

# INHOUD

VOORWOORD	5
7 SYSTEMATISCHE ANALYSE	9
7.1 Tableaumethode	10
7.1.1 Inleiding	10
7.1.2 Lineaire resistieve circuits	11
7.1.3 Bestuurde bronnen	15
7.1.4 Niet-lineaire resistieve circuits	20
7.1.5 TA-stempels	22
7.1.6 Dun-bezette matrices	26
7.2 Knooppuntmethode	28
7.2.1 Inleiding	28
7.2.2 Ongewijzigde knooppuntmethode (NA-methode)	28
7.2.3 NA-stempels	37
7.2.4 Gewijzigde knooppuntmethode (MNA-methode)	40
7.2.5 Bestuurde bronnen	51
7.2.6 Niet-lineaire resistieve circuits	55
7.2.7 MNA-stempels	58
7.3 Maasmethode	65
7.3.1 Inleiding	65
7.3.2 Lineaire resistieve circuits	67
7.3.3 Niet-lineaire resistieve circuits	70
7.4 Newton-Raphson-circuits	71
Samenvatting	76
Appendix 7.A Matrixformulering NA-methode	79
Appendix 7.B Matrixformulering MNA-methode	83
Appendix 7.C Bewijs van $\det M = \pm \det T$	87
Appendix 7.D Existentie en eenduidigheid	88
Referenties	95
Vraagstukken	96
Antwoorden	117
8 BASISSTELLINGEN	132
8.1 Lus-snede uitsluitingsbeginsel	133
8.1.1 Bovengrenzen voor spanningen en stromen	136
8.1.2 Signaalversterking	140
8.2 Theorema van Tellegen	143

8.2.1	Behoud van vermogen	146
8.2.2	Vermogensbalans	147
8.2.3	Een eenduidigheidsbewijs	148
8.2.4	Reciprociteit	150
8.2.5	Gevoeligheidsanalyse	151
8.3	Bron-manipulaties	153
8.4	Substitutie beginsel	156
8.5	Superpositie beginsel	158
8.6	Theorema's van Thevenin en Norton	160
8.7	Vermogensaanpassing	168
	Samenvatting	170
	Referenties	172
	Vraagstukken	173
	Antwoorden	187
9	HET HARMONISCHE REGIME	193
9.1	Lineaire en tijd-invariante dynamische systemen	194
9.2	De complexe rekenwijze (theorie)	204
9.3	Berekeningen in het fasor-domein	212
9.4	Fasor-diagrammen	219
9.5	Eenpoorten	226
9.6	Frequentie-afhankelijkheid	229
9.7	Vermogens	245
9.7.1	Gemiddelde en effectieve waarde	245
9.7.2	Vermogensgrootheden	249
9.7.3	Behoud van complex vermogen	258
9.7.4	Complexe vermogensbalans	259
9.7.5	Vermogensaanpassing	265
	Samenvatting	267
	Appendix 9.A Complexe getallen	271
	Appendix 9.B Drie-fasen netten	278
	Referenties	283
	Vraagstukken	283
	Antwoorden	299
	TREFWOORDEN	309

# 8

## BASISSTELLINGEN

De nu volgende stellingen worden *basisstellingen* genoemd, omdat zij enerzijds rechtstreeks teruggrijpen naar de grondslagen van de netwerktheorie, terwijl zij anderzijds ruime toepassing vinden. Binnen hun geldigheidsgebied kunnen zij als uitgangspunt dienen voor verder onderzoek.

Paragraaf 8.1 behandelt als eerste basisstelling het zogenoemde *lus-snedesluitingsbeginsel*. Dit is een puur *topologische* eigenschap die elk *willekeurig* elektrisch circuit bezit. De relevantie voor de elektrische netwerktheorie blijkt al spoedig, als er ook de KIRCHHOFF-wetten bij worden betrokken. Als toepassing worden er *bovengrenzen* gevonden voor de spanningen en stromen in een zekere klasse van niet-lineaire resistieve circuits. Tevens wordt de mogelijkheid onderzocht van *signaalversterking*.

Het naar B.D.H. TELLEGEN vernoemde theorema van paragraaf 8.2 berust uitsluitend op de KIRCHHOFF-postulaten. Het theorema heeft uitdrukkelijk niets van doen met de *u-i*-relaties, en geldt derhalve voor *willekeurige* elektrische circuits. Niet-lineaire en tijd-variante elementen zijn alle toegelaten. De *algemene geldigheid*, gevoegd bij de *eenvoud*, maakt het *theorema van TELLEGEN* misschien wel tot de meest opmerkelijke stelling van de elektrische netwerktheorie.

Als eerste toepassing wordt bewezen, dat de *wet van behoud van vermogen* binnen de netwerktheorie algemene geldigheid heeft. Vervolgens voert een nadere, fysische interpretatie van deze behoudswet tot de zogenaamde *vermogensbalans*.

De bewijskracht van TELLEGEN's theorema wordt verder geïllustreerd middels het gegeven *eenduidigheidsbewijs* voor een zekere klasse van niet-lineaire resistieve circuits. Enkele andere, ruim bekende toepassingen (*reciprociteit* en *gevoeligheidsanalyse*) krijgen een beknopte introductie.

Veel minder fundamenteel, maar eveneens *algemeen geldig* zijn de *bron-manipulaties* van paragraaf 8.3. Deze maken praktische circuit modificaties mogelijk (bij gelijkblijvend circuitgedrag).

Dat laatste is tevens het geval bij het zogeheten *substitutiebeginsel*, dat in paragraaf 8.4 aan bod komt. Ofschoon het substitutie beginsel van toepassing is voor *willekeurige* elektrische circuits, heeft het de *beperking* dat er slechts één oplossing in het geding kan zijn.

In de theorie van *lineaire* elektrische circuits neemt het *superpositiebeginsel* een centrale plaats in. Paragraaf 8.5 beperkt zich voorsnog tot resistieve circuits.

De klassieke *theorema's van THEVENIN en NORTON* zijn een direct gevolg van het superpositiebeginsel, en zijn derhalve eveneens beperkt tot *lineaire* elektrische circuits. Paragraaf 8.6 laat zien dat een lineaire bron-eenpoort *aan de klemmen* equivalent is met een enkele *spanningsdoos* (het zogeheten *THEVENIN-equivalent* van de eenpoort) en/of een enkele *stroomdoos* (het *NORTON-equivalent*).

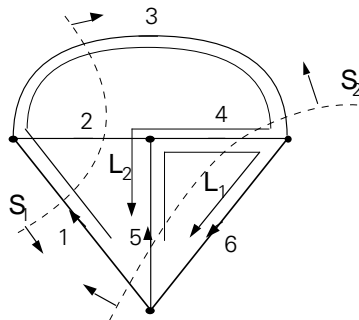
Tenslotte wordt in paragraaf 8.7 nagegaan onder welke voorwaarde een optimale vermogensoverdracht plaats vindt van een gegeven eenpoort naar een daarop aangesloten belastingsweerstand (*vermogensaanpassing*).

## 8.1 LUS-SNEDE UITSLUITINGSBEGINSEL

Het *lus-snede uitsluitingsbeginsel* is een fundamentele eigenschap van grafen (discrete structuren: knopen en takken), en geldt derhalve voor *elk* elektrisch circuit. Eerst volgen enkele definities.

- (8.1) Een *uniforme lus* is een lus waarvan de gerichte takken alle dezelfde lus oriëntatie hebben. Zo niet, dan heet de lus *niet-uniform*.  
Een *uniforme snede* is een snede waarvan de gerichte takken alle dezelfde snede oriëntatie hebben. Zo niet, dan heet de snede *niet-uniform*.

In figuur 8.1 is de lus  $L_1$  een uniforme lus;  $L_2$  is niet-uniform. De snede  $S_1$  is uniform;  $S_2$  is dat niet. (Ter memorie: een *lus* is een gesloten weg — geen takherhalingen —; de gestippelde oppervlakken en de erdoor gesneden takken zijn eerder beide *sneden* genoemd. Een snede hakt de graaf op in losse brokstukken. Indien na verwijdering van de snede precies twee brokstukken achterblijven, heet de snede een *cutset* — zie Hoofdstuk 3. In deze paragraaf wordt steeds verondersteld dat de sneden cutsets zijn).

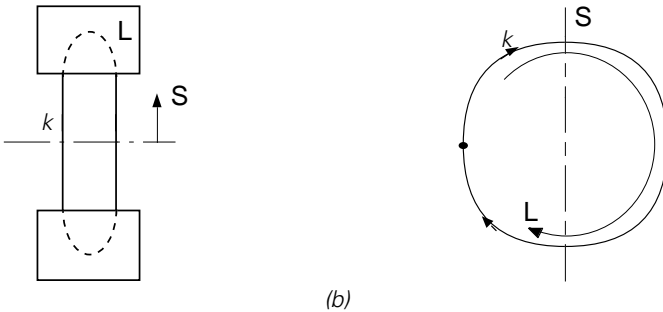


Figuur 8.1. De lus  $L_1$  en de snede  $S_1$  zijn uniform;  $L_2$  en  $S_2$  zijn niet-uniform.

*Lus-snede uitsluitingsbeginsel*

(8.2) Elke tak van een samenhangende gerichte graaf behoort òf tot een *uniforme lus* òf tot een *uniforme snede*. Beide mogelijkheden sluiten elkaar uit.

Figuur 8.2 maakt het uitsluitingsbeginsel direct inzichtelijk. (Zie [1] voor een bewijs dat de elkaar wederzijds uitsluitende mogelijkheden zich inderdaad altijd voordoen.)



Figuur 8.2. Het lus-snede uitsluitingsbeginsel: indien tak  $k$  behoort tot een uniforme snede  $S$  dan behoort  $k$  niet tot een uniforme lus  $L$  (a), en andersom (b).

Van figuur 8.2 wordt tevens afgelezen dat als een tak zowel tot een snede als tot een lus behoort, er steeds een *andere* tak is die tot dezelfde verzameling behoort. (In het algemeen: als een lus en een snede takken gemeenschappelijk hebben, is dit steeds een *even* aantal [2], [3]). Hiermee wordt het lus-snede uitsluitingsbeginsel

(8.3) Indien tak  $k$  behoort tot een uniforme (niet-uniforme) lus en tevens tot een niet-uniforme (uniforme) snede, dan is er een andere tak  $l$  die tot dezelfde verzameling behoort.

**Oefening 8.1** Benoem in de gerichte graaf van figuur 8.1 de snede die wordt gevormd door de takken 1, 2, 4, 6. Dezelfde vraag voor de lus die wordt opgemaakt door dezelfde takken.

**Oefening 8.2** In de gerichte graaf van figuur 8.1 behoort tak 2 tot de uniforme snede  $S_1$ . Ga na dat er geen uniforme lus is aan te wijzen waartoe die tak eveneens behoort. Verifieer eveneens dat tak 4, behorend tot de uniforme lus  $L_1$ , tot geen enkele uniforme snede behoort.

