruikt. Als naam van de *materiële* bouwsteen, en als naam van het daarmee corresponderende *abstracte* model.)

Voorts is het circuit-element ‘*bron*’ identiek aan een ideale elektrische energiebron. Zoals we nog zullen zien, kan een elektrische energiebron op verschillende manieren als ‘ideaal’ worden beschouwd. Een voorbeeld is de ‘*gelijkspanningsbron*’ die identiek is aan de ideale batterij, d.w.z. een batterij zonder warmteverliezen.

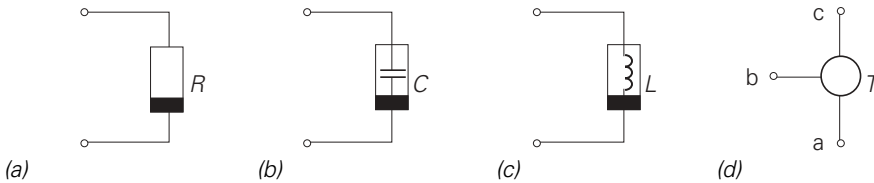
**Oefening 1.3** Is er verschil tussen de quasi-statische en dynamische klemrelaties van de circuit-elementen?

De genoemde circuit-elementen zijn elk voorzien van twee (aansluit)klemmen, en heten daarom *twee-klemmen circuit-elementen*. Een voorbeeld van een *drie-klemmen circuit-element* is de ‘ideale’ transistor, die eveneens ‘*transistor*’ wordt genoemd (vergelijk de naamgeving van het element ‘weerstand’). In figuur 1.9 zijn de door ons gehanteerde *circuitsymbolen* van de besproken circuit-elementen weergegeven.

Afhankelijk van de elektromagnetische eigenschappen van het component-materiaal, kan het van belang zijn om een materieel *onderscheid* te maken tussen de aansluitklemmen van het overeenkomstige circuit-element. In voorkomende gevallen wordt dit onderscheid tot uitdrukking gebracht in het circuitsymbool. Figuur 1.10 illustreert de gevolgde werkwijze.



Figuur 1.9. Circuitsymbolen van de weerstand (a), de capaciteit (b), de inductiviteit (c), de 'ideale' signaalgenerator (d), de gelijkspanningsbron (e) en de transistor (f).



Figuur 1.10. Er wordt onderscheid gemaakt tussen de aansluitklemmen.

Een circuitelement heet *parasitair* indien het element een *ongewenst*, doch niet te verwaarlozen elektromagnetisch verschijnsel in rekening brengt (modelleert). Zo vertolkt de *parasitaire capaciteit* de ongewenste elektrische velden (ladingsaccumulatie), de *parasitaire inductiviteit* de ongewenste magnetische velden (fluxconcentratie), terwijl de *parasitaire weerstand* onbedoelde warmteverliezen in rekening brengt (dissipatie). Dit alles uiteraard in de veronderstelling dat het mogelijk is om de elektrische en magnetische velden *separaat* in rekening te brengen.

Omdat er in de klemrelaties van de ingevoerde circuitelementen *geen afstandsmaat* voorkomt, worden het *geconcentreerde circuitelementen* (Eng. lumped elements) genoemd. (Appendix 1.A geeft een uitbreiding aan dit begrip.)

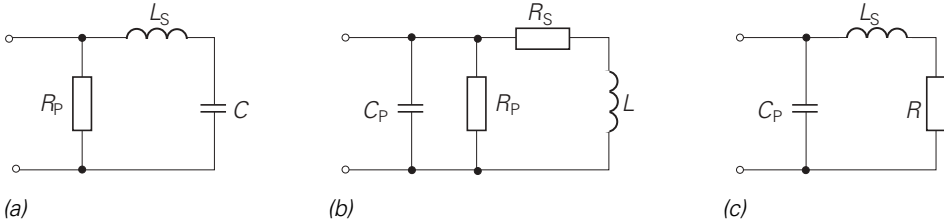
Tenslotte heten de capaciteit en de inductiviteit *dynamische elementen*, terwijl de weerstand een *statisch element* wordt genoemd. Hiermee wordt gezegd, dat de capaciteit (inductiviteit) alleen dan een reactie in de vorm van een stroom  $i$  (spanning  $u$ ) erdoor (erover) vertoont, als de lading  $q$  (flux  $\phi$ ) in de tijd beweegt (zie de klemrelaties (1.8) en (1.10)). Dit staat in contrast met het weerstandsgedrag; daar wordt reeds onder statische condities een reactie waargenomen.

### 1.3.2 Modellen van componenten

Onder de in paragraaf 1.4 te bespreken voorwaarden, blijkt het mogelijk om het elektrische klemgedrag van de materiële bouwstenen te *modelleren* middels een *beperkte klasse circuitelementen*.

Een door *intuïtie* geleide strategie is dan om elk optredend elektromagnetisch aspect *apart* in rekening te brengen door het toevoegen van een geschikt circuitelement. Deze *ad hoc* procedure wordt voortgezet, totdat het klemgedrag van de component met voldoende nauwkeurigheid is benaderd. Figuur 1.11 illustreert hoe

de condensator, de spoel en de weerstand zouden kunnen worden gemodelleerd. Omdat de gegeven modellen betrekking hebben op het dynamische klemgedrag, worden het *dynamische modellen* genoemd.



Figuur 1.11. Dynamische modellen van de condensator (a), de spoel (b) en de weerstand (c).

In figuur 1.11 vertolkt de parasitaire inductiviteit  $L_S$  het magnetische veld in respectievelijk de condensator en de weerstand. De elektrische velden in de spoel en de weerstand worden door de parasiet  $C_P$  in rekening gebracht. Voorts verdisconteert de parasitaire weerstand  $R_P$  de energieverliezen in respectievelijk het diëlectricum van de condensator en het kernmateriaal van de spoel. De parasiet  $R_S$  staat voor de elektrische energieverliezen in de windingen van de spoel. Tot slot representeren de elementen  $C$ ,  $L$  en  $R$  het technisch nagestreefde klemgedrag van de overeenkomstige componenten.

De vraag of een parasiet al dan niet kan worden *verwaarloosd*, is mede afhankelijk van het circuit waarvan de component deel uitmaakt. Naarmate de daarin optredende spanningen en stromen sneller variëren, zullen de parasieten een rol van toenemende betekenis spelen.

In het spoelmodel van figuur 1.11(b) heet de combinatie van de elementen  $R_S$  en  $L$  een *serieverbinding* (er vloeit dezelfde stroom door). De combinatie  $C_P$  en  $R_P$  heet een *parallelverbinding* (er staat dezelfde spanning over).

Er wordt met nadruk op gewezen, dat alléén een rigoreuze toepassing van de wetten van MAXWELL met *zekerheid* een geheel correct model van een component oplevert. Dan kan ook met gegronde reden worden besloten of de parasitaire effecten via een serieverbinding, dan wel een parallelverbinding in rekening gebracht dienen te worden.

**Oefening 1.4** Hoe komt het verschil tussen het quasi-statische en het dynamische klemgedrag van de componenten in de gegeven modellen tot uiting?

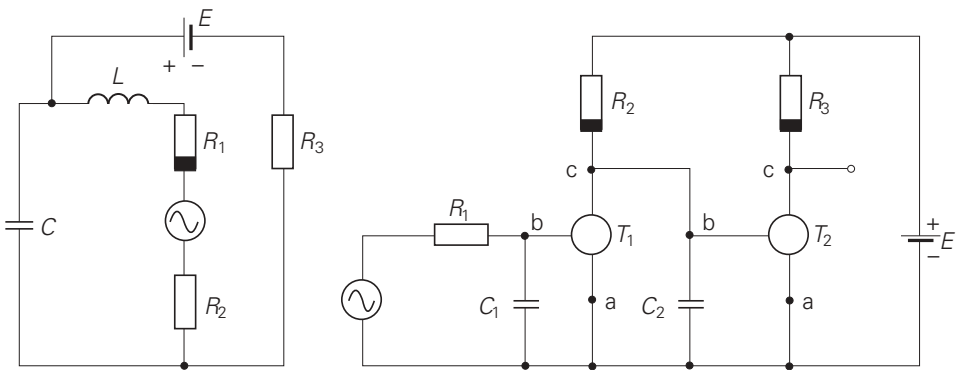
**Oefening 1.5** In paragraaf 1.2.3 werd gesteld dat er in de condensator tevens een magnetische flux  $\phi(t)$  aanwezig is. Hoe is dit neveneffect in het dynamische model van de condensator verwerkt?

**Oefening 1.6** Als de elektrische energieverliezen in de condensator en de spoel

kunnen worden verwaarloosd, welke dynamische modellen resulteren er dan? Benoem de combinatiewijzen van de resterende circuitelementen.

### 1.3.3 Het elektrische circuit of circuit

Een *elektrisch circuit* is een samenstel van circuitelementen, onderling verbonden door elektrisch perfect geleidende verbindingen. Figuur 1.12 geeft twee voorbeelden. Daarin zijn de getrokken lijnstukken de geleidende verbindingen (interconnecties). Merk op dat de modellen van figuur 1.11 eveneens elektrische circuits zijn.