Het lus-snede uitsluitingsbeginsel kan ook *meetkundig* worden voorgesteld. De verzamelingen van *alle lussen* en *alle sneden* worden daartoe respectievelijk afgebeeld als de deelruimten  $L$  en  $S$  in de ruimte die wordt opgespannen door de *takken* van de graaf. De elementen van  $L$  en  $S$  worden respectievelijk voorgesteld door de

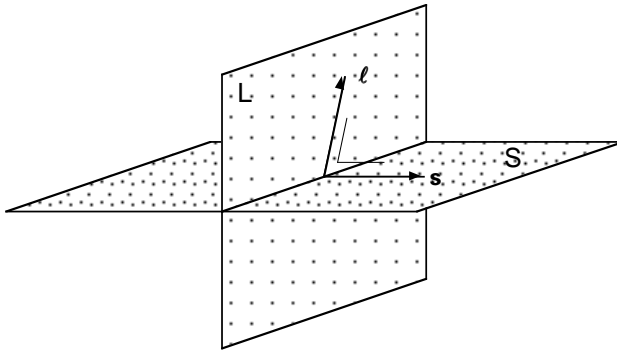
vectoren  $\mathbf{l}$  en  $\mathbf{s}$ . Een kant van  $\mathbf{l}/\mathbf{s}$  is 0 als een tak niet deel uitmaakt van  $\mathbf{l}/\mathbf{s}$ , en  $\pm 1$  indien dit wel het geval is. Twee kantnummers krijgen hetzelfde voorteken als de overeenkomstige takken dezelfde oriëntatie hebben. Met (8.3) volgt dat  $\mathbf{l}$  en  $\mathbf{s}$  bij *gelijke takordering* het volgende karakteristieke patroon vertonen

$$(8.4) \quad \begin{cases} \mathbf{l} = [\dots 1 \dots 0 \dots 1 \dots 1 \dots \pm 1 \dots \mp 1 \dots]^T \\ \mathbf{s} = [\dots 0 \dots 1 \dots \pm 1 \dots \mp 1 \dots 1 \dots 1 \dots]^T \end{cases}.$$

Men ziet direct

$$(8.5) \quad \mathbf{l} \perp \mathbf{s} \Rightarrow \mathbf{l}^T \mathbf{s} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{s}^T \mathbf{l} = 0,$$

waarmee het lus-snedesluitingsbeginsel is vertaald naar de *orthogonaliteit* van  $\mathbf{L}$  en  $\mathbf{S}$  (figuur 8.3).



Figuur 8.3. Meetkundige voorstelling van het lus-snedesluitingsbeginsel.

**Oefening 8.3** Noteer de lussen  $L_1$  en  $L_2$  van figuur 8.1 respectievelijk als de vectoren  $\mathbf{l}_1$  en  $\mathbf{l}_2$ , en de sneden  $S_1$  en  $S_2$  als  $\mathbf{s}_1$  en  $\mathbf{s}_2$ . Ga na dat  $\mathbf{l}_i \perp \mathbf{s}_j$  ( $i, j = 1, 2$ ).

### Opmerking 8.1

Aangetoond kan worden dat  $\dim \mathbf{L} = b - (n - 1)$  en  $\dim \mathbf{S} = (n - 1)$ . De *directe som* [4] van de orthogonale deelruimten  $\mathbf{L}$  en  $\mathbf{S}$  is juist de  $b$ -dimensionale takruimte ( $n$  en  $b$  zijn respectievelijk het aantal knopen en takken van de graaf).

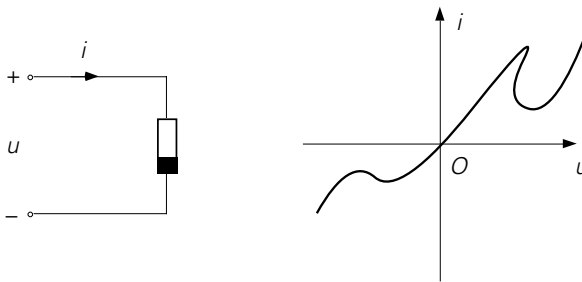
### Opmerking 8.2

Het lus-snedesluitingsbeginsel is een speciaal geval van het ruimer geformuleerde, zogenoemde *lemma van MINTY* [5], tevens bekend als het ‘*Colored branch theorem*’ [6]. Dit lus-snedesluitingsbeginsel heeft betrekking op *partieel gerichte grafen*, d.w.z. grafen die slechts voor een deel zijn gericht en voor het overige uit *ongerichte* takken bestaan.

Hieronder volgt een praktische toepassing van het lus-snede uitsluitingsbeginsel (zie voor deze en verdere toepassingen tevens [1], [6], [7], [8]).

### 8.1.1 Bovengrenzen voor spanningen en stromen

De hier gepresenteerde resultaten hebben betrekking op *niet-lineaire resistieve* circuits die naast bronnen exclusief zijn samengesteld uit zogeheten *strikt passieve* twee-klemmen weerstanden. Dit zijn weerstanden waarbij het opgenomen vermogen  $ui > 0$  voor  $u \neq 0$ ,  $i \neq 0$ . Uitgezonderd de oorsprong, ligt de  $u$ - $i$ -karakteristiek van een strikt passieve weerstand steeds in het *open* eerste en derde kwadrant van het  $u$ - $i$ -vlak (zie figuur 8.4).



Figuur 8.4. Een strikt passieve weerstand. Er geldt  $ui > 0$  voor  $u \neq 0$ ,  $i \neq 0$ .

**Oefening 8.4** Ga na dat de exponentiële diode en de tunneldiode strikt passieve weerstanden zijn. Is het open klemmenpaar strikt passief? En de kortsluiting? De ideale diode? Een lineaire weerstand van  $1 \Omega$ ? Een affiene weerstand?

De weerstandspanningen en -stromen die bij een oplossing van het niet-lineaire netwerkprobleem behoren, zijn onderworpen aan de volgende bovengrenzen.

*Bovengrenzen voor spanningen en stromen (strikt passieve twee-klemmen weerstanden en bronnen)*

Voor de  $k$ -de weerstand geldt

$$(8.6) \quad \begin{aligned} 1. & \quad |u_k| \leq \sum_{\text{bronnen}} |u_m| \\ 2. & \quad |i_k| \leq \sum_{\text{bronnen}} |i_m| \end{aligned}$$

Hierin wordt gesommeerd over *alle* aanwezige spannings- en stroombronnen.

#### Bewijs

We kunnen ons beperken tot de weerstandspanningen; de bovengrens van de weer-

standstromen volgt middels duale bewijsvoering.

Anders dan voorheen — alwaar steeds de standaard tekenconventie werd gehanteerd — worden de takken nu gericht overeenkomstig de richting van de *werkelijk* optredende stromen die bij een oplossing behoren. Daarmee is bereikt dat

$$(8.7) \quad i_m \geq 0 \quad (\text{alle takken}),$$

en wegens de passiviteit van de weerstanden volgt voor de weerstandstakken

$$(8.8) \quad u_k \geq 0 \quad (\text{weerstandstakken}).$$

Neem nu de  $k$ -de weerstandstak in het vizier. Volgens het *lus-snede uitsluitingsbeginsel* is  $k \in \text{uniforme snede } S$  òf  $k \in \text{uniforme lus } L$ . Stel eerst  $k \in S$ , en pas de KCL toe op  $S$ . Daar  $S$  uniform is, volgt (alle  $i$ 's van  $S$  hebben hetzelfde voor-teken)

$$(8.9) \quad \sum_S i_m = 0 \quad (\text{snede KCL}).$$

Met (8.7) is maar één conclusie mogelijk, namelijk  $i_m = 0$  voor alle  $m \in S$ , en in het bijzonder  $i_k = 0$ . Verder brengt de *strikte* passiviteit met zich mee dat tevens  $u_k = 0$ , waarmee de eerste regel van (8.6) voor het onderhavige geval is bewezen.

Stel vervolgens  $k \in L$ . Na opsplitsen van de takken van  $L$  in weerstandstakken en brontakken, levert de lus KVL (nu hebben alle  $u$ 's van  $L$  hetzelfde voorteken;  $L$  is immers uniform)

$$(8.10) \quad \sum_{L, \text{weerstanden}} u_m = -\sum_{L, \text{bronnen}} u_m \quad (\text{lus KVL}).$$

Anderzijds is volgens (8.8)

$$(8.11) \quad 0 \leq u_k \leq \sum_{L, \text{weerstanden}} u_m = |\sum_{L, \text{weerstanden}} u_m|,$$

zodat combineren met de lus KVL (8.10) geeft

$$(8.12) \quad 0 \leq u_k \leq |-\sum_{L, \text{bronnen}} u_m| \leq \sum_{L, \text{bronnen}} |u_m|.$$

Daar bovendien

$$(8.13) \quad \sum_{L, \text{bronnen}} |u_m| \leq \sum_{\text{alle bronnen}} |u_m|,$$

wordt met (8.12) voor willekeurige referentierichtingen gevonden

$$(8.14) \quad |u_k| \leq \sum_{\text{bronnen}} |u_m|. \quad \square$$

**Oefening 8.5** Op welke plaats faalt het bewijs indien de samenstellende weerstanden niet strikt, maar gewoon passief zijn?

**Oefening 8.6** Zijn *bestuurde* bronnen toegelaten?

**Oefening 8.7** Een niet-lineaire weerstand heeft de  $u$ - $i$ -relatie  $i = 2u$  voor  $u \geq 0$  en  $i = 0$  voor  $u \leq 0$ . Is de weerstand strikt passief? Passief? Nu worden twee van zulke weerstanden in serie verbonden. Ga na dat de spanning over de weerstandscombinatie een willekeurige waarde kan aannemen.

De uitdrukkingen (8.6) hebben de praktische beperking dat de bovengrenzen voor een gegeven circuit er niet à priori mee kunnen worden berekend. Daarvoor zouden naast de bronsterkten, tevens de spanningen over de stroombronnen en de stromen door de spanningsbronnen bekend moeten zijn. Er wordt immers gesommeerd over *alle* bronnen. Indien evenwel nadere eisen aan de  $u$ - $i$ -karakteristieken van de strikt passieve niet-lineaire weerstanden worden gesteld, blijken de bovengrenzen wèl expliciet te kunnen worden gemaakt [7].

Neem nu aan dat een niet-lineair circuit, bestaande uit strikt passieve weerstanden, is aangesloten op gelijkspanningsbronnen (*batterijen*) met sterkten  $E_1, E_2, \dots$  (alle  $E_i \geq 0$ ). Volgens (8.6) voldoen de takspanningen van het circuit aan

$$(8.15) \quad |u_k| \leq \sum E_m.$$

Met de *extra* aanname dat alle batterijen zijn verbonden met het datum (*geaarde batterijen*), blijkt bovendien dat de knopen met de *hoogste* en de *laagste potentiaal* juist de *batterijklemmen* zijn. Dus, elke potentiaal voldoet aan onderstaand theorema (zie tevens [7], [9]).

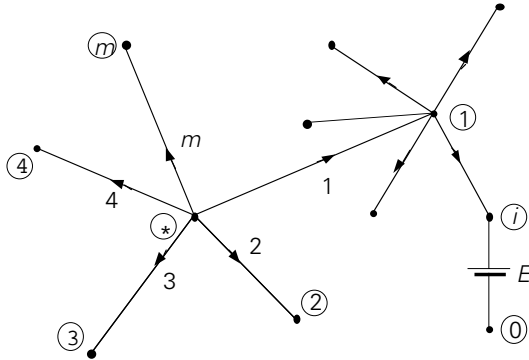
*Minimax theorema voor potentialen (strikt passieve weerstanden en geaarde batterijen)*

$$(8.16) \quad \min(\pm E_1, \pm E_2, \dots, 0) \leq v_i \leq \max(\pm E_1, \pm E_2, \dots, 0)$$

Hierin zijn  $E_1, E_2, \dots$  de batterijspanningen, terwijl het plus/min-teken betrekking heeft op een geaarde min/plus-klem.

### Bewijs

Het bewijs wordt geleverd vanuit het *ongerijmde*. Beschouw daartoe de deelgraaf van figuur 8.5, en neem aan dat de potentiaal van knoop  $\textcircled{*}$  hoger is dan de grootste batterijspanning, dus  $v_* > \max(\pm E_1, \pm E_2, \dots, 0)$ . Zie nu in dat deze aanname impliceert dat aan  $\textcircled{*}$  geen (plus of min) batterijklem verbonden kan zijn. Immers, dan zou  $v_* = \pm E_i$  moeten zijn (de andere batterijklem is geaard), hetgeen in onmiddellijke tegenspraak is met de aanname. Dus, de takken die met  $\textcircled{*}$  zijn verbonden, staan alle voor strikt passieve weerstanden (de takken 1, 2, ...,  $m$  in figuur 8.5).



Figuur 8.5. De aanname dat knoop  $\textcircled{*}$  de hoogste potentiaal heeft, voert tot tegenspraak.