Figuur 1.12. Twee voorbeelden van een *elektrisch circuit* (circuit).

Zoals de in paragraaf 1.3.2 besproken modellen een model zijn van een enkele materiële bouwsteen, zo is een *elektrisch circuit* een *model* van een compleet *elektrisch circuit*.

In het vervolg zullen wij de term ‘*circuit*’ als synoniem voor ‘*circuit*’ gebruiken. Men dient daarbij wel te beseffen dat de term ‘*circuit*’ in twee geheel *verschillende* betekenissen voorkomt. Als naam van het in werkelijkheid bestaande elektrische circuit, en als naam van het ermee corresponderende abstracte model. Als er aanleiding bestaat tot verwarring, worden zij respectievelijk aangeduid als *materieel circuit* en *abstract circuit*. (Zie ook de opmerking aan het eind van deze paragraaf.)

Het model wordt beschreven door wiskundige formules, en heet daarom een *wiskundig model*. De formules worden deels geleverd door de circuitelementen zelf. Zij worden immers getypeerd door wiskundig geformuleerde *klemrelaties*. Voor het overige zijn de formules afkomstig van de *wetten van KIRCHHOFF*. Deze wetten vertalen de interconnecties tussen de circuitelementen in relaties tussen de spanningen en de stromen. De wetten van KIRCHHOFF hebben aldus betrekking op de *meetkundige structuur* of de *topologie* van het model.

Merk nu op dat in het model uitsluitend *spanningen* en *stromen* voorkomen.

De in het materiële circuit optredende elektromagnetische velden zijn *alle* via circuitelementen verdisconteerd. De spanningen en stromen heten de *variabelen* van het model. Omdat zij middels volt- en ampèremeters zijn te meten, worden het *operationele variabelen* genoemd.

Het model heet *valide* of fysisch correct als het aan de realiteit beantwoord. Het model is *wiskundig consistent*, als de spanningen en stromen in het circuit zodanig zijn georganiseerd, dat zij zowel aan de klemrelaties als aan de wetten van KIRCHHOFF voldoen.

Bij kwesties over validiteit en consistentie is vaak de rol van *parasieten* in het geding. Of ze zijn verkeerd gekozen, òf ze zijn onterecht verwaarloosd. Daarbij dient bedacht te worden dat *elke* component *principeel* is behept met zulke parasieten.

Zo kan het voorkomen dat een model inconsistent is, omdat het bij nader inzien niet valide blijkt. Toevoegen van een correct gepositioneerde parasiet (hoe klein ook), kan de *logische paradox* uit de wereld helpen. Het komt ook voor dat een model weliswaar consistent is, maar dat het meerdere oplossingen oplevert. En dit, terwijl in het corresponderende materiële circuit uiteraard slechts één oplossing wordt gemeten. Ook nu kan het toevoegen van een eerder verwaarloosde parasiet de *fysische paradox* opheffen.

Een model is *nauwkeuriger*, naarmate de elektromagnetische verschijnselen met grotere precisie in het model zijn verwerkt. Als het elektrische gedrag van het model weinig gevoelig is voor modelafwijkingen, heet zo'n model een *robuust model*.

Laat het duidelijk zijn dat nauwkeuriger modellen niet steeds een grotere *relevantie* hebben. Voor verbeterde nauwkeurigheid wordt namelijk de prijs van toegenomen complexiteit betaald. Vaak geeft een sterk vereenvoudigd model reeds voldoende inzicht. Hiermee is gezegd dat elk model een *afgewogen compromis* tussen *realiteit* en *eenvoud* is.

In de circuits van figuur 1.12 komt *geen afstandsmaat* voor. De reden is dat *alle* elektromagnetische verschijnselen zijn ondergebracht in *puntvormige* (geconcentreerde) circuitelementen. Daarom heten zulke circuits *geconcentreerde elektrische circuits* (Eng. lumped circuits).

Zodra er minstens één dynamisch element in het circuit voorkomt, spreken we van een *dynamisch circuit* of *circuit*.

Niet elk elektrisch circuit is een model van een materieel circuit. Men is immers vrij om een elektrisch circuit te tekenen dat geheel aan de fantasie is ontsproten. Zulke *artificiële circuits* kunnen evenwel nuttige gedachten experimenten opleveren.

**Oefening 1.7** Teken een elektrisch circuit dat het elektrische gedrag van het in figuur 1.2 afgebeelde materiële circuit symbolisch in kaart brengt.

De parasitaire effecten mogen daarbij worden verwaarloosd.

De circuittheorie tracht *wiskundige voorspellingen* te maken omtrent het elektrische gedrag van materiële circuits. Dit, met het uiteindelijke doel tot een zo goed mogelijk praktisch ontwerp te geraken.

Het is de taak van de *circuitanalyse* om alle spanningen en stromen in een gegeven elektrisch circuit te berekenen. Dit heet het *oplossen van het circuitprobleem*. Als de analyse wordt uitgevoerd met de uitdrukkelijke bedoeling het elektrische gedrag van een materieel circuit na te bootsen, spreekt men van *circuit-simulatie*. Omgekeerd is het de taak van de *circuitsynthese* om een elektrisch circuit te ontwerpen dat een voorgeschreven elektrisch gedrag vertoont.

De stap naar de *realisatie* van het uiteindelijk verlangde materiële circuit valt buiten het bestek van de circuittheorie. Dit neemt natuurlijk niet weg dat de finale beoordeling van een model valt of staat met de *experimentele toetsing* ervan ('meten is weten').

Terloops zij nog vermeld dat er een opvallende overeenkomst bestaat met het modelgebruik in de technische *mechanica*. Daar zijn de variabelen de kracht (of impuls) en de snelheid (of positie), terwijl de puntmassa, de 'ideale' veer, de 'ideale' demper, enz. de elementaire modellen (elementen) zijn. De wetten van NEWTON spelen er dezelfde rol als de wetten van KIRCHHOFF in de circuittheorie (zie ook par. 1.4).

### Opmerking 1.1

Ofschoon de begrippen 'circuit' en '(abstract) circuit' volgens afspraak naar hetzelfde object verwijzen, hebben zij een duidelijk verschillende gevoelswaarde. Bij gebruik van 'circuit' wordt het belang van de *meetkundige structuur* (topologie) benadrukt, terwijl men bij 'circuit' eerder denkt aan *circulerende stromen*.

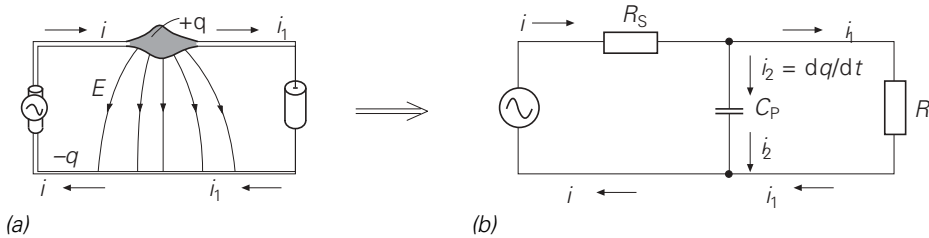
### 1.3.4 Bedradingsparasieten

Tot nu toe is er geen aandacht besteed aan de elektromagnetische velden die optreden in de ruimte rondom het materiële circuit. In de volgende voorbeelden wordt geïllustreerd hoe deze velden bij de modelvorming kunnen worden betrokken.

In het elektrische circuit van figuur 1.13(a) heeft een draadvormige geleider een lokale verdikking. Veronderstel dat de aanwezigheid van die verdikking een significante uitwerking heeft op de bronstroom  $i$ . De vraag is nu hoe dit bedradings-effect in het model kan worden verwerkt.

De oorzaak van genoemd effect kan duidelijk zijn: in de verdikking treedt ladings-accumulatie op (condensatorwerking). Het hiermee gepaard gaande  $E$ -veld denken wij geconcentreerd in een enkele *parasitaire bedradingscapaciteit*  $C_p$ , die vervolgens aan het model wordt toegevoegd (figuur 1.13(b)). De *parasitaire bedradingsweerstand*  $R_S$  verdisconteert de warmteverliezen in de draad. De warmteverliezen in

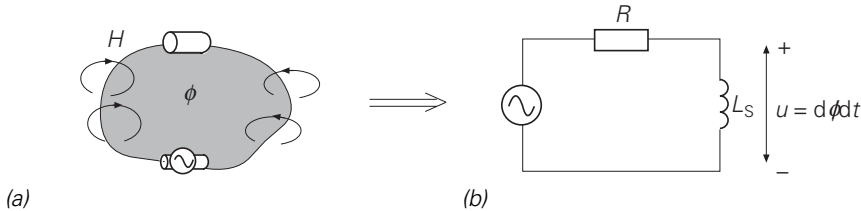
de energiebron zijn er tevens in verwerkt. Merk op dat de invloed van de magnetische velden in het model van figuur 1.13(b) is verwaarloosd. Zo ook de parasitaire effecten van de materiële weerstand. Het model is niettemin valide als blijkt dat *berekeningen* aan het abstracte circuit overeenstemmen met *metingen* aan het materiële circuit.



Figuur 1.13. De lokale verdikking wordt in rekening gebracht door een parasitaire bedradingscapaciteit  $C_p$  in het model op te nemen.

**Oefening 1.8** Beredeneer, uitgaande van figuur 1.13(a), dat  $i_1 = i - dq/dt$ . Hierin is  $q$  de geaccumuleerde lading op het tijdstip  $t$ . (Aanwijzing: gebruik de wet van behoud van lading.)

Een vergelijkbare situatie doet zich voor in het circuit van figuur 1.14, alwaar het effect van de *bedradingslus* blijkt te prevaleren. De oorzaak is een (ongewenste) fluxconcentratie  $\phi$  (spoelwerking). Het hiermee gepaard gaande  $H$ -veld wordt in het model verwerkt middels een *parasitaire bedradingsinductiviteit*  $L_S$  (figuur 1.14(b)). Merk op dat over  $L_S$  juist de spanning  $u = d\phi/dt$  ontstaat (par. 1.3.1).

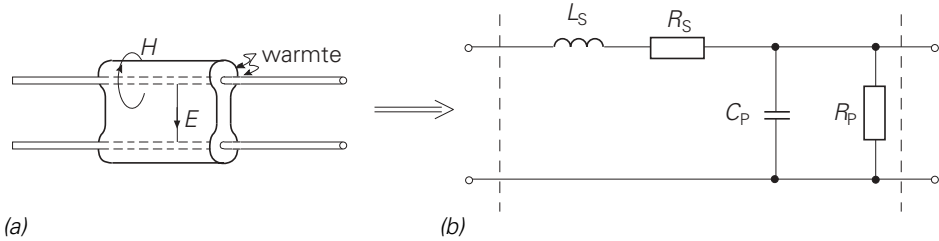


Figuur 1.14. De luswerking wordt in rekening gebracht door de parasitaire bedradingsinductiviteit  $L_S$ .

Beschouw als volgende illustratie twee elektrische geleiders, die als anders in een gemeenschappelijke isolator zijn opgenomen (figuur 1.15(a)). Bij gebruik van dit snoer, blijkt dat het dynamische gedrag afwijkt van wat simpele verbindingsdraden zouden voorspellen. De vraag is nu hoe de dynamische effecten kunnen worden verklaard.

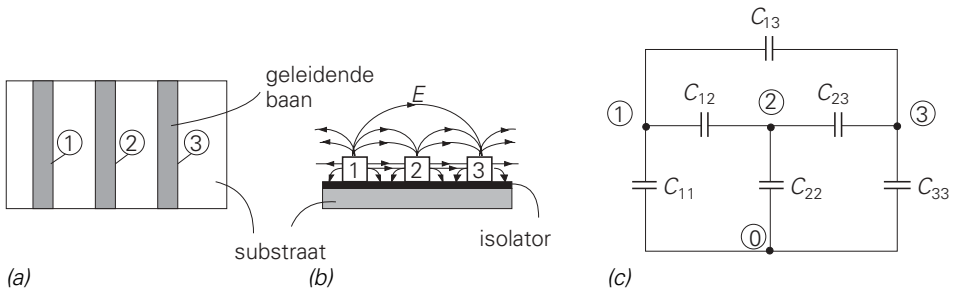
Elementen waarvan het dynamische gedrag afwijkt van het statische, zijn de capaciteit en de inductiviteit. Dit zijn juist de elementen die het in de tijd variërende elektromagnetische veld in een sectie van het snoer in rekening brengen. Het

resultaat is het dynamische model van figuur 1.15(b). Hierin vertolken de parasieten  $R_S$  en  $R_P$  de warmteverliezen in respectievelijk de aders en de imperfecte isolator. (Zie Appendix 1.A voor een gedetailleerde beschouwing.)



Figuur 1.15. Het dynamische gedrag van het snoer (a) wordt verklaard door de bedradingsparasieten  $L_S$  en  $C_P$  (b).

Beschouw tot slot figuur 1.16, alwaar drie nabijgelegen elektrisch geleidende banen op het substraat van een chip zijn afgebeeld.



Figuur 1.16. Boven- (a) en vooraanzicht (b) van drie nabijgelegen elektrisch geleidende banen op het substraat van een chip, en het model (c).

Hoewel er geen direct elektrisch contact tussen de banen bestaat, blijkt ook hier dat een in de tijd variërende stroom in de éne baan, toch een (duidelijk ongewenste) invloed heeft op de stroom in de andere baan (zogenaamde *overspraak*). De kwestie wordt klemmend, als men zoveel mogelijk componenten op een zo klein mogelijk chipoppervlak wil integreren. Daarbij dient het volgende te worden overwogen.

Afnemende dwarsafmetingen impliceren dikkere banen. Dit, om nog voldoende elektrische geleiding in de banen te kunnen garanderen. De oorzaak van de toenemende betekenis van de overspraak kan nu duidelijk zijn: de tegenover elkaar gelegen langsvlakken gaan steeds meer op de platen van een condensator lijken! Bij een tè ver doorgevoerde miniaturisatie zou dit *parasitaire bedradings-effect* de beoogde chipwerking zelfs geheel kunnen ruïneren.

Het ontwerp van een bedrijfszekere chip vereist dat de capacitieve overspraak van te voren wordt ingecalculeerd. De daarvoor noodzakelijke gegevens worden om praktische en economische redenen middels een *computer model* geleverd. Een op de computer uitgewerkte, rigoreuze toepassing van de wetten van de elektrostatica,



*elektromagnetische velden* die als gevolg van een in het circuit opgenomen energiebron in en rondom het circuit optreden.

Indien de bron een *constante* sterkte heeft, zal het door de bron in stand gehouden ladingstransport door de verbindingsdraden van het circuit met *constante* snelheid plaats vinden (*stationaire stroming* of *gelijkstroom*). Zoals eerder betoogd, hebben de dan opgewekte elektrische en magnetische velden een *statisch* karakter; zij manifesteren zich als twee *los van elkaar* bestaande entiteiten. Om deze reden kunnen de elektrische en magnetische velden *separaat* in rekening worden gebracht middels capaciteiten en inductiviteiten. De geboden tegenwerking aan het ladingstransport kan door weerstanden worden beschreven.

Laten wij thans veronderstellen dat de bron een (zeer) snel *variërende* sterkte heeft, zodat de door de bron voortgestuwde elektrische ladingen met (zeer) grote versnellingen worden verplaatst (*niet-stationaire stroming*). De nu opgewekte elektrische en magnetische velden variëren niet alleen eveneens (zeer) snel in de tijd, maar blijken bovendien op *elke plaats in de ruimte voortdurend* met elkaar in wisselwerking te staan. Verder blijken de aldus onverbrekkelijk *gekoppelde* velden zich als een *enkele* entiteit te manifesteren!

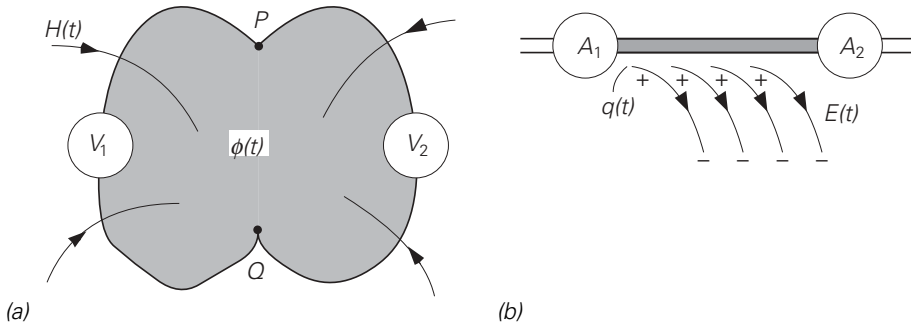
Deze nieuwe entiteit wordt geobserveerd als een *elektromagnetische golf*, die zich met de *lichtsnelheid* vanuit het circuit in de ruimte uitbreidt. Men zegt dat het circuit *straalt*, of dat het *antennewerking* vertoont. Blijkbaar wordt nu een deel van de door de bron geleverde energie *omgezet* in *stralingsenergie* die definitief uit het circuit wordt onttrokken en in de ruimte verdwijnt (dissipatie).

De (zeer) sterke, en overal in de ruimte optredende *koppeling* tussen beide velden, laat inzien dat het *niet* langer mogelijk is de diverse veldbestanddelen op verschillende plaatsen in de ruimte uiteen te rafelen, om ze vervolgens separaat onder te brengen in circuitelementen! Het zal duidelijk zijn dat onder deze omstandigheden nauwelijks iets nuttigs met het concept ‘circuitelement’ kan worden aangevangen.

Wij zullen nu *spanning-* en *stroømmetingen* aan het circuit verrichten, en kiezen voor een experimentele opzet waarmee de geldigheid van de gewraakte hypothese kan worden getoetst.

Beschouw daartoe eerst figuur 1.18(a), alwaar twee *indientieke voltmeters*  $V_1$  en  $V_2$  op het klemmenpaar  $P$ - $Q$  van het circuit zijn aangesloten. Merk op dat  $V_1$  en  $V_2$  een *verschillende* positie in de ruimte innemen.