Richt de met  $\textcircled{*}$  verbonden takken nu alle van  $\textcircled{*}$  af (figuur 8.5). Daar er wordt verondersteld dat  $\textcircled{*}$  de hoogste potentiaal heeft, is hiermee bereikt dat  $u_k \geq 0$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). En, wegens de passiviteit van de weerstanden is tevens  $i_k \geq 0$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). Dus, de KCL van knoop  $\textcircled{*}$  kan alléén worden bevredigd indien alle  $i_k = 0$ . Vervolgens gebiedt de strikte passiviteit van de weerstanden dat ook alle  $u_k = 0$ , en dus  $v_1 = v_2 = \dots = v_m = v_* > \max(\pm E_1, \pm E_2, \dots, 0)$ .

Neem vervolgens knoop  $\textcircled{1}$  als uitgangspunt, en herhaal de redenering. Uiteindelijk wordt er een knoop  $\textcircled{i}$  bereikt waaraan de klem van een batterij is verbonden, zodat  $v_i = \pm E_i$ . Dit nu, is in tegenspraak met de aanname, waarmee wordt geconcludeerd dat  $v_* \leq \max(\pm E_1, \pm E_2, \dots, 0)$ .

Het bewijs van de ondergrens verloopt analoog; nu voert de aanname  $v_* < \min(\pm E_1, \pm E_2, \dots, 0)$  tot tegenspraak.  $\square$

In menige toepassing is het niet-lineaire resistieve circuit aangesloten op precies één voedingsbatterij waarvan de min-klem is geaard (het datum is). Met gebruik van (8.16) wordt dan onmiddellijk ingezien, dat geen enkele potentiaal de batterijspanning kan overschrijden (zie tevens [1], [7], [10]). Hieronder staat de samenvatting.

*Maximale potentiaal eigenschap (strikt passieve weerstanden en voedingsbatterij met geaarde min-klem)*

$$(8.17) \quad 0 \leq v_i \leq E$$

Hierin is  $E$  de batterijspanning.

**Oefening 8.8** Laat zien dat de bovengrens van de *takspanningen* (8.15) m.b.t. de zojuist beschouwde klasse van circuits, volgt uit de maximale potentiaal eigenschap (8.17), maar niet andersom.

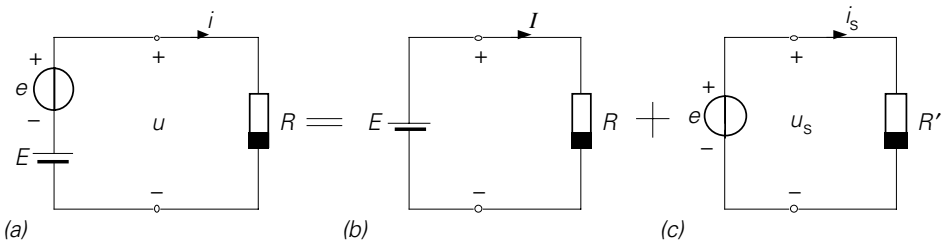
De maximale potentiaal eigenschap (8.17) blijkt eveneens van toepassing op niet-lineaire resistieve circuits die ook *transistoren* bevatten [7]. Daarmee geeft (8.17) de formele onderbouwing van het ervaringsfeit dat de potentialen die bij een *instelpunt* van een transistor circuit behoren, nooit de spanning van de voedingsbatterij overschrijden.

Voor het overige kunnen de grenswaarden van nut zijn bij een gefundeerde keuze van de *startvector* m.b.t. het equivalente NEWTON-RAPHSON-circuit van niet-lineaire resistieve circuits (Hoofdstuk 7).

### 8.1.2 Signaalversterking

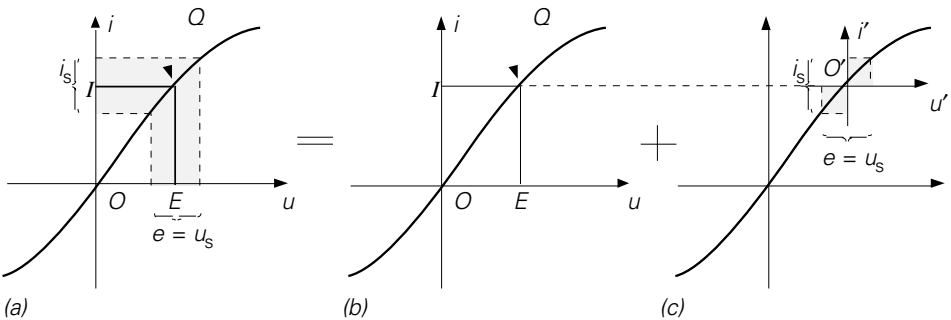
In deze paragraaf worden elektrische circuits, bestaande uit twee-klemmen weerstanden en bronnen, onderzocht op de mogelijkheid van *signaalversterking*.

Beschouw ter inleiding een enkele niet-lineaire weerstand  $R$  die is aangesloten op de spanning  $u = u(t)$ . Laat  $u$  bestaan uit een constante bijdrage  $E$  (de *instelspanning*) en een (niet noodzakelijk klein!) tijdafhankelijk deel  $e = e(t)$  (de *signaalbijdrage*), dus  $u = E + e$  (zie figuur 8.6(a)).



Figuur 8.6. Superpositie beginsel voor signaalgedrag.

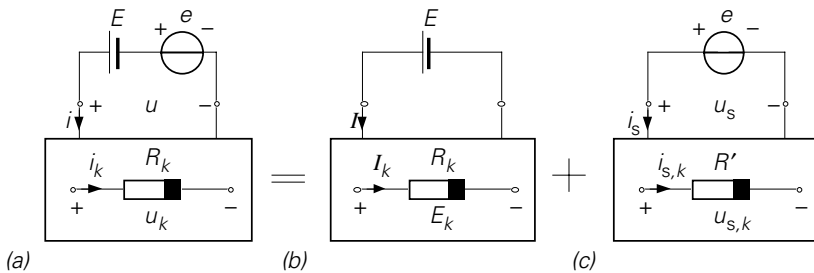
Het is duidelijk dat de stroom  $i = i(t)$  door  $R$  eveneens bestaat uit een constante instelstroom  $I$  en een signaalbijdrage  $i_s = i_s(t)$ , dus  $i = I + i_s$ . Figuur 8.7(a) geeft een grafische illustratie; het punt  $Q = (E, I)$  op de  $u$ - $i$ -karakteristiek is het *instelpunt* van  $R$ .



Figuur 8.7. Grafische illustratie van het superpositie beginsel voor signaalgedrag (figuur 8.6).

De afgebeelde uitsplitsing in constante en signaalbijdragen voert onmiddellijk tot het *superpositiebeginsel voor signaalgedrag* van figuur 8.6. Daarin wordt de  $u$ - $i$ -karakteristiek van de niet-lineaire weerstand  $R'$  (figuur 8.6(c)) verkregen uit die van  $R$ , door het *instelpunt*  $Q$  van de laatste als *oorsprong* van het  $u$ - $i$ -vlak te nemen (vergelijk figuur 8.7(c)). (Indien een lokale linearisering rondom  $Q$  van toepassing is, volgt het superpositie beginsel voor *klein*-signaal gedrag van par. 4.2.5.)

Beschouw nu een elektrisch circuit, bestaande uit niet-lineaire twee-klemmen weerstanden, dat is aangesloten op de spanning  $u(t) = E + e(t)$  (figuur 8.8(a)). Bijgevolg staat er over elke samenstellende weerstand  $R_k$  een spanning  $u_k = E_k + u_{s,k}$  en vloeit er een stroom  $i_k = I_k + i_{s,k}$  doorheen. Hierin zijn  $u_{s,k} = u_{s,k}(t)$  en  $i_{s,k}(t) = i_{s,k}(t)$  de signaalbijdragen. Het instelpunt  $Q_k$  op de  $u$ - $i$ -karakteristiek van  $R_k$  wordt gegeven door  $Q_k = (E_k, I_k)$ .



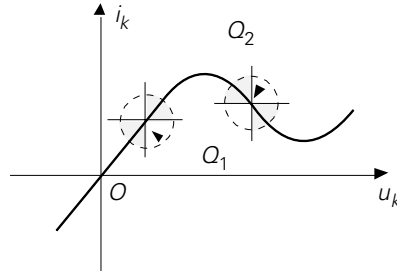
Figuur 8.8. Het oorspronkelijke niet-lineaire circuit (a) valt uiteen in een instel-circuit (b) en een signaal-circuit (c).

Indien de tijdafhankelijke spanningen  $e = e(t)$  en  $u_{s,k} = u_{s,k}(t)$  respectievelijk als *in-* en *uitgangssignaal* fungeren, dan luidt het *criterium voor signaalversterking* (zie Oefening 8.11 voor *vermogensversterking*)

$$(8.18) \quad |u_{s,k}| > |e|.$$

Ter beantwoording van de vraag of de beschouwde klasse circuits aan dit criterium kan voldoen, wordt eerst het superpositie beginsel voor signaalgedrag toegepast. Het circuit wordt ermee opgesplitst in twee aparte circuits (figuur 8.8): een *instel-circuit* ter berekening van het instelpunt, en een (niet-lineair!) *signaal-circuit* waarmee het criterium (8.18) kan worden getoetst. Merk op dat elke niet-lineaire weerstand  $R_k$  in het signaal-circuit is vervangen door een exemplaar  $R'_k$  die het instelpunt van  $R_k$  als oorsprong van het  $u$ - $i$ -vlak heeft.

Figuur 8.9 toont twee mogelijke instelpunten  $Q_1$  en  $Q_2$  van een niet-lineaire weerstand  $R_k$ .



Figuur 8.9. De niet-lineaire weerstand  $R_k$  is in  $Q_1$  en  $Q_2$  respectievelijk lokaal strikt passief of lokaal actief.

Zie nu in dat de uit  $R_k$  verkregen andere niet-lineaire weerstand  $R_k'$  zich binnen de gestippelde omgevingen respectievelijk gedraagt als een *strikt passieve* of als een *actieve* niet-lineaire weerstand (de  $u$ - $i$ -karakteristiek van  $R_k'$  ligt in de daarvoor vereiste kwadranten: de gemarkeerde gebieden binnen de gestippelde omgevingen). In het eerste geval heet  $R_k$  *lokaal strikt passief* en in het andere geval *lokaal actief*. De eerder genoemde negatieve-resistance componenten (zoals de tunneldiode) zijn alle lokaal actieve niet-lineaire weerstanden (Hoofdstuk 4).

Neem nu aan dat de niet-lineaire weerstanden  $R_k$  in het instelpunt steeds lokaal strikt passief zijn. Daarmee zijn de niet-lineaire weerstanden  $R_k'$  vanzelf strikt passief. Met toepassing van (8.6) op het *signaal-circuit* volgt dan

$$(8.19) \quad |u_{s,k}| \leq |e|.$$

Daar dit resultaat in tegenspraak is met het criterium (8.18), wordt geconcludeerd dat de configuratie van figuur 8.8(a) pas dan als een *signaalversterker* kan fungeren, als óók *lokaal actieve* weerstanden zijn toegelaten! (Vergelijk Vraagstuk 6.47 van Hoofdstuk 6.) Duidelijk is ook dat die weerstanden *niet-lineair* moeten zijn; lineaire actieve weerstanden zijn in de natuur niet voorhanden.

Zoals strikt passieve weerstanden bovengrenzen stellen aan de totaal-spanningen, zo stellen *lokaal strikt passieve* weerstanden grenzen aan *spanningsvariaties*. Als juist die variaties moeten worden versterkt, zijn ook lokaal actieve weerstanden nodig (zie tevens [1], [7], [10]).

**Oefening 8.9** Aan welke restrictie is het dynamisch bereik van de signalen gebonden? Laat zien dat die restrictie niets van doen heeft met een lokale linearisatie van  $u$ - $i$ -karakteristieken. (Antwoord: tekenvaste helling is de enige voorwaarde.) Onder welke voorwaarde is de *niet-lineaire vervorming* absent? (Antwoord: constante helling.)

**Oefening 8.10** Laat zien dat het resultaat (8.19) eveneens wordt verkregen met de maximale potentiaal eigenschap (8.17).

**Oefening 8.11** Bewijs dat als de samenstellende niet-lineaire weerstanden alle lokaal strikt passief zijn, er géén *vermogensversterking* kan optreden. (Het criterium daarvoor is  $|u_{s,k} i_{s,k}| > |e i_s|$ ; zie figuur 8.8). Onder welke voorwaarde kan dat wèl?

## 8.2 THEOREMA VAN TELLEGEN

Beschouw een *willekeurig* elektrisch circuit met gerichte KIRCHHOFF-graaf  $\mathbf{G}$  ( $n$  knopen en  $b$  takken). Laat  $\mathbf{u}' = [u_1' u_2' \dots u_b']^T$  een willekeurige takspanningsvector zijn en  $\mathbf{i}'' = [i_1'' i_2'' \dots i_b'']^T$  een willekeurige takstroomvector, met als *enige eis* dat de  $u$ 's aan de KVL's en de  $i$ 's aan de KCL's van  $\mathbf{G}$  voldoen.

Bij gebruik van de *standaard tekenconventie* (Hoofdstuk 3, par. 3.6), zegt het *theorema van TELLEGEN* dat  $\mathbf{u}'$  en  $\mathbf{i}''$  *orthogonale vectoren* zijn! Of, ook: het inwendig product van  $\mathbf{u}'$  en  $\mathbf{i}''$  is gelijk aan nul. In een formule overzicht

$$(8.20) \quad \mathbf{u}' \perp \mathbf{i}'' \Rightarrow \mathbf{u}'^T \mathbf{i}'' = 0 \Leftrightarrow \mathbf{i}''^T \mathbf{u}' = 0 \quad (\text{theorema van TELLEGEN}).$$

Hierin benadrukken de verschillende accenten dat de  $u$ 's en de  $i$ 's *niet* noodzakelijk betrekking hoeven te hebben op dezelfde stroom-spanningsverdeling in het circuit (zie verderop).

Na uitschrijven van het inwendig product in componenten, leest het theorema van TELLEGEN als volgt ([11], [12]).

*Theorema van TELLEGEN*

Voor elk *willekeurig elektrisch circuit* geldt

$$(8.21) \quad \sum_{\text{alle takken}} u_k' i_k'' = 0.$$

Hierin zijn de referentie richtingen van de  $u$ 's en  $i$ 's gekozen volgens de *standaard tekenconventie*.

Hieronder staat een bewijs (zie [13], [14], [15] en [16] voor alternatieve bewijzen).

### Bewijs

Laat  $\mathbf{u}' \in \mathbb{R}^b$  en  $\mathbf{i}'' \in \mathbb{R}^b$  respectievelijk een willekeurige takspannings- en takstroomvector zijn m.b.t. *dezelfde gerichte graaf*  $\mathbf{G}$  waarbij de standaard tekenconventie geldt. Indien  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times b}$  de gereduceerde knooppunt-tak incidentiematrix van  $\mathbf{G}$  is, kunnen we noteren

$$(8.22) \quad \mathbf{A} \mathbf{i}'' = \mathbf{0} \quad (\text{knooppunt KCL's})$$

en

$$(8.23) \quad \mathbf{u}' = \mathbf{A}^T \mathbf{v}' \quad (\text{elementaire KVL's}),$$

waarin  $\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^{(n-1)}$  een potentiaalvector van  $\mathbf{G}$  is.

Bezie de betrekkingen (8.22) en (8.23) nu louter in het licht van de lineaire algebra. Enerzijds observeren we dan dat de vector  $\mathbf{i}''$  blijkens (8.22) tot de *nul-ruimte* (de *kern*) van  $\mathbf{A}$  behoort, genoteerd als

$$(8.24) \quad \mathbf{i}'' \in \mathbf{N}(\mathbf{A}).$$

Anderzijds leert (8.23) dat  $\mathbf{u}'$  is te schrijven als een lineaire combinatie van de kolommen van  $\mathbf{A}^T$ , en dus van de rijen van  $\mathbf{A}$  (met de kentallen van  $\mathbf{v}'$  als gewichtsfactoren). M.a.w., de vector  $\mathbf{u}'$  behoort tot de *rij-ruimte* van  $\mathbf{A}$  (dit is het *bereik* van  $\mathbf{A}^T$ ), genoteerd als

$$(8.25) \quad \mathbf{u}' \in \mathbf{R}(\mathbf{A}^T).$$

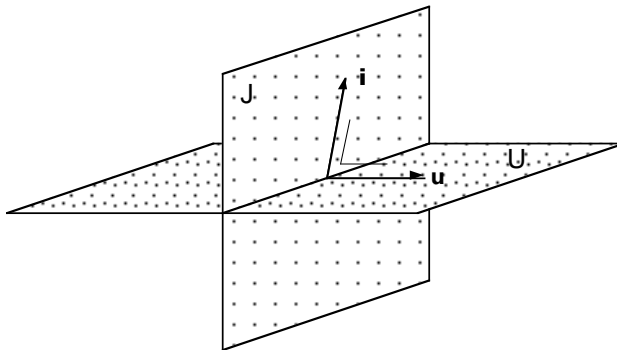
Daar de rij-ruimte en de nul-ruimte van een matrix  $\mathbf{A}$  volgens een fundamenteel resultaat van de lineaire algebra *orthogonale ruimten* zijn [4], dus

$$(8.26) \quad \mathbf{N}(\mathbf{A}) \perp \mathbf{R}(\mathbf{A}^T),$$

wordt met (8.24) en (8.25) onmiddellijk geconcludeerd dat

$$(8.30) \quad \mathbf{u}' \perp \mathbf{i}''.$$

Figuur 8.10 geeft een *meetkundige* voorstelling van het theorema van TELLEGEN. Daarin zijn alle takstroomvectoren  $\mathbf{i}$  die voldoen aan de KCL, en alle takspanningsvectoren  $\mathbf{u}$  die voldoen aan de KVL, respectievelijk afgebeeld als de deelruimten  $\mathbf{J}$  en  $\mathbf{U}$  in de ruimte die wordt opgespannen door de  $b$  takken van de graaf  $\mathbf{G}$ . Daar TELLEGEN's theorema zegt dat  $\mathbf{i} \perp \mathbf{u}$ , volgt vanzelf dat  $\mathbf{J}$  en  $\mathbf{U}$  *orthogonale* deelruimten zijn.



Figuur 8.10. Meetkundige voorstelling van het theorema van TELLEGEN.

**Opmerking 8.3**

Met Appendix 3.B van Hoofdstuk 3 wordt moeiteloos gevonden dat  $\dim \mathbf{U} = (n - 1)$  en  $\dim \mathbf{J} = b - (n - 1)$  ( $n$  en  $b$  zijn respectievelijk het aantal knopen en takken van  $G$ ). De *directe som* van  $\mathbf{U}$  en  $\mathbf{J}$  is juist gelijk aan  $\mathbb{R}^b$  (vergelijk Opmerking 8.1 van paragraaf 8.1).

**Opmerking 8.4**

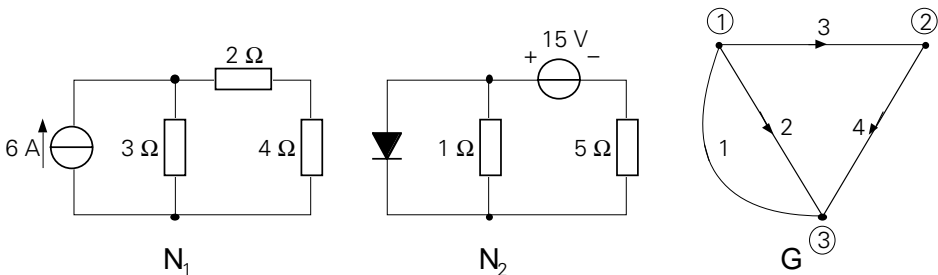
Het theorema van TELLEGEN is nauw verwand met het lus-snede uitsluitingsbeginsel van paragraaf 8.1. Samen met de lus KVL's en de snede KCL's kan het er zelfs rechtstreeks van worden afgeleid. (Zie vraagstuk 8.6 en zie tevens [18].)

**Opmerking 8.5**

Het is eenvoudig te bewijzen dat TELLEGEN's theorema samen met de KCL, juist de KVL oplevert! Ook: de aanname van TELLEGEN's theorema en de KVL blijkt de KCL te impliceren! ([13], [14]; zie tevens Vraagstuk 8.8.) Hiermee zijn de KIRCHHOFF-postulaten niet slechts *voldoende*, maar tevens *noodzakelijke* voorwaarden voor het gelden van het theorema van TELLEGEN!

Merk nu op dat het bewijs van het theorema van TELLEGEN in het geheel *géén gebruik maakt van de  $u$ - $i$ -relaties!* Daarom geldt het theorema van TELLEGEN voor elk *willekeurig elektrisch circuit*, ongeacht de aard van de samenstellende netwerkelementen! *Niet-lineaire, tijd-variante* (meer-klemmen) elementen zijn alle toegelaten. Bovendien kunnen de accenten in (8.21) betrekking hebben op twee geheel *verschillende stroom-spanningsverdelingen* in het circuit. De  $u$ 's kunnen bijvoorbeeld verwijzen naar het tijdstip  $t_1$  en de  $i$ 's naar een *ander* tijdstip  $t_2$  (steeds geldt  $u = u(t)$  en  $i = i(t)$ ). Blijkbaar is het zelfs toegestaan dat de  $u$ 's betrekking hebben op het ene circuit  $N_1$  en de  $i$ 's op een geheel *verschillend* circuit  $N_2$ , met als enige eis: gerichte graaf  $N_1 =$  gerichte graaf  $N_2$ !

Voor de sceptische lezer geven we van de laatste observatie een voorbeeld. Daartoe zijn in figuur 8.11 twee verschillende elektrische circuits  $N_1$  en  $N_2$  weergegeven met de gerichte graaf  $G$  als *enig* relevant gemeenschappelijk kenmerk.



Figuur 8.11. De verschillende elektrische circuits  $N_1$  en  $N_2$  hebben alléén de gerichte graaf  $G$  gemeenschappelijk.

De oplossing van beide netwerkproblemen is eenvoudig te verkrijgen. Het resultaat staat in tabel 8.1; het enkele en dubbele accent verwijst respectievelijk naar  $N_1$  en  $N_2$ .

Tabel 8.1. Oplossingen van de netwerkproblemen van figuur 8.10.

tak	$u'$ [V]	$i'$ [A]	$u''$ [V]	$i''$ [A]
1	12	-6	0	3
2	12	4	0	0
3	4	2	15	-3
4	8	2	-15	-3

Het theorema van TELLEGEN is nu snel geverifieerd, immers

$$(8.28) \quad \sum_{k=1}^4 u_k' i_k'' = 12 \times 3 + 12 \times 0 + 4 \times (-3) + 8 \times (-3) = 0.$$

**Oefening 8.12** Verifieer dat tevens  $\sum u' i' = 0$ ,  $\sum u'' i' = 0$  en  $\sum u'' i'' = 0$ .

**Oefening 8.13** Draai de diode in  $N_2$  om, en verifieer het theorema van TELLEGEN opnieuw.

Daar het theorema van TELLEGEN uitsluitend en alleen berust op de KIRCHHOFF-postulaten, raakt het de fundamentele van de netwerktheorie. De *algemene geldigheid*, gevoegd bij de *eenvoud*, maakt het theorema van TELLEGEN misschien wel tot de meest opmerkelijke stelling in de theorie van elektrische circuits. Hieronder volgen enkele toepassingen.

## 8.2.1 Behoud van vermogen

Laat de spanningen en stromen betrekking hebben op dezelfde spannings-stroomverdeling van een *willekeurig* elektrisch circuit. Het theorema van TELLEGEN (8.21) leest dan als

$$(8.29) \quad \sum_k u_k(t) i_k(t) = 0 \quad \forall t,$$

waarin de sommatie zich uitstrekt over *alle* elementen (takken) van het circuit.