Het mag natuurlijk niet zo zijn dat de meteruitslag afhankelijk is van de manier waarop de *aansluitdraden* van de meters zijn gepositioneerd. Toch is dit wat er wordt geobserveerd!



Figuur 1.18. De voltmeters  $V_1$  en  $V_2$  en de ampèremeters  $A_1$  en  $A_2$  vertonen door hun ongelijke positionering een afwijkende uitslag.

Hoe is de uitkomst van dit experiment te verklaren? Zoveel is wèl duidelijk, dat de verklaring moet worden gezocht in de *koppeling* tussen de *variërende*  $E$ - en  $H$ -velden. En inderdaad, de voltmeter meet niet slechts het klemmeffect van het  $E$ -veld tussen  $P$  en  $Q$ , maar registreert tevens het effect ten gevolge van het ook aanwezige *variërende*  $H$ -veld (vergelijk paragraaf 1.2.3)! Merk nu op dat er in het oppervlak van de lus, gevormd door de aansluitdraden van  $V_1$  en  $V_2$ , een met het  $H$ -veld gepaard gaande variërende flux  $\phi(t)$  ontstaat. Volgens de wet van FARADAY-MAXWELL is het effect van  $\phi(t)$  op beide voltmeters tezamen gelijk aan de *inductie-spanning*  $d\phi/dt$ . Dit is juist het bedrag dat de uitslag van  $V_1$  en  $V_2$  verschillen.

Beschouw vervolgens figuur 1.18(b), alwaar twee *identieke* ampèremeters  $A_1$  en  $A_2$  in een stroomvoerende verbinding zijn opgenomen. Ook hier blijken de *verschillend* gepositioneerde meters een *afwijkend* meetresultaat op te leveren! Dit wordt ingezien, als men beseft dat er op het *oppervlak* van de draadsectie tussen  $A_1$  en  $A_2$  een met het variërende  $E$ -veld gepaard gaande variërende ladingsaccumulatie  $q(t)$  optreedt. De afwijkende meteruitslag kan daarom worden toegeschreven aan de *verplaatsingsstroom*  $dq/dt$  die als het ware uit de sectie wegsijpelt (vergelijk de verplaatsingsstroom tussen twee condensatorplaten; par. 1.2.3).

Samenvattend wordt geconcludeerd dat er weliswaar steeds over ‘spanningen’ en ‘stromen’ kan worden gesproken, maar in het algemeen *niet* over de ‘*dé* spanning tussen twee punten’ en ‘*dé* stroom in een verbindingsdraad’. Snelle stroomvariaties, en dus de aanwezigheid van elektromagnetische straling, zijn er de oorzaak van dat de uitkomst van een spanning- en stroommeting afhankelijk is van de ruimtelijke positie van de meter.

Het optreden van elektromagnetische straling heeft tevens tot gevolg dat de wetten van KIRCHHOFF hun geldigheid verliezen. Immers, de daarin voorkomende elektrische grootheden (spanning en stroom) hebben nu een dubbelzinnige betekenis; hun waarden zijn afhankelijk van de positie van de meters.

De slotsom is dat (zeer) snel variërende elektromagnetische verschijnselen *niet* vanuit de circuittheorie kunnen worden begrepen. Hoewel wiskundig gecompliceerd,

dient in voorkomende gevallen uitgegaan te worden van de algemeen geldige veldtheorie, alwaar de *veldvergelijkingen van MAXWELL* het wiskundige fundament vormen.

Binnen welke criteria is de hypothese als een (zeer) goede *benadering* bruikbaar? Met verwijzing naar figuur 1.18 dient dan blijkbaar een nagenoeg gelijke meteruitslag te worden waargenomen. Dit is alleen dan het geval, indien  $\phi(t)$  en  $q(t)$  nagenoeg geen effect sorteren op respectievelijk de volt- en ampèremeters.

Een voor de hand liggende mogelijkheid is dan, dat de meters steeds buiten de invloedssfeer van  $\phi(t)$  en  $q(t)$  kunnen worden gehouden. Dit lukt pas dan, als er buiten de bouwstenen om nagenoeg *geen plaats* beschikbaar is voor  $\phi$  en  $q$ . In concreto houdt dit in, dat het materiële circuit van voldoende *kleine afmetingen* zal moeten zijn. Dit is één criterium.

Men kan ook redeneren dat het optreden van  $\phi(t)$  en  $q(t)$  weliswaar onvermijdelijk is, maar dat hun *effect* alsnog verwaarloosbaar klein is als zij voldoende *langzaam* in de tijd variëren (*quasi-stationaire stroming*). Dan is immers  $d\phi/dt$  en  $dq/dt$  nagenoeg gelijk aan nul. Blijkbaar is dat een ander criterium.

Binnen de beredeneerde criteria zijn de spanning en de stroom goed gedefiniëerde grootheden. Wij zullen spoedig zien dat beide criteria twee kanten van *dezelfde* medaille zijn.

Het zij nog eens herhaald, dat er bij stationaire stroming *geen* koppeling tussen de dan opgewekte elektrische en magnetische velden optreedt. Daarmee is tevens elke straling absent. Het is daarom voorstelbaar, en experimenten bevestigen het, dat de wel optredende, doch *zwakke* koppeling bij *quasi-stationaire* stroming nog (lang) geen aanleiding geeft tot enige straling van betekenis. Volgens deze gedachtengang is het bij quasi-stationaire stroming in (zeer) goede *benadering* toch weer mogelijk om het elektrische en magnetische veld op verschillende plaatsen in de ruimte geconcentreerd te denken in circuitelementen. Tevens blijken de wetten van KIRCHHOFF de realiteit in (zeer) goede *benadering* te beschrijven.

Blijkbaar is de circuittheorie gebaseerd op een *benadering* van de elektromagnetische veldtheorie. De benadering is gerechtvaardigd, als de weggestraalde elektromagnetische energie verwaarloosbaar klein is. De eerder gevonden criteria staan daar borg voor. Naar het laatste criterium, wordt het de *quasi-stationaire benadering* genoemd ([11], [12]).

De hier beschreven relatie tussen de circuittheorie (KIRCHHOFF) en de elektromagnetische veldtheorie (MAXWELL) is van dezelfde aard als die tussen de klassieke mechanica (NEWTON) en de relativiteitstheorie (EINSTEIN). Als de snelheden van puntmassa's voldoende ver onder de lichtsnelheid blijven, is de klassieke mechanica net zo'n goede beschrijving van de realiteit als de circuittheorie voor voldoende langzame stroomvariatiës.

Wij laten nu zien hoe de criteria 'kleine' afmetingen en 'langzame' variaties met elkaar samenhangen. Bedenk dan dat *beide* criteria kunnen worden herleid tot

de *enkele* omstandigheid dat de elektromagnetische straling een verwaarloosbare rol speelt. En, omdat straling wordt gekarakteriseerd door een *golfbeweging*, zullen beide criteria aan diezelfde golfbeweging ontleend moeten worden!

Elke golfbeweging heeft een *voortplantingssnelheid*  $c$  (in meter per seconde: m/s), een *golflengte*  $\lambda$  [m] en een *periode*  $T$  [s]. De laatste grootheid is gelijk aan de tijdsduur waarin één golfbeweging wordt volbracht. Het is de *tijdmaat* van de golf. Anderzijds is de golflengte  $\lambda$  de *afstandsmaat* ervan. Als de *frequentie*  $f$  (in hertz: Hz) staat voor het aantal golfbewegingen per tijdseenheid, dan geldt er

$$(1.18) \quad \lambda = cT \quad \text{met} \quad T = f^{-1}.$$

In het geval van een *elektromagnetische* golf bewijst de *theorie van MAXWELL* dat

$$(1.19) \quad c = (\epsilon\mu)^{-1/2},$$

hetgeen juist gelijk is aan de *lichtsnelheid* (zie de opmerking aan het einde van deze paragraaf). Hierbij is aangenomen dat de golf zich voortplant in een medium met constitatieve vergelijkingen van de vorm (1.17) met  $\sigma = 0$ . Voor vacuüm of lucht, waar  $\epsilon = \epsilon_0$  en  $\mu = \mu_0$ , wordt  $c = c_0$  gevonden als

$$(1.20) \quad c_0 = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

Stel nu dat  $f_{\max}$  [Hz] de maximaal van belang zijnde frequentie van de variërende elektrische stromen in een materieel circuit voorstelt. Dan is volgens (1.18) de kleinste golflengte  $\lambda_{\min}$  [m] van de opgewekte elektromagnetische golf gelijk aan

$$(1.21) \quad \lambda_{\min} = c/f_{\max}.$$

Indien  $d_{\max}$  [m] de maximale afmeting van het circuit is, dan vertaalt het criterium ‘kleine’ afmetingen zich in de eis

$$(1.22) \quad d_{\max} \ll \lambda_{\min} \quad (\text{vuistregel: } d_{\max} \leq 0,1 \lambda_{\min})$$

terwijl het criterium ‘langzame’ variaties erop neerkomt dat

$$(1.23) \quad f_{\max} \ll c/d_{\max} \quad (\text{vuistregel: } f_{\max} \leq 0,1 c/d_{\max})$$

Binnen de onderling uitwisselbare criteria (1.22) en (1.23) kan het elektrische gedrag van het circuit in *zeer goede benadering* worden beschreven door de circuittheorie (zie [13] voor een discussie over gepreciseerde bovengrenzen).