Merk nu op dat elke term in (8.29) juist de naar het  $k$ -de element toe gerichte *vermogensstroom* voorstelt:  $u_k i_k = p_k$  (let op: bij de hier gebruikte standaard tekenconventie is de referentie richting van de vermogensstroom steeds *naar het element toe* gericht; zie figuur 3.16 van Hoofdstuk 3). De conclusie is

$$(8.30) \quad \sum_k p_k(t) = 0 \quad \forall t.$$

Men dient zich nu te herinneren dat als op zeker moment voor het  $k$ -de element  $p_k > 0$ , dit vermogen door dat element wordt *opgenomen*. Als daarentegen  $p_k < 0$  dan *levert* het element een vermogen  $-p_k$  (Hoofdstuk 3, par. 3.4). Hiermee laat (8.30) zich lezen als

(8.31) Op elk moment is het door één of meerdere elementen *geleverde* vermogen *gelijk* aan het door de overige elementen *opgenomen* vermogen.

Dit is de *wet van behoud van vermogen*, die kennelijk geldt voor elk *willekeurig elektrisch circuit*. De wet is het onmiddellijke gevolg van de KIRCHHOFF-postulaten, en hoeft derhalve niet als een apart beginsel te worden ingevoerd. Hieronder staat de samenvatting in formulevorm.

<p style="text-align: center;"><i>Wet van behoud van vermogen</i></p> <p style="text-align: center;">Voor elk <i>willekeurig elektrisch circuit</i> geldt</p> <p style="text-align: center;">(8.32) <math>\sum_{\text{alle elementen}} p_k(t) = 0 \Leftrightarrow</math></p> <p style="text-align: center;"><math>p_{\text{geleverd}} = p_{\text{opgenomen}} \quad \forall t</math></p>
---

**Oefening 8.14** Integreer de wet van behoud van vermogen naar de tijd, en vind dat de *wet van behoud van energie* geldt voor elk willekeurig elektrisch circuit (vergelijk Vraagstuk 3.40, Hoofdstuk 3).

### Opmerking 8.6

De wet van behoud van vermogen (energie) is in overeenstemming met het quasi-stationaire uitgangspunt van de netwerktheorie: de elektromagnetische stralings-energie die uit het circuit ontsnapt, is te verwaarlozen klein (Hoofdstuk 1).

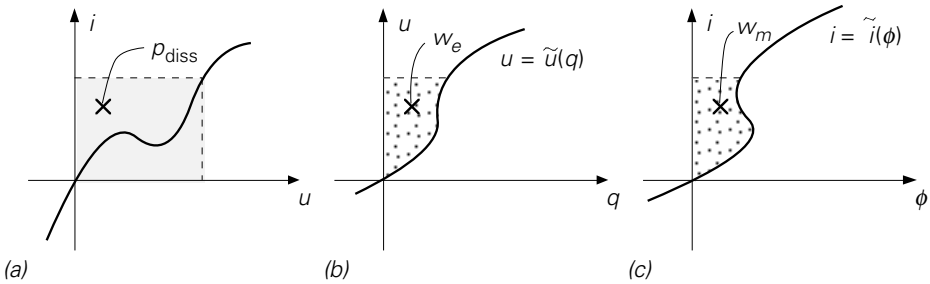
## 8.2.2 Vermogensbalans

Voor een *willekeurig* elektrisch circuit dat is samengesteld uit bronnen, weerstanden ( $R$ 's) capaciteiten ( $C$ 's) en inductiviteiten ( $L$ 's), kan (8.30) steeds worden uitgesplitst als

(8.33)  $p_{\text{bronnen}} = p_{R's} + p_{C's} + p_{L's}$ .

Hierin is  $p_{\text{bronnen}}$  het door de gezamenlijke bronnen op zeker tijdstip *geleverde* vermogen, terwijl de overige termen de vermogensstromen zijn die op datzelfde tijdstip naar de verschillende typen elementen *toe* stromen.

Veronderstel nu dat de  $R$ 's,  $C$ 's en  $L$ 's alle *tijd-invariant* zijn met de *niet-lineaire* karakteristieken van figuur 8.12; zij staan respectievelijk voor *passieve weerstanden*, *ladingsbestuurde capaciteiten* en *fluxbestuurde inductiviteiten*.



Figuur 8.12. Toegelaten niet-lineaire karakteristieken.

Het in de weerstanden stromende vermogen kan dan met de eerder verkregen resultaten van Hoofdstuk 4 (par. 4.7) worden geïnterpreteerd als *gedissipeerd vermogen* (d.i. irreversibel vermogen), terwijl de overige vermogensstromen kunnen worden geschreven in termen van *reversibele* (terug te winnen) *elektromagnetische veldenergie*. Deze *fysische interpretatie* van de wet van behoud van vermogen staat bekend als de hieronder uitgeschreven *vermogensbalans* (vergelijk figuur 8.12).

#### Vermogensbalans

Voor *niet-lineaire, dynamische* circuits, samengesteld uit bronnen, tijd-invariante passieve weerstanden, ladingsbestuurde capaciteiten en fluxbestuurde inductiviteiten, geldt

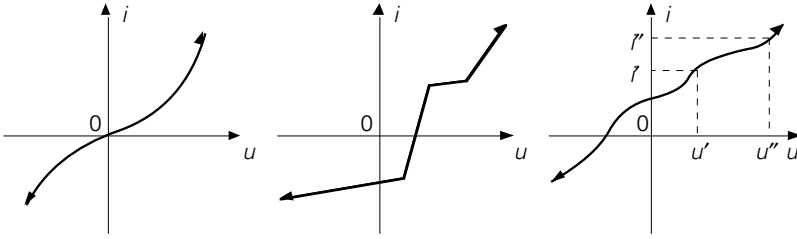
$$(8.34) \quad p_{\text{bronnen}} = p_{\text{diss}} + \frac{d}{dt}(w_e + w_m).$$

Hierin is  $p_{\text{bronnen}}$  het door de bronnen *geleverde* vermogen,  $p_{\text{diss}}$  het door de weerstanden *gedissipeerde* vermogen en  $w_e/w_m$  de in de capaciteiten/inductiviteiten *opgeslagen* elektrische/magnetische veld-energie.

In woorden: *het door de bronnen geleverde vermogen is op elk tijdstip gelijk aan het in de weerstanden gedissipeerde vermogen, plus het tempo waarin de gezamenlijk opgeslagen elektromagnetische veldenergie in de capaciteiten en inductiviteiten verandert.*

### 8.2.3 Een eenduidigheidsbewijs

In figuur 8.13 staan enkele *strikt monotoon stijgende*  $u$ - $i$ -karakteristieken: voor twee waarden  $u'$  en  $u''$  van  $u$  geldt steeds  $i'' - i' > 0$  als  $u'' - u' > 0$ .



Figuur 8.13. Strikt monotoon stijgende  $u$ - $i$ -karakteristieken.

De volgende stelling wordt bewezen.

(8.35) Elektrische circuits, samengesteld uit *niet-lineaire* twee-klemmen weerstanden met een *strikt monotoon stijgende*  $u$ - $i$ -karakteristiek en *onafhankelijk* bronnen hebben hoogstens één oplossing.

### Bewijs

Het bewijs wordt geleverd vanuit het *ongerijmde*. (Dit bewijs vindt men ook in [1].) Neem aan dat er twee *verschillende* oplossingen  $\{u', i'\}$  en  $\{u'', i''\}$  zijn. Daar die oplossingen elk afzonderlijk aan de KIRCHHOFF-wetten voldoen, geldt dat eveneens voor de verschillen. Daarmee wordt het theorema van TELLEGEN (zie tevens Oefening 8.18)

$$(8.36) \quad \sum_k (u_k'' - u_k') (i_k'' - i_k') = 0,$$

waarin wordt gesommeerd over alle takken. Uitsplitsen in weerstandstakken en brontakken levert vervolgens

$$(8.37) \quad \sum_{\text{weerstanden}} (u_k'' - u_k') (i_k'' - i_k') + \sum_{\text{bronnen}} (u_k'' - u_k') (i_k'' - i_k') = 0.$$

Zie nu in dat de sommatie over de bronnen steeds nul oplevert. Immers  $u_k'' = u_k' = e_k$  (spanningsbron) of  $i_k'' = i_k' = j_k$  (stroombron). Er volgt

$$(8.38) \quad \sum_{\text{weerstanden}} (u_k'' - u_k') (i_k'' - i_k') = 0.$$

Maar, de weerstanden hebben een strikt monotoon stijgende  $u$ - $i$ -karakteristiek, zodat anderzijds

$$(8.39) \quad (u_k'' - u_k') (i_k'' - i_k') > 0 \quad (k\text{-de weerstand}).$$

Dit nu, is in onmiddellijke tegenspraak met (8.38). We concluderen: er is *hoogstens* één oplossing.  $\square$

### Opmerking 8.7

Indien de weerstanden *geen verzadiging* vertonen, terwijl lussen van spanningsbronnen en sneden van stroombronnen ontbreken, is er *precies* één oplossing; zie

Appendix 7.D van Hoofdstuk 7.

**Oefening 8.15** Is elke niet-lineaire weerstand met een strikt monotoon stijgende  $u$ - $i$ -karakteristiek passief? Lokaal strikt passief?

**Oefening 8.16** Laat zien dat de  $u$ - $i$ -relatie  $i = \tilde{i}(u) \equiv u^3$  een strikt monotoon stijgende functie is. Merk daarbij op dat de helling in de oorsprong van het  $u$ - $i$ -vlak gelijk is aan nul (niet positief is).

**Oefening 8.17** Waarop strandt het bewijs indien tevens *bestuurde* bronnen worden toegelaten?

**Oefening 8.18** Werk de haakjes in (8.36) weg, en ga na dat elke afzonderlijke term voldoet aan het theorema van TELLEGEN.

Hieronder volgt een beknopte introductie van nog twee andere, ruim bekende toepassingen van het theorema van TELLEGEN (zie [17] voor meer).

## 8.2.4 Reciprociteit

Aangetoond wordt dat *lineaire* resistieve circuits *zonder* bestuurde bronnen een *reciprook* (wederkerig) gedrag vertonen. Ruwweg betekent dit dat de ‘invloed’ van de éne op de andere tak omkeerbaar is. Preciezer: indien een lineair weerstandsnetwerk wordt aangesloten op een spanningsbron, terwijl in een andere tak een ampèremeter (A-meter) wordt geplaatst, dan heeft het *verwisselen* van *bron* en *meter* geen *invloed* op de meteruitslag! (Vergelijk een gewone radarantenne: de zend- en ontvangsteigenschappen zijn identiek. Een geluidsversterker is daarentegen een *niet-reciprook* systeem: de verwisseling van microfoon en luidspreker kan niet!)

Figuur 8.14 brengt de twee verschillende opstellingen in kaart. De bijbehorende stroom-spanningsverdelingen zijn middels accenten onderscheiden; het lineaire weerstandsnetwerk (met weerstanden  $R_k$ ) bevindt zich binnen de omhulling.



Figuur 8.14. Er geldt  $i_2' = i_1''$ ; verwisseling van bron en meter heeft geen invloed op de meteruitslag.

Op het met bron en meter gecompleteerde circuit wordt vervolgens tweemaal het theorema van TELLEGEN (8.21) toegepast. Daarbij worden de spanningen betrokken op de éne configuratie en de daarbij passende (!) stromen op de andere. Uitschrijven van (8.21) geeft dan achtereenvolgens (let op: de spanning over de ideaal veronderstelde A-meter is nul)

$$(8.40) \quad e i_1'' + \sum_k u_k' i_k'' = 0,$$

$$(8.41) \quad \sum_k u_k'' i_k' + e i_2' = 0,$$

waarin de sommatie zich steeds uitstrekt over de inwendige weerstanden. En, omdat die weerstanden *lineair* zijn, hebben we bovendien

$$(8.42) \quad \sum_k u_k' i_k'' = \sum_k R_k i_k' i_k'' \quad \text{en} \quad \sum_k u_k'' i_k' = \sum_k R_k i_k'' i_k'.$$

Nu de sommaties in (8.40) en (8.41) dezelfde uitkomst opleveren, volgt er

$$(8.43) \quad e i_1'' = e i_2' \Rightarrow i_1'' = i_2',$$

waarmee is aangetoond dat de meteruitslag in beide opstellingen inderdaad identiek is.

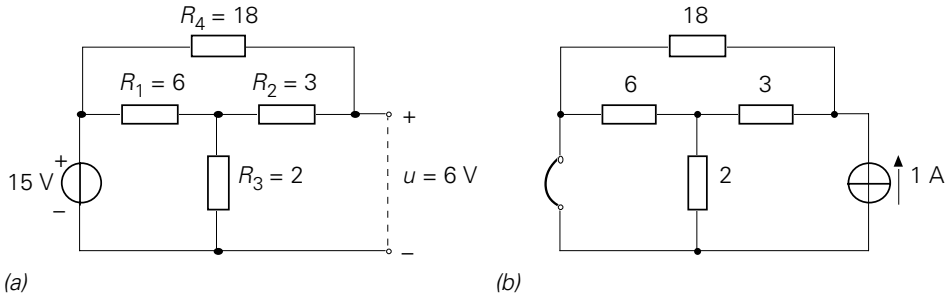
**Oefening 8.19** Vervang de spanningsbron in bovenstaande opstelling door een stroombron en de A-meter door een voltmeter. Bewijs dat verwisseling van bron en meter andermaal geen invloed heeft op de meteruitslag.

### 8.2.5 Gevoeligheidsanalyse

De andere toepassing van het theorema van TELLEGEN betreft de *gevoeligheidsanalyse* (Eng. sensitivity analysis) van elektrische circuits. Daarbij gaat het erom de invloed van bijvoorbeeld een *tolerantieafwijking* van een resistentie  $R$  op een takvariabele  $x$  (spanning of stroom) te berekenen. Een goed ontworpen circuit is weinig gevoelig voor zulke modelafwijkingen (is robuust). Bij voldoende kleine afwijkingen kan dan worden volstaan met de berekening van de *gevoeligheidsfactor*  $S_R^x$  van  $x$  als gevolg van  $R$ . Deze is gedefinieerd als de verhouding tussen de relatieve afwijking van respectievelijk  $x$  en  $R$ , dus

$$(8.44) \quad S_R^x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dx/x}{dR/R} = (R/x) (dx/dR).$$

Het is voorstelbaar dat het theorema van TELLEGEN inderdaad instrumenteel zal blijken bij de berekening van de gevoeligheidsfactoren. In beginsel zijn er immers *twee verschillende circuits met dezelfde graaf* in het geding: het oorspronkelijke model-circuit (zonder tolerantie afwijkingen) en het feitelijk ontworpen circuit (met tolerantie afwijkingen). En, het theorema van TELLEGEN nodigt nu juist uit om de takvariabelen van beide circuits met elkaar in verband te brengen! Uitwerken van dit idee, blijkt inderdaad een uiterst efficiënte berekeningsprocedure op te leveren. Daarbij blijkt een fictief derde circuit, het zogenaamde *toegevoegde circuit* (Eng. adjoint circuit), een sleutelrol te spelen ([19], [20], [21]).



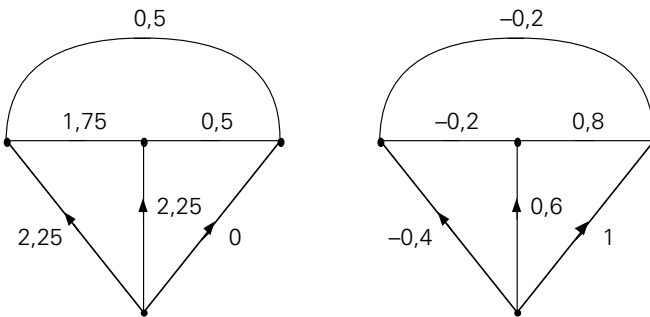
Figuur 8.15. Lineair resistief circuit dat aan een gevoeligheidsanalyse wordt onderworpen (a) en toegevoegd circuit (b); opgegeven resistanties in ohm.

Ter illustratie wordt het lineaire resistieve circuit van figuur 8.15(a) aan een gevoeligheidsanalyse onderworpen. Daarbij leggen we ons toe op de berekening van de gevoeligheidsfactoren  $S_{R_1}^u$ ,  $S_{R_2}^u$ ,  $S_{R_3}^u$  en  $S_{R_4}^u$ .

Het toegevoegde circuit staat in figuur 8.15(b). Volgens bovengenoemde procedure blijkt het uit het oorspronkelijke circuit te worden verkregen, door daarin de aandrijvende spanningsbron te vervangen door een kortsluiting, en de open tak waarover de onderzochte spanning  $u$  staat (de gestippelde lijn in figuur 8.15(a)) door een stroombron met de eenheidsterkte. De rest van het circuit blijft onveranderd. (Merk op dat beide circuits andermaal dezelfde graaf hebben.) Volgens nog steeds dezelfde procedure blijkt dan voor de gevoeligheidsfactoren de volgende uitdrukking te worden gevonden

$$(8.45) \quad S_R^u = -(R/u) i' i''.$$

Hierin zijn  $i'$  en  $i''$  de stromen door de weerstand  $R$  in respectievelijk het oorspronkelijke en toegevoegde circuit.



Figuur 8.16. Berekende stromen in de elektrische circuits van figuur 8.15 (opgegeven waarden in ampère).

Dus, voor de berekening van de vier gevoeligheidsfactoren behoeven *slechts twee netwerkproblemen* te worden opgelost: één m.b.t. het oorspronkelijke circuit en één m.b.t. het toegevoegde circuit! Bovendien: bij toepassing van bijvoorbeeld de

MNA-methode behoeft daarbij *slechts één LU-decompositie* te worden uitgevoerd. Immers, alleen het bekende rechterlid van de MNA-matrix is voor beide netwerkproblemen verschillend. De oplossing van het andere netwerkprobleem volgt middels een minimale extra inspanning! In figuur 8.16 staan de berekende stromen. De gezochte gevoeligheidsfactoren volgen met (8.45) als

$$(8.46) \quad S_{R_1}^u = -(R_1/u) i_1' i_1'' = -(6/6) \times 1,75 \times (+0,2) = -0,35$$

$$S_{R_2}^u = -(R_2/u) i_2' i_2'' = -(3/6) \times 0,5 \times 0,8 = +0,20$$

$$S_{R_3}^u = -(R_3/u) i_3' i_3'' = -(2/6) \times 2,25 \times 0,6 = +0,45$$

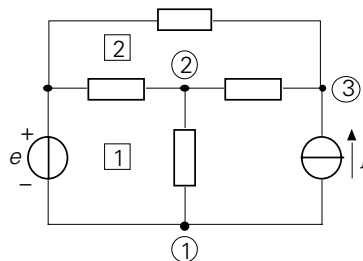
$$S_{R_4}^u = -(R_4/u) i_4' i_4'' = -(18/6) \times 0,5 \times (+0,2) = -0,30.$$

Een tolerantieafwijking in bijvoorbeeld  $R_1$  met 1% voorspelt dus een verandering in  $u$  met 0,35%. Bovendien: de invloed van een kleine afwijking in  $R_1$  op de spanning  $u$  is het kleinst, en die van  $R_4$  het grootst. Ook: als  $R_2$  of  $R_3$  iets groter (kleiner) wordt, zal  $u$  eveneens iets toenemen (afnemen). Als daarentegen  $R_1$  of  $R_4$  iets groter (kleiner) uitvalt, neemt  $u$  juist iets af (toe).

**Oefening 8.20** Bewijs dat als *alle* weerstanden *dezelfde*, kleine *relatieve* afwijking krijgen, de spanning  $u$  *géén* verandering ondergaat. Pas daartoe het theorema van TELLEGEN toe op de configuraties van figuur 8.15(a) en (b).

### 8.3 BRON-MANIPULATIES

In het elektrische circuit van figuur 8.17 heeft de spanningsbron geen serieweerstand (vormt geen spanningsdoos) en de stroombron geen parallelweerstand (vormt geen stroomdoos).

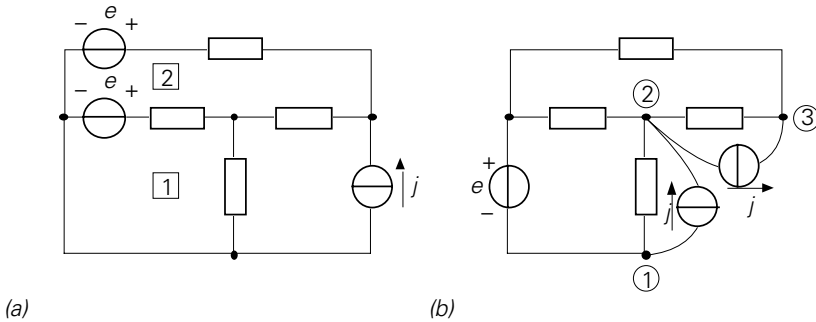


Figuur 8.17. De spanningsbron en de stroombron hebben respectievelijk geen serie- en parallelweerstand.

Bij (in essentie) *gelijk blijvende spanningen en stromen* kan deze omstandigheid als volgt worden gewijzigd.

Schuif de *spanningsbron* door een aangrenzende knoop in elke daaraan incidente tak, daarbij de oorspronkelijke positie als *kortsluittak* achterlatend. Het resultaat van deze spanningsbron-verschuiving (Eng. *V-shift*) staat in figuur 8.18(a).

Plaats de *stroombron* over de takken waarmee een lus wordt gevormd, daarbij de oorspronkelijke positie als *open tak* achterlatend. Deze stroombron-manipulatie (Eng. *I-shift*) wordt afgebeeld in figuur 8.18(b).

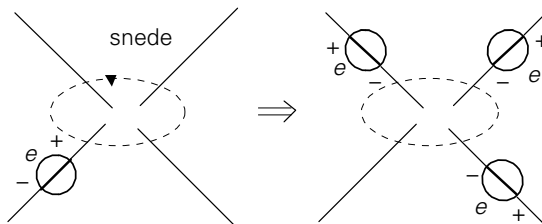


Figuur 8.18. Circuit van figuur 8.17 na een *V-shift* (a) en een *I-shift* (b).

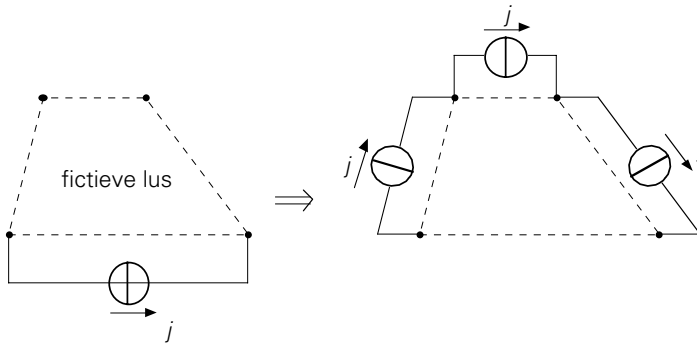
De rechtvaardiging van de ‘V-shift’ wordt direct ingezien bij het uitschrijven van de KVL’s voor de lussen  $\boxed{1}$  en  $\boxed{2}$ . Als daarin de bekende spanningsbronsterkten worden gesubstitueerd, zijn de resultaten m.b.t. de circuits van de figuren 8.17 en 8.18(a) identiek. Daar de KCL’s en de *u-i*-relaties van de als lineaire weerstanden aangegeven (doch *willekeurig* veronderstelde!) *eenpoorten* dat eveneens zijn, wordt geconcludeerd dat de spanningen en stromen *m.b.t. die eenpoorten* identiek zijn. (Dit is wat in de aanhef van deze paragraaf werd bedoeld met ‘in essentie’ gelijkblijvende spanningen en stromen; de takspanning in de oorspronkelijke spanningsbron-tak is na de V-shift natuurlijk wèl veranderd.)