De lezer dient zich ervan te overtuigen dat de in paragraaf 1.2.3 behandelde dynamische verschijnselen zich steeds binnen de context van de quasi-stationaire

benadering afspelen. Immers, in de daar gehouden beschouwingen vormde de plaatsafhankelijkheid, en dus het golfaspect geen enkele overweging; de invloed van straling werd op voorhand stilzwijgend verwaarloosd. De quasi-statische verschijnselen van paragraaf 1.2.3 variëren daarom nog ordes langzamer dan de hier beschreven quasi-stationaire variaties.

In het nu volgende illustreren wij hoe de quasi-stationaire benadering in de praktijk uitpakt.

De eerste illustratie betrekken wij uit de *elektrische energievoorziening*, waar gewerkt wordt met een frequentie van 50 Hz (de netfrequentie). Volgens (1.20) en (1.21) heeft de dan opgewekte elektromagnetische golf een golflengte van

$$(1.24) \quad \lambda = (3 \times 10^8)/50 = 6000 \text{ km},$$

waarbij is aangenomen dat de golf zich voortplant in de lucht rondom de hoogspanningsgeleiders. Gemeten ten opzichte van deze afstandsmaat, heeft een metershoge hoogspanningstransformator een nietige afmeting. Het dynamische gedrag van zo'n bouwsteen kan dus zeer accuraat binnen de quasi-stationaire benadering worden gemodelleerd. Verder leert (1.22) dat toepassing van de circuittheorie is gerechtvaardigd, indien de omvang van een hoogspanningscircuit niet groter is dan

$$(1.25) \quad d_{\max} \leq 0,1 \times 6000 = 600 \text{ km}.$$

Daar hoogspanningscircuits continenten overspannen, zal bij het *elektriciteits-transport* de elektromagnetische golf *niet* verwaarloosd kunnen worden (zie Appendix 1.A).

Een ander uiterste doet zich voor in de *micro-elektronica*. De daar gefabriceerde chips hebben een oppervlakte in de orde van 0,25 à 1 cm<sup>2</sup>. Als wij ervan uitgaan dat de opgewekte elektromagnetische golf zich deels langs de geleidende banen op het chipoppervlak voortplant, zullen de elektromagnetische eigenschappen van het chipmateriaal bij de berekening betrokken moeten worden. Stel, dat die eigenschappen worden gegeven door  $\epsilon/\epsilon_0 = 9$ ,  $\mu/\mu_0 = 1$  en  $\sigma = 0$ , dan vinden we voor de snelheid van de golf op de chip (vergelijk (1.19) en (1.20))

$$(1.26) \quad c = (9\epsilon_0\mu_0)^{-1/2} \approx 10^8 \text{ m/s}.$$

Zelfs als men in de chip te maken heeft met een frequentie van 100 MHz (1 MHz = 10<sup>6</sup> Hz), waarbij een golflengte hoort van

$$(1.27) \quad \lambda_{\min} = 10^8/(100 \times 10^6) = 1 \text{ m},$$

dan nog heeft de chip gemeten ten opzichte van deze afstandsmaat een *verwaarloosbare* afmeting. Immers,

$$(1.28) \quad d_{\max} \leq 0,1\lambda_{\min} = 10 \text{ cm}.$$

Echter, als de chip wordt aangesloten op andere apparaten, kan de lengte van de daarvoor benodigde *aansluitdraden* wel eens groter uitvallen dan  $d_{\max}$ . Het golfaspect komt dan alsnog om de hoek kijken (zie Appendix 1.A).

Overigens kan de eventueel van *buiten* het circuit afkomstige elektromagnetische straling óók zijn invloed doen gelden. Zo kan bijvoorbeeld een *bedradingslus* geheel onverwacht als *ontvangstantenne* functioneren. Men kan zich voorstellen dat de daarin geïnduceerde spanning een zeer ongewenste uitwerking kan hebben. Het is dus zaak om de invloed van zulke *elektromagnetische storingsbronnen* reeds in het ontwerpstadium te elimineren. Men zegt dat een aldus ontworpen circuit *elektromagnetisch compatibel* is met zijn omgeving (EMC: electromagnetic comptability [14]).

**Oefening 1.9** Tot welke frequentie zijn geconcentreerde circuitelementen bruikbare concepten om het elektrische gedrag van een chip van  $1 \text{ cm}^2$  te beschrijven? Reken met  $c = 10^8 \text{ m/s}$ .

**Oefening 1.10** Laat zien dat het effect van elektrische stroomvariaties met een minimum tijdsduur van  $t_{\min} \geq 0,1 d_{\max}/c$  nog binnen de quasi-stationaire benadering kan worden bestudeerd.

### Opmerking 1.2

In de theorie van J.C. MAXWELL is de interveniërende rol van het *medium* waarin de elektromagnetische verschijnselen zich voordoen van prominent belang. De mentale voorstelling die MAXWELL naar de inzichten van M. FARADAY van dit interventiemechanisme maakte, stelde hem in staat het bestaan van *elektromagnetische golven* te *voorspellen* en hun voortplantingssnelheid te *berekenen*. Het bleek hem dat de numerieke waarde van zijn berekende snelheid (1.19) in dezelfde orde van grootte lag als de onafhankelijk gemeten lichtsnelheid. Voor MAXWELL was dit de bevestiging van zijn hypothese dat *licht* een elektromagnetisch fenomeen is. Het numerieke verschil schreef hij daarom toe aan onnauwkeurigheden in de metingen van  $\epsilon$  en  $\mu$  enerzijds, en de lichtsnelheid anderzijds [15]. Achteraf zijn *alle* door MAXWELL gedane voorspellingen *experimenteel* bevestigd!

De door MAXWELL opgestelde vergelijkingen van het elektromagnetisme zijn de *wiskundige generalisatie* van *alle* experimentele en wiskundige kennis van dit fenomeen tot dan toe. Tot op heden hebben zij bewezen de elektromagnetische verschijnselen op macro-fysische schaal correct te beschrijven. (Zie [16] voor een even helder als beknopt historisch overzicht; in [17] wordt de opkomende invloed van MAXWELL's theorie op de elektrotechniek in historisch perspectief geplaatst.)

## 1.5 EENHEDEN

De door ons gehanteerde eenheden van grootheden zijn afkomstig van het *Internationale Stelsel van Eenheden* (SI; van het Frans: *Système International*). Deze *SI-eenheden* zijn gebaseerd op zeven *grondeenheden* (tabel 1.1).

Tabel 1.1. *SI-grondeenheden*.

grootheid	symbool	SI-eenheid	symbool
lengte	$l$	meter	m
massa	$m$	kilogram	kg
tijd	$t$	seconde	s
elektrische stroom	$i$	ampère	A
temperatuur	$T$	kelvin	K
lichtsterkte	$I$	candela	cd
hoeveelheid stof	$n$	mol	mol

Alle andere SI-eenheden zijn in de SI-grondeenheden uit te drukken; sommigen hebben een eigen naam gekregen (tabel 1.2).

Tabel 1.2. *SI-eenheden met eigen naam*.

grootheid	symbool	SI-eenheid	symbool
kracht	$F$	newton	N
energie	$w$	joule	J
vermogen	$p$	watt	W
elektrische lading	$q$	coulomb	C
magnetische flux	$\phi$	weber	Wb
elektrische spanning	$u$	volt	V
elektrische potentiaal	$v$	volt	V
capacitantie	$C$	farad	F
inductantie	$L$	henry	H
resistantie	$R$	ohm	$\Omega$
conductantie	$G$	siemens	S
frequentie	$f$	hertz	Hz

Voor de symbolen van de overige SI-eenheden hanteren wij een *gestandaardiseerde schrijfwijze*. Deze houdt in, dat negatieve machten van eenheden worden vermeden door toepassing van een *schuine breukstreep*; uitgezonderd het geval van uitsluitend negatieve machten. Dus ‘meter per seconde’ wordt m/s, maar  $s^{-1}$  voor ‘per seconde’.

Indien een eenheid te groot of te klein is voor praktisch gebruik, wordt een *decimaal voorvoegsel* aan de eenheid gekoppeld. Tabel 1.3 geeft een overzicht van de voorvoegsels.

Tabel 1.3. Decimale voorvoegsels.

voorvoegsel	afkorting	factor
tera	T	$10^{12}$
giga	G	$10^9$
mega	M	$10^6$
kilo	k	$10^3$
deci	d	$10^{-1}$
centi	c	$10^{-2}$
milli	m	$10^{-3}$
micro	$\mu$	$10^{-6}$
nano	n	$10^{-9}$
pico	p	$10^{-12}$
femto	f	$10^{-15}$

## SAMENVATTING

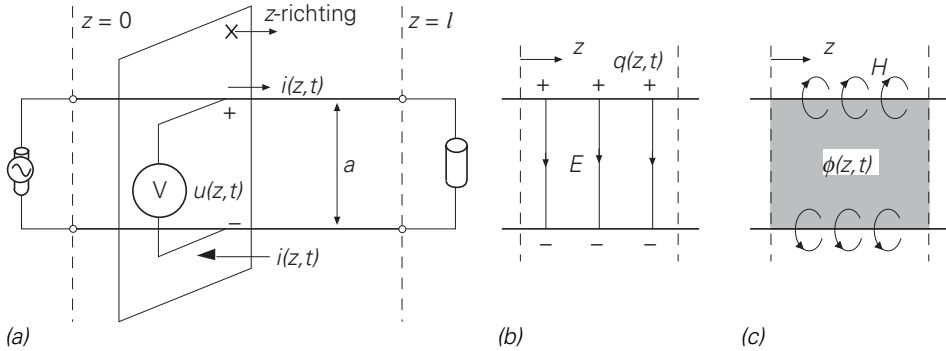
- Een (*materieel*) *elektrisch circuit* is een samenstel van elektrotechnische bouwstenen. Deze componenten zijn elk voorzien van twee of meer *aansluitklemmen*.
- De circuittheorie gaat uit van het elektrische *klemgedrag* van componenten.
- Er wordt steeds verondersteld dat elektrische *spanningen* en *stromen* *ondubbeltzinnig* kunnen worden gemeten. De *wetten van KIRCHHOFF* (1.1) zijn een direct gevolg van deze basishypothese. In de circuittheorie worden de wetten van KIRCHHOFF als *basispostulaten* opgevoerd.
- De werking van de *condensator* berust op ladingsverzameling (alléén een *E*-veld), van de *spoel* op fluxconcentratie (alléén een *H*-veld), en van de *weerstand* op het weerstand bieden aan een elektrische stroom. Het *statische klemgedrag* van deze bouwstenen wordt gegeven door de wiskundige relaties (1.3), (1.5) en (1.6). Zij weerspiegelen tevens de *elektromagnetische eigenschappen* van het gebruikte component *materiaal*.
- Indien de elektrische grootheden een dynamisch gedrag vertonen, ontstaat in de condensator tevens fluxconcentratie. Voor quasi-statische variaties is dit neveneffect te verwaarlozen. De *quasi-statische klemrelatie* (1.8) heeft daarom dezelfde wiskundige vorm als (1.3). Voor de spoel en de weerstand gelden soortgelijke overwegingen.
- De *dynamische klemrelaties* van bouwstenen zijn meestal gecompliceerd; de klemrelaties (1.13), (1.14) en (1.15) zijn voorbeelden.
- De basisgrootheden in de circuittheorie zijn de *spanning*  $u$ , de *stroom*  $i$ , de *lading*  $q$  en de *flux*  $\phi$ . De laatste twee kunnen als hulpgrootheden worden opgevat.
- De condensator en de spoel gedragen zich als *energiebuffers* die *traagheid* vertonen. De weerstand *dissipeert* de eraan toegevoerde elektrische energie *onmiddellijk*.
- Een *circuitelement* is het meest elementaire *model* van een bouwsteen; het brengt alléén het essentiële werkingsmechanisme van de bouwsteen in rekening.
- De *klemrelaties* van circuitelementen zijn wiskundig *exact*; ze zijn identiek aan de quasi-statische klemrelaties van de overeenkomstige bouwstenen.

- *Parasitaire* circuitelementen brengen ongewenste elektromagnetische veldeffecten separaat in rekening.
- In de klemrelatie van een *geconcentreerd* circuitelement komt geen afstandsmaat voor.
- De capaciteit en inductiviteit zijn *dynamische* circuitelementen; de overige circuitelementen vertonen een *statisch* gedrag.
- Het dynamische klemgedrag van een bouwsteen kan middels circuitelementen worden nagebootst. Het model bevat *serie-* of *parallelverbindingen* van circuitelementen, of beide.
- Een *elektrisch circuit* of (*abstract*) *elektrisch circuit* is een samenstel van circuitelementen. Het is een *wiskundig model* met spanningen en stromen als beschrijvende variabelen. De wiskundige formules worden deels geleverd door de *klemrelaties* van de circuitelementen, en voor het overige door de *wetten van KIRCHHOFF*. Deze wetten hebben betrekking op de *topologie* van het model.
- Een model is *valide* als het aan de realiteit beantwoordt, *consistent* als het geen logische tegenspraak in zich bergt, *nauwkeurig* als de elektromagnetische veldeffecten met grote precisie zijn verwerkt. Een *robuust* model is weinig gevoelig voor modelafwijkingen.
- Elk model is een afgewogen *compromis* tussen realiteit en eenvoud.
- Binnen de *circuitanalyse* worden circuitproblemen opgelost. Binnen de *circuit-synthese* worden elektrische circuits ontworpen.
- Elke *bedrading* vertoont drie *parasieten*: een capaciteit, een inductiviteit en een weerstand.
- Spanningen en stromen zijn goed gedefinieerde grootheden als de elektromagnetische *straling* kan worden *verwaarloosd*. Dit is het geval als het materiële circuit voldoende *kleine afmetingen* heeft, of wat op hetzelfde neerkomt, als de elektrische stromen voldoende *langzaam variëren* (quasi-stationaire stroming). De criteria (1.22) en (1.23) zijn de vertaling van deze uitspraak. Hierbinnen is de *circuittheorie* een goede *benadering* van de elektromagnetische veldtheorie van MAXWELL.
- De *aansluitdraden* tussen de componenten kunnen ongewild als zend- of ontvangstantenne functioneren.
- De gehanteerde SI-eenheden zijn gebaseerd op zeven grondeenheden. Alle andere SI-eenheden zijn daarin uit te drukken.

## APPENDIX 1.A VERDEELDE CIRCUITELEMENTEN

In deze appendix bestuderen wij het elektrische gedrag van twee evenwijdige, nabijgelegen elektrische geleiders. Zo'n *tweedraadslijn* kan bijvoorbeeld model staan voor de twee aders in een snoer (par. 1.3.4), twee geleidende banen op een chip (par. 1.3.4), twee hoogspanningsgeleiders (par. 1.4) of twee aansluitdraden van een chip (par. 1.4). Experimenten wijzen uit dat langs de evenwijdige geleiders

elektromagnetische golven zich kunnen voortplanten. Deze geleide golven blijken toch nog in termen van spanningen en stromen te kunnen worden beschreven. Wij lichten dit toe.



Figuur 1.A.1. Een tweedraadslijn (a) vertoont condensatorwerking (b) en spoelwerking (c).

De in figuur 1.A.1(a) afgebeelde tweedraadslijn is ter plaatse  $z = 0$  aangesloten op een elektrische signaalgenerator, terwijl het andere einde is afgesloten met een weerstand. Wij gaan ervan uit dat de lengte  $l$  [m] van de lijn niet aan (1.22) voldoet; het is niet voor niets dat zo'n lijn een *lange leiding* wordt genoemd. De dwarsafmeting  $a$  [m] wordt daarentegen wél steeds veel kleiner ondersteld dan de golflengte  $\lambda$  van de opgewekte elektromagnetische golf.

Uit het voorafgaande moge blijken dat deze configuratie zowel een *condensatorwerking* als een *spoelwerking* vertoont; enerzijds fungeren de tegenover elkaar gelegen draden als de platen van een condensator, terwijl er anderzijds in het vlak van tekening een spoelwinding wordt gevormd. In figuur 1.A.1(b) en (c) zijn beide effecten terwille van de overzichtelijkheid apart afgebeeld (vergelijk figuur 1.15).

Daar de lengte  $l$  niet 'klein' is, kan de condensatorwerking niet langer middels een puntvormige capaciteit worden beschreven. Naast de *tijdafhankelijkheid*, is nu tevens de *plaatsafhankelijkheid* van de lading  $q$  op de draden ('platen') van belang. In de notatie  $q = q(z,t)$  wordt die gecombineerde plaats- en tijdafhankelijkheid expliciet tot uitdrukking gebracht. De *quasi-statische klemrelatie* van de condensator ter plaatse  $z$  wordt dan

$$(1.A.1) \quad q(z,t) \bullet \text{---} \bullet u(z,t) \quad \text{met} \quad 0 \leq z \leq l,$$

waarin  $u(z,t)$  de variërende spanning tussen de geleiders ter plaatse  $z$  voorstelt.

Wij haasten ons te vermelden dat de *spanningsmeting* in het *dwarsvlak* ter plaatse  $z$  dient te geschieden (figuur 1.A.1(a)). Dit wordt ingezien als wordt bedacht dat het opgewekte  $H$ -veld steeds evenwijdig aan dit vlak is verondersteld (figuur 1.A.1(c)). Om die reden wordt er in het dwarsvlak, en dus tussen de verbindingsdraden van de voltmeter, géén magnetische flux geconcentreerd. De aldus gemeten

spanning ter plaatse  $z$  levert dan inderdaad een ondubbelzinnig resultaat.