Het bewijs van de ‘I-shift’ verloopt analoog; nu dienen de KCL’s voor de knopen  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  en  $\textcircled{3}$  te worden uitgeschreven ([22], [23]).

In de figuren 8.19 en 8.20 staan *generalisaties* van respectievelijk de V- en I-shift [15]. De eerdere rol van een knoop en een lus is nu uitgebreid tot respectievelijk een *snede* en een *fictieve lus*. (Merk op dat de *netto* spanning in de lussen en de *netto* stroom naar de knopen na respectievelijk een V- en I-shift steeds onveranderd blijft.)

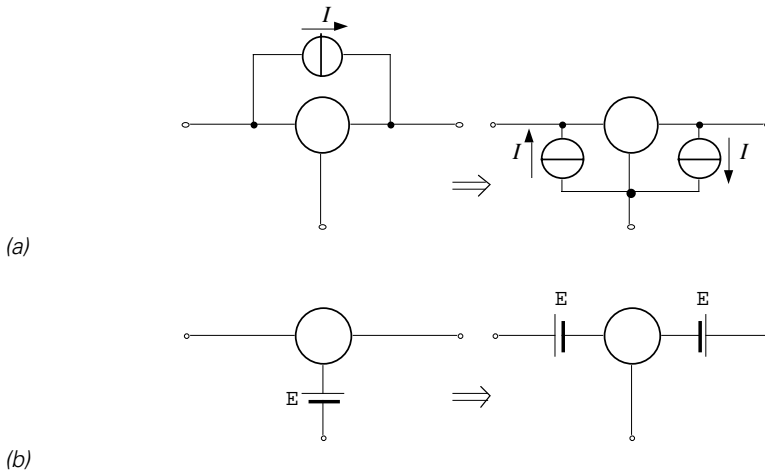


Figuur 8.19. Gegeneraliseerde V-shift.



Figuur 8.20. Gegeneraliseerde I-shift.

Figuur 8.21 geeft voorbeelden van de geeneraliseerde shifts, steeds uitmondend in een *klem-equivalent*.



Figuur 8.21. Na de I-shift (a) en de V-shift (b) wordt een klem-equivalent verkregen.

**Oefening 8.21** Geef alternatieven voor de V- en I-shifts van figuur 8.18, en wel zó dat er na de shifts steeds weer uitsluitend spannings- en stroomdozen worden verkregen. Hoeveel zijn dat er? (Antwoord: drie.)

## 8.4 SUBSTITUTIE BEGINSEL

Het *substitutie beginsel* luidt als volgt [24].

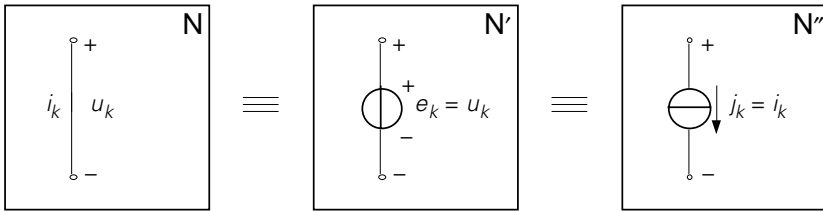
### *Substitutie beginsel*

De spanningen en stromen van een *willekeurig elektrisch circuit* blijven *onveranderd* als de  $k$ -de tak wordt vervangen door

- (8.47)
  1. een *spanningsbron* met sterkte  $e_k = u_k$ , of
  2. een *stroombron* met sterkte  $j_k = i_k$ .

Hierin zijn  $u_k$  en  $i_k$  de takvariabelen van tak  $k$ . Een noodzakelijke voorwaarde is evenwel dat er steeds precies één *oplossing* in het geding is.

In figuur 8.22 is het substitutiebeginsel in kaart gebracht; daarin staat tak  $k$  voor een *willekeurige eenpoort*.

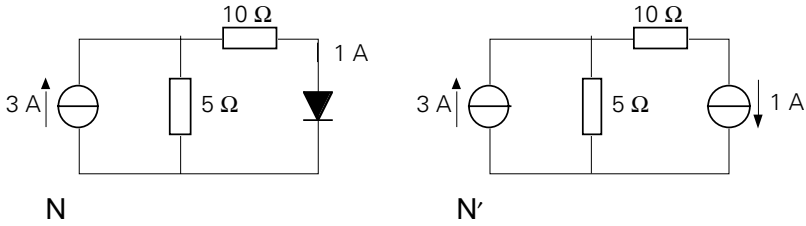


Figuur 8.22. Het substitutie beginsel; tak  $k$  staat voor een willekeurige eenpoort.

### Bewijs

Noem het oorspronkelijke circuit  $N$ . Laat  $u_k$  en  $i_k$  respectievelijk de takspanning en -stroom van de  $k$ -de tak zijn die bij de enige oplossing van  $N$  behoren. Indien de  $k$ -de tak van  $N$  wordt vervangen door een spanningsbron met sterkte  $e_k = u_k$ , ontstaat er een nieuw circuit  $N'$  (zie figuur 8.22). Zie dan eerst in dat  $N$  en  $N'$  dezelfde netwerkgraaf hebben (en dus dezelfde circuit-matrix  $\mathbf{A}$ ). Daarom zijn de KCL's en KVL's van  $N$  en  $N'$  eveneens identiek. Uitgezonderd de  $k$ -de tak, zijn de  $u$ - $i$ -relaties dat bovendien óók. Maar, in de  $k$ -de tak van  $N'$  dicteert de spanningsbron dat  $u_k' = e_k = u_k$ , daarbij de stroom  $i_k'$  vrij latend (eigenschap spanningsbron). Naast alle spanningen, kunnen daarom eveneens alle stromen van  $N$  voldoen aan de eisen die  $N'$  aan een oplossing stelt. En, in de veronderstelling dat  $N'$  eveneens precies één oplossing heeft, zijn die spanningen en stromen tevens de oplossing. Ergo,  $N$  en  $N'$  hebben precies dezelfde oplossing. Het bewijs van de andere tak-substitutie verloopt geheel analoog.  $\square$

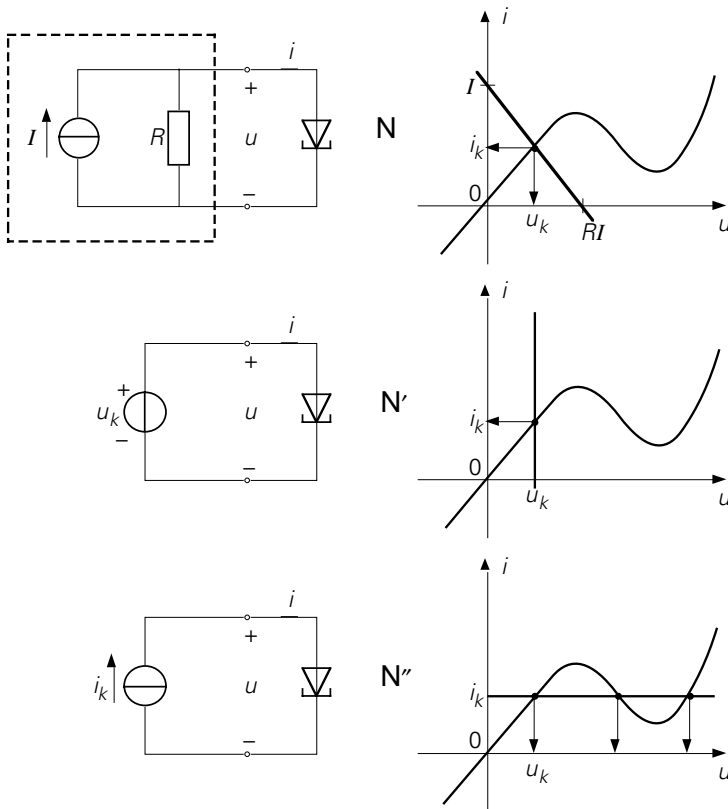
Figuur 8.23 geeft een illustratie van het substitutie beginsel. De diode in het oorspronkelijke circuit  $N$  is in  $N'$  vervangen door een stroombron met de sterkte van de diodestroom.



Figuur 8.23. Volgens het substitutie beginsel hebben  $N$  en  $N'$  dezelfde oplossing.

**Oefening 8.22** Vervang de diode in  $N$  door een spanningsbron met zódanige sterkte dat alle spanningen en stromen onveranderd blijven. Dezelfde vraag voor de weerstand van  $10\ \Omega$ .

Figuur 8.24 laat zien dat het substitutie beginsel slechts onder *voorwaarden* mag worden toegepast. De vervanging van de stroomdoos (opgevat als een enkele tak!) door de spanningsbron is weliswaar toegestaan, maar de vervanging door de stroombron geeft aanleiding tot meerdere oplossingen, en is derhalve *niet* geoorloofd.



Figuur 8.24. In het oorspronkelijke circuit  $N$  mag voor de stroomdoos wel een spanningsbron worden gesubstitueerd ( $N'$ ), maar geen stroombron ( $N''$ ).

**Ofening 8.23** Mag in het circuit  $N$  van figuur 8.24 voor de tunneldiode een spanningsbron met sterkte  $u_k$  worden gesubstitueerd? En een stroombron met sterkte  $i_k$ ? Dezelfde vragen m.b.t. de circuits  $N'$  en  $N''$ .

## 8.5 SUPERPOSITIE BEGINSEL

In de theorie van *lineaire* elektrische circuits neemt het superpositie beginsel een centrale plaats in, maar is daar tegelijkertijd toe beperkt [1]. Voorlopig komen alleen lineaire *resistieve* circuits aan bod. Het superpositie beginsel luidt als volgt.

### *Superpositie beginsel*

(8.48) De (enige) oplossing van een *lineair* elektrisch circuit, bestaande uit (onafhankelijke en bestuurd) bronnen en lineaire weerstanden is gelijk aan de *som* van de *deeloplossingen* als gevolg van de werking van elke *onafhankelijke* (!) bron *apart* (en waarbij de overige *onafhankelijke* bronnen de nul-sterkte krijgen).

### Bewijs

In Hoofdstuk 7 zagen we dat de *tableauvergelijkingen* van *lineaire* resistieve circuits de volgende gedaante hebben

$$(8.49) \quad \mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

waarin  $\mathbf{x}$  de oplossing van het netwerkprobleem is, terwijl de bekende bronvector  $\mathbf{b}$  wordt gegeven door

$$(8.50) \quad \mathbf{b} = [\mathbf{0}^T \mathbf{0}^T \mathbf{w}^T]^T.$$

Hierin bergt de kolomvector  $\mathbf{w}$  de bronsterkten van de *onafhankelijke* bronnen; de afhankelijke (bestuurde) bronnen leveren nooit een bijdrage aan  $\mathbf{w}$  (zie Opmerking 7.6 van Hoofdstuk 7).

Neem nu voor het gemak aan dat het circuit *twee* onafhankelijke bronnen bevat met sterkten  $w_\alpha$  en  $w_\beta$ . Bij geschikt gekozen takrichtingen wordt de bronvector  $\mathbf{b}$  dan

$$(8.51) \quad \mathbf{b} = [\mathbf{0}^T \mathbf{0}^T | \dots w_\alpha \dots w_\beta \dots]^T,$$

waarin de open plaatsen staan voor nullen. Zie nu in dat  $\mathbf{b}$  als volgt kan worden uitgesplitst

$$(8.52) \quad \mathbf{b} = [\mathbf{0}^T \mathbf{0}^T | \dots w_\alpha \dots \downarrow 0 \dots]^T + [\mathbf{0}^T \mathbf{0}^T | \dots \downarrow 0 \dots w_\beta \dots]^T = \mathbf{b}' + \mathbf{b}''.$$

Dus,  $\mathbf{b}'$  en  $\mathbf{b}''$  zijn bronvectoren waarin steeds één onafhankelijke bron een bijdrage levert; de overige onafhankelijke bron(nen) hebben de nul-sterkte.