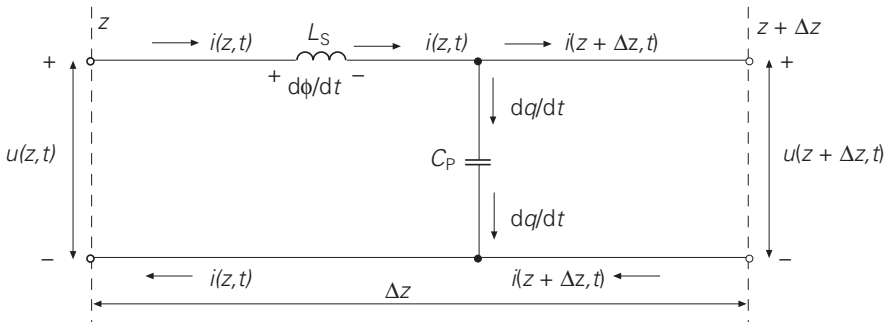
Een analoge beschouwing is van toepassing op de spoelwerking. De magnetische flux  $\phi$  wordt niet langer lokaal geconcentreerd, maar is nu *verdeeld* over het gehele oppervlak tussen de geleiders, dus  $\phi = \phi(z, t)$ . De *quasi-statische klemrelatie* van de spoelwinding ter plaatse  $z$  wordt dan

$$(1.A.2) \quad \phi(z, t) \bullet \text{---} \bullet i(z, t) \text{ met } 0 \leq z \leq l,$$

waarin  $i(z, t)$  de variërende stroom ter plaatse  $z$  voorstelt.

Beschouw nu een sectie  $S$  van de tweedraadslijn. Voor de lengte  $\Delta z$  van  $S$  kiezen we  $\Delta z \ll \lambda$ . Daar alle afmetingen van  $S$  zeer klein zijn ( $a$  was al klein), is de *quasi-stationaire benadering* van toepassing: de elektrische en magnetische velden in de sectie kunnen separaat in rekening worden gebracht middels nu ‘uitgesmeerde’ of *verdeelde circuitelementen* (Eng. distributed elements). De *klemrelaties* van deze elementaire modellen met lengte  $\Delta z$ , zijn volgens de in paragraaf 1.3.1 uiteengezette ideeën identiek aan (1.A.1) en (1.A.2).

In de veronderstelling dat de tweedraadslijn *verliesvrij* is, wordt het in figuur 1.A.2 afgebeelde *dynamische model* van een sectie gevonden (vergelijk figuur 1.15). Hierin zijn  $C_P$  en  $L_S$  respectievelijk de verdeelde capaciteit en inductiviteit van de sectie [18].



Figuur 1.A.2. Het dynamische model van een verliesvrije tweedraadslijnsectie  $S$  met lengte  $\Delta z \ll \lambda$ .

In dit stadium nemen wij tevens aan dat de elektrische eigenschappen van het medium rondom de tweedraadslijn zich vertalen als een evenredigheid tussen  $q$  en  $u$ . Omdat de geaccumuleerde lading  $q$  op de kleine sectie evenredig is met  $\Delta z$ , gaat (1.A.1) over in de klemrelatie van de verdeelde capaciteit  $C_P$

$$(1.A.3) \quad q(z, t) = c_P \Delta z u(z, t) \text{ met } z \in S.$$

Hierin weerspiegelt de constante  $c_P$  de elektrische eigenschappen van het medium, alsook de dwarsafmeting  $a$  van de sectie (de lengteafmeting  $\Delta z$  is reeds expliciet in (1.A.3) verwerkt).

Met soortgelijke aannames voor het verband tussen  $\phi$  en  $i$ , gaat (1.A.2) over in de klemrelatie van de verdeelde inductiviteit  $L_S$

$$(1.A.4) \quad \phi(z,t) = l_S \Delta z i(z,t) \quad \text{met } z \in S,$$

waarin de constante  $l_S$  het magnetische analogon is van  $c_P$ .

Toepassen van de stroomwet van KIRCHHOFF (1.1) op het model van figuur 1.A.2 geeft

$$(1.A.5) \quad i(z,t) = \frac{dq}{dt} + i(z + \Delta z, t) \quad \text{met } z \in S,$$

hetgeen met gebruikmaking van de klemrelatie (1.A.3) overgaat in

$$(1.A.6) \quad i(z,t) = c_P \Delta z \frac{du(z,t)}{dt} + i(z + \Delta z, t) \quad \text{met } z \in S.$$

Rangschikken en delen door  $\Delta z$ , geeft in de limiet  $\Delta z \rightarrow 0$

$$(1.A.7) \quad \frac{\partial i}{\partial z} = -c_P \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{met } 0 \leq z \leq l.$$

Hierin verwijst het symbool  $\partial$  naar een *partiële* differentiatie, d.w.z. een differentiatie naar één van de twee onafhankelijke variabelen  $z$  of  $t$ ; de andere onafhankelijke variabele telt bij de *partiële* differentiatie niet mee (wordt als constante gerekend).

Toepassen van de spanningswet van KIRCHHOFF (1.1) op het model van de sectie geeft geheel analoog

$$(1.A.8) \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -l_S \frac{\partial i}{\partial t} \quad \text{met } 0 \leq z \leq l.$$

Differentiëren van (1.A.7) naar  $t$ , en van (1.A.8) naar  $z$ , geeft na substitutie van het laatste resultaat in het eerste

$$(1.A.9) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - c^{-2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{met } 0 \leq z \leq l$$

Hierin is

$$(1.A.10) \quad c \stackrel{\text{def}}{=} (c_P l_S)^{-1/2},$$

terwijl het symbool  $\partial^2$  naar twee opeenvolgende differentiaties verwijst. Via een in omgekeerde volgorde uitgevoerde eliminatieprocedure wordt uit (1.A.8) en (1.A.9) verkregen

$$(1.A.11) \quad \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - c^{-2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0 \quad \text{met } 0 \leq z \leq l$$

De vergelijkingen (1.A.9) en (1.A.11) heten *golfvergelijkingen*; zij treden ook op in de theorie van de trillende snaar. Alvorens de naamgeving nader te verklaren, verifiëren wij eerst dat een spanning  $u = u(z, t)$  van de gedaante

$$(1.A.12) \quad u = u(t - z/c)$$

een oplossing is van (1.A.9). Met gebruikmaking van de hulpgrootheid  $x = t - z/c$  wordt achtereenvolgens verkregen

$$(1.A.13) \quad \frac{\partial u(x)}{\partial z} = \frac{du(x)}{dx} \frac{\partial x}{\partial z} = -c^{-1} \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u(x)}{\partial z^2} = c^{-2} \frac{d^2 u}{dx^2},$$

$$(1.A.14) \quad \frac{\partial u(x)}{\partial t} = \frac{du(x)}{dx} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u(x)}{\partial t^2} = \frac{d^2 u}{dx^2}.$$

Een terugsubstitutie van (1.A.13) en (1.A.14) in het linkerlid van (1.A.9) leert dat (1.A.12) inderdaad aan alle eisen voldoet.

Merk nu op dat voor elke combinatie van  $z$  en  $t$  die voldoet aan

$$(1.A.15) \quad t - z/c = \text{constant},$$

de waarde van  $u(t - z/c)$  gelijk blijft. Als een waarnemer één bepaalde waarde van  $u$  bij zou willen houden, dient hij in  $\Delta t$  seconde een afstand van  $\Delta z$  meter af te leggen, die met (1.A.15) volgt uit

$$(1.A.16) \quad t - z/c = (t + \Delta t) - (z + \Delta z)/c,$$

zodat

$$(1.A.17) \quad \Delta z = c\Delta t.$$

Blijkbaar verplaatst een spanningswaarde  $u$  zich met de *constante snelheid*  $c$  langs de lijn. Omdat de signaalgenerator een in de tijd variërende sterkte heeft, kan de opgewekte spanning nu geïnterpreteerd worden als een *lopende spanningsgolf*.

**Oefening 1.11** Laat zien dat  $u = u(t + z/c)$  eveneens een oplossing is van (1.A.9). Interpreteer deze oplossing als een lopende spanningsgolf. In welke richting plant de golf zich voort?

Eenzelfde interpretatie is van toepassing op de stroom  $i = i(z, t)$ . De vorm van (1.A.11) is immers identiek aan (1.A.9). De oplossing

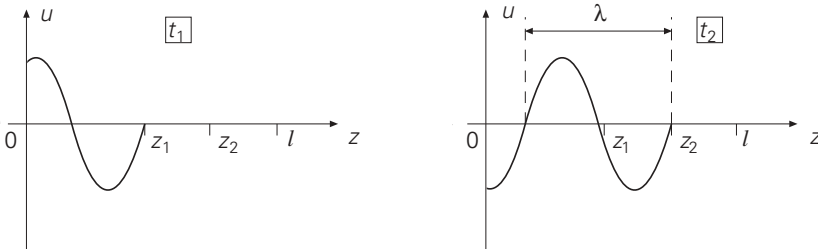
$$(1.A.18) \quad i = i(t - z/c)$$

stelt dus een *lopende stroomgolf* voor.

Daar de golven (1.A.12) en (1.A.18) volgens (1.A.7) en (1.A.8) met elkaar zijn gekoppeld, wordt er inderdaad een lopende *elektromagnetische golf* waargenomen die zich met constante snelheid  $c$  langs de lijn voortplant.

**Oefening 1.12** Bewijs dat de koppeling tussen  $u$  en  $i$  wordt gegeven door  $u = (l_S/c_P)^{1/2}i$ .

In figuur 1.A.3 is het verloop van de spanningscomponent langs de lijn op twee opeenvolgende tijdstippen  $t_1$  en  $t_2$  weergegeven.



Figuur 1.A.3. Het spanningsverloop langs een verliesvrije tweedraadslijn met lengte  $l$  op twee opeenvolgende tijdstippen ( $t_2 > t_1$ ).

Nadat de golf door de signaalgenerator is opgewerkt, duurt het  $l/c$  seconde voordat de golf bij de weerstand ter plaatse  $z = l$  is gearriveerd. Men kan zich voorstellen dat daar een deel van de elektromagnetische energie wordt *gedissipeerd*, terwijl een ander deel wordt *gereflecteerd* in de vorm van een in de tegenovergestelde richting lopende golf. Bij voortdurende werking van de generator zal na enige tijd een *staande golfpatroon* op de lijn waarneembaar zijn [19].

Het is tevens voorstelbaar dat als de afsluitweerstand niet aanwezig zou zijn, de aldaar arriverende golf als het ware doorschiet! In dat geval lanceert de lijn een elektromagnetische golf die zijn weg in de vorm van *straling* in de vrije ruimte voortzet. (Hierop berust de werking van de zogenaamde *dipool antenne*; als de evenwijdige draden van de lijn aan het eind worden opengebogen, kan men een zeer effectieve ‘lanceerinrichting’ verkrijgen.) De hier beschreven *stralingsbron* treedt echter niet alleen op bij volledige absentie van de weerstand, maar is ook waarneembaar als de weerstand wèl aanwezig is [20].

Als de lijn wordt geïdentificeerd met de aansluitdraden van een chip, hebben we al ras te maken met een hinderlijke *storingsbron* voor de omringende apparatuur. Immers, de nabij gelegen apparatuur kan zelf ook (lange) aansluitdraden hebben die, we stelden het reeds eerder, als *ontvangstantenne* voor de stoorstraling kan optreden [21].

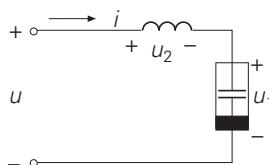
## REFERENTIES

- [1] IEEE Trans. Circuits and systems, vol. CAS-31, no. 1, 1984.
- [2] Chua, L.O., and R.N. Madan, 'Sights and Sounds of Chaos', IEEE Circuits and Devices, vol. 4, no. 1, pp. 3-13, 1988.
- [3] Schelkunoff, S.A., 'On Teaching the Undergraduate Electromagnetic Theory', IEEE Trans. Education, vol. E-15, no. 1, pp. 15-25, 1972.
- [4] Slater, J.C., and N.H. Frank, *Electromagnetism*, McGraw-Hill, New York, 1947, reprinted by Dover Public., Inc., New York, 1969, chapt. VII.
- [5] Chua, L.O., *Introduction to Non-linear Network Theory*, McGraw-Hill, New York, 1969, chapt. I.
- [6] Schelkunoff, S.A., loc. cit.
- [7] Fano, R.M., L.J. Chu, and R.B. Adler, *Electromagnetic Fields, Energy, and Forces*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960, chapt. 8.
- [8] Magid, L.M., *Electromagnetic Fields, Energy and Waves*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1972, chapt. 9.
- [9] Chua, L.O., and S.C. Bass, 'A Generalized Hysteresis Model', IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-19, no. 1, pp. 36-48, 1972.
- [10] Magid, L.M., *Electromagnetic Fields, Energy and Waves*, loc. cit., chapt. 7.
- [11] Fano, R.M., L.J. Chu, and R.B. Adler, *Electromagnetic Fields, Energy, and Forces*, loc. cit., chapt. 6.
- [12] Magid, L.M., *Electromagnetic Fields, Energy and Waves*, loc. cit., chapt. 9.
- [13] Schelkunoff, S.A., loc. cit.
- [14] IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility, 'More on EMC Terminology', vol. EMC-29, no. 3, 1987.
- [15] Maxwell, J.C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford, Clarendon Press, 1873, reprinted by Dover Public., Inc., New York, 1954, chapt XX.
- [16] Slater, J.C., and N.H. Frank, *Electromagnetism*, loc. cit. chapt I.
- [17] Schelkunoff, S.A., 'Forty Years Ago: Maxwell's Theory Invades Engineering - and Grows with It', IEEE Trans. Education, vol. E-15, no. 1, pp. 2-14, 1972.
- [18] Johnk, C.T.A., *Engineering Electromagnetic Fields and Waves*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988, chapt. 9.
- [19] Johnk, C.T.A., *Engineering Electromagnetic Fields and Waves*, loc. cit., chapt. 10.
- [20] Kami, Y., and R. Sato, 'Analysis of Radiation Characteristics of a Finite-Length Transmission Line Using a Circuit-Concept Approach', IEEE Trans. Electromagnetic Comptability, vol. 30, no. 2, pp. 114-121, 1988.
- [21] Kami, Y., and R. Sato, 'Circuit-Concept Approach to Externally Excited Transmission Lines', IEEE Trans. Electromagnetic Comptability, vol. EMC-27, no. 4, pp. 177-183, 1985.

## VRAAGSTUKKEN

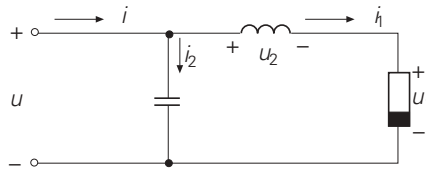
### Modellen van componenten

- 1.1** Verifieer aan de hand van onderstaand verliesvrij condensatormodel de dynamische klemrelatie  $q \longleftrightarrow u - d\phi/dt$  met  $dq/dt = i$ . Hierin is  $q$  de elektrische lading op de condensator en  $\phi$  de erin geconcentreerde magnetische flux.



(Aanwijzing: toepassen van de spanningswet van KIRCHHOFF levert  $u_1 = u - u_2$ . Combineren met de inductiewet van FARADAY-MAXWELL en de klemrelatie van de capaciteit geeft het verlangde resultaat.)

- 1.2** Verifieer aan de hand van onderstaand weerstandsmodel de dynamische klemrelatie  $i - dq/dt \longleftrightarrow u - d\phi/dt$ . Hierin zijn  $q$  en  $\phi$  respectievelijk de elektrische lading en de magnetische flux in de weerstand.



(Aanwijzing: toepassen van de beide wetten van KIRCHHOFF levert respectievelijk  $i_1 = i - i_2$  en  $u_1 = u - u_2$ . Combineren met de inductiewet van FARADAY-MAXWELL, de wet van behoud van lading en de klemrelatie van een abstracte weerstand geeft het verlangde resultaat.)

### De quasi-stationaire benadering

- 1.3** Als de maximaal optredende frequentie in een chip gelijk is aan 1 GHz, hoe groot kan de chip dan nog zijn opdat de quasi-stationaire benadering gerechtvaardigd is? Reken met  $c = 10^8$  m/s. (Antwoord:  $d_{\max} = 1$  cm.)
- 1.4** Als een chip van  $1 \text{ cm}^2$  bestaat uit een materiaal met  $\epsilon/\epsilon_0 = 100$ ,  $\mu/\mu_0 = 1$  en  $\sigma = 0$ , hoe groot kan dan de maximale werkfrequentie zijn opdat er geen rekening met het golfaspect behoeft te worden gehouden? (Antwoord:  $f_{\max} = 300$  MHz.)

### Verdeelde circuitelementen

- 1.5** Laat zien dat  $c_p/l_S = \epsilon\mu$ .
- 1.6** Stel dat de frequentie van de signaalgenerator in figuur 1.A.1 gelijk is aan 10 GHz. Bereken dan de lengte  $l$  van een verliesvrije tweedraadslijn waarop precies een halve golf past. Reken met  $c = 3 \times 10^8$  m/s. (Antwoord:  $l = 1,5$  cm.)
- 1.7** Stel dat de warmteverliezen in een tweedraadslijn niet verwaarloosbaar klein zijn. Beschouw een sectie  $S$  met lengte  $\Delta z \ll \lambda$ . De in  $S$  gedissipeerde energie blijkt te kunnen worden beschreven door een *verdeelde weerstand* met klemrelatie  $u(z,t) = r_S \Delta z i(z,t)$ . Hierin is  $r_S$  een constante. Als de invloed van het optredende magnetisch veld in  $S$  wèl kan worden verwaarloosd, bewijs dan dat  $u$  en  $i$  voldoen aan  $\partial u/\partial z = -r_S i$  en  $\partial i/\partial z = -c_p \partial u/\partial t$ . Laat vervolgens zien dat  $u$  en  $i$  voldoen aan de volgende zogenaamde *diffusievergelijkingen*

$$\partial^2 u/\partial z^2 - r_S c_p \partial u/\partial t = 0 \quad \text{en} \quad \partial^2 i/\partial z^2 - r_S c_p \partial i/\partial t = 0.$$