In de veronderstelling dat het netwerkprobleem precies één oplossing  $\mathbf{x}$  heeft, wordt die met (8.49) gegeven door

$$(8.53) \quad \mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b},$$

zodat met (8.52)

$$(8.54) \quad \mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{b}' + \mathbf{b}'') = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}' + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}'' = \mathbf{x}' + \mathbf{x}'',$$

waarin

$$(8.55) \quad \mathbf{x}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}' \quad \text{en} \quad \mathbf{x}'' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}''.$$

Van (8.54) wordt afgelezen dat de oplossing  $\mathbf{x}$  inderdaad kan worden geschreven als de *som* van de *deeloplossingen*  $\mathbf{x}'$  en  $\mathbf{x}''$ , die met (8.55) en (8.52) het gevolg zijn van de werking van elke *onafhankelijke* bron apart.  $\square$

Na uitschrijven van (8.55) vinden we nog dat elke afzonderlijke potentiaal, takspanning of -stroom  $x \in \mathbf{x}$  eveneens gelijk is aan de *som* van *deeloplossingen*, zodat

$$(8.56) \quad x = x' + x'',$$

met

$$(8.57) \quad x' = Aw_\alpha \quad \text{en} \quad x'' = Bw_\beta.$$

Hierin zijn de coëfficiënten  $A$  en  $B$  *niet* afhankelijk van de onafhankelijke bronsterkten  $w_\alpha$  en  $w_\beta$ . Dus, elke deeloplossing is *evenredig* met een *enkele* onafhankelijke bronsterkte.

In het algemene geval dat het lineaire circuit meerdere onafhankelijke bronnen bevat, heeft het superpositie beginsel de volgende wiskundige vorm.

*Superpositie beginsel (lineaire resistieve circuits)*

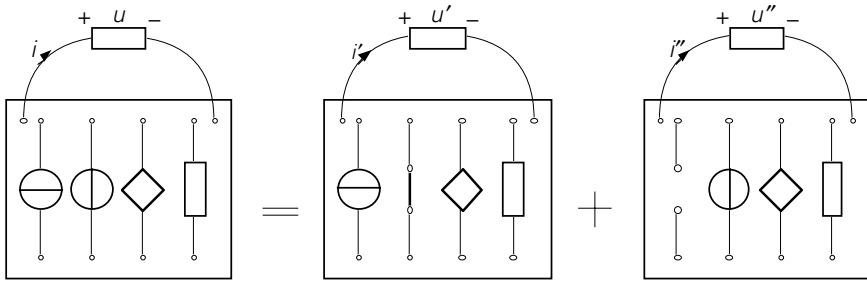
Elke spanning en stroom in een *lineair* resistief circuit kan worden genoteerd als de volgende *lineaire combinatie*

$$(8.58) \quad x = x' + x'' + x''' + \dots = Aw_\alpha + Bw_\beta + Cw_\gamma + \dots$$

Hierin zijn de  $w$ 's de *onafhankelijke* bronsterkten, terwijl de coëfficiënten  $A, B$ , enz. daar onafhankelijk van zijn.

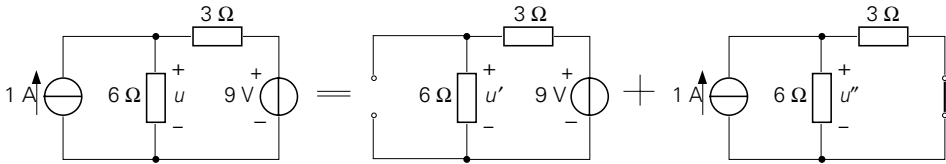
Er wordt een praktische *circuit-interpretatie* van het superpositie beginsel verkregen als bedacht wordt dat een *spanningsbron* en een *stroombron* met de *nulsterkte* respectievelijk equivalent is met een *kortsluiting* of een *open klemmenpaar*. Figuur 8.25 geeft een visualisering van deze circuit-interpretatie; de deeloplossingen zijn voorzien van accenten (let op: de bronsterkten van *bestuurde* bronnen worden

niet op nul gezet!).



Figuur 8.25. Circuit-interpretatie van het superpositie beginsel.

Ter illustratie berekenen we de spanning  $u$  in het lineaire resistieve circuit van figuur 8.26.



Figuur 8.26. Volgens het superpositie beginsel geldt  $u = u' + u''$ .

Van het deel-circuit waarin alléén de spanningsbron telt, lezen we af  $u' = 6 \text{ V}$ , terwijl het deel-circuit waarin alléén de stroombron werkzaam is  $u'' = 2 \text{ V}$  levert. Volgens het superpositie beginsel is  $u = u' + u'' = 8 \text{ V}$ .

**Oefening 8.24** Bereken de stroom door de weerstand van  $3\Omega$  m.b.v. het superpositie beginsel.

**Oefening 8.25** Laat zien dat het superpositie beginsel *niet* van toepassing is voor *vermogens*. Substitueer daartoe  $u = u' + u'' + \dots$  en  $i = i' + i'' + \dots$  in  $p = ui$ .

### Opmerking 8.8

Het superpositie beginsel geldt eveneens indien de lineaire weerstanden *tijd-variant* zijn. In dat geval zijn de coëfficiënten  $A$ ,  $B$ , enz. in (8.58) functies van de tijd. Dit volgt onmiddellijk uit (8.54), waarin dan  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t)$ .

## 8.6 THEOREMA'S VAN THEVENIN EN NORTON

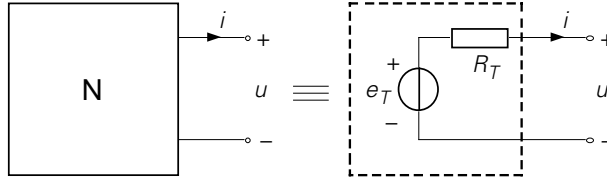
Een *lineaire, resistieve bron-eeppoort* is een eeppoort die is samengesteld uit (onafhankelijke en bestuurd) *bronnen* en *lineaire* weerstanden. Voor zulke eeppoorten zijn de zogenaamde theorema's van THEVENIN en NORTON van toepassing (zie Opmerking 8.10 voor nadere voorwaarden). Eerst volgt het theorema van

## THEVENIN.

(8.59)

*Theorema van THEVENIN*

De lineaire resistieve bron-eeenpoort  $N$  is aan de klemmen equivalent met een enkele spanningsdoos, het THEVENIN-equivalent van  $N$  geheten.



Hierin heet  $e_T$  de THEVENIN-spanning en  $R_T$  de THEVENIN-weerstand van  $N$ . Er geldt

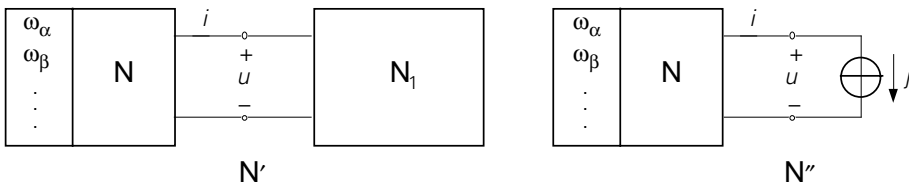
$$e_T = u_{\text{open}} \quad \text{en} \quad R_T = u_{\text{open}} / i_{\text{kort}},$$

waarin  $u_{\text{open}}$  de open spanning (dan is  $i = 0$ ) en  $i_{\text{kort}}$  de kortsluitstroom (dan is  $u = 0$ ) van  $N$  zijn.

Tevens is  $R_T$  de inwendige weerstand van  $N$ ; dit is de weerstand die aan de klemmen van  $N$  wordt waargenomen als alle inwendige onafhankelijke bronnen van  $N$  de nul-sterkte krijgen (worden uitgeschakeld).

**Bewijs**

Eerst wordt aangetoond dat de lineaire bron-eeenpoort  $N$  inderdaad de *affiene  $u$ - $i$ -relatie* van een spanningsdoos heeft (vergelijk par. 6.1.5 van Hoofdstuk 6). Op zoek naar die  $u$ - $i$ -relatie, wordt  $N$  aangesloten op een willekeurige (en niet noodzakelijk lineaire!) andere eenpoort  $N_1$  zodat het elektrische circuit  $N'$  wordt gevormd. Figuur 8.27(a) toont het resultaat;  $w_\alpha, w_\beta$ , enz. zijn de sterkten van de onafhankelijke bronnen van  $N$ .



Figuur 8.27. Onderzoek naar de  $u$ - $i$ -relatie van de lineaire resistieve bron-eeenpoort  $N$ ;  $w_\alpha, w_\beta$ , enz. zijn de sterkten van de onafhankelijke bronnen van  $N$ .

Vat  $N_1$  vervolgens op als een enkele tak van  $N'$  waardoor de klemstroom  $i$  vloeit. Volgens het *substitutie beginsel* (8.47) blijven alle stromen en spanningen, en met

name de klemspanning  $u$ , ongewijzigd als die tak wordt vervangen door een stroombron met sterkte  $j = i$  (aangenomen dat er steeds één oplossing in het geding is; zie daarvoor Opmerking 8.10 onderaan). Daar het aldus ontstane nieuwe circuit  $N''$  lineair is ( $N$  is immers lineair; zie figuur 8.27(b)), kan het *superpositie beginsel* (8.58) worden toegepast. Om die reden is elke stroom en spanning van  $N''$ , en ook de klemspanning  $u$ , een lineaire combinatie van *alle onafhankelijke bronsterkten* van  $N''$ , zodat (let op: die bronsterkten zijn  $w_\alpha, w_\beta, \text{ enz. } \text{en } j!$ )

$$(8.60) \quad u = Aw_\alpha + Bw_\beta + Cw_\gamma + \dots + Kj,$$

waarin de coëfficiënten  $A, B, \text{ enz.}$  en  $K$  niet afhankelijk zijn van die bronsterkten. Daar bovendien  $j = i$ , wordt uiteindelijk de volgende affiene *u-i-relatie* van  $N$  gevonden

$$(8.61) \quad u = a + Ki,$$

waarin

$$(8.62) \quad a = Aw_\alpha + Bw_\beta + Cw_\gamma + \dots$$

Anderzijds wordt de *u-i-relatie van de spanningsdoos* in de figuur van (8.59) afgelezen als

$$(8.63) \quad u = e_T - R_T i.$$

De affiene *u-i-relaties* (8.61) en (8.63) worden *identiek* indien wordt gesteld

$$(8.64) \quad e_T = a \quad \text{en} \quad R_T = -K.$$

Hiermee zijn natuurlijk ook de *open spanning*  $u_{\text{open}}$  (dan is  $i = 0$ ) en de *kortsluitstroom*  $i_{\text{kort}}$  (dan is  $u = 0$ ) van  $N$  en de equivalente spanningsdoos identiek. Dus, met (8.63) hebben we (lees dit tevens af van de figuur in (8.59))

$$(8.65) \quad e_T = u_{\text{open}},$$

terwijl

$$(8.66) \quad i_{\text{kort}} = e_T / R_T,$$

waarmee

$$(8.67) \quad R_T = u_{\text{open}} / i_{\text{kort}}.$$

Tevens wordt van (8.63) afgelezen dat

$$(8.68) \quad R_T = (u/-i) |_{e_T=0},$$

hetgeen na combineren met (8.64) en (8.62) overgaat in

$$(8.69) \quad R_T = (u/-i) \Big|_{w_\alpha = w_\beta = w_\gamma = \dots = 0}.$$

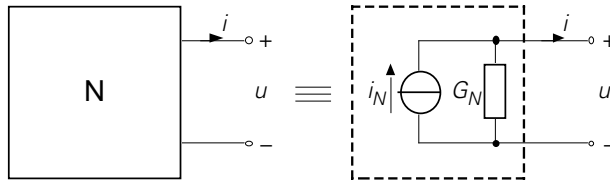
Hiermee is  $R_T$  inderdaad de *inwendige weerstand van N*; zijnde de weerstand die aan de klemmen van **N** wordt waargenomen indien alle inwendige *onafhankelijke* bronnen de *nul-sterkte* krijgen (worden uitgeschakeld).  $\square$

Geheel duaal met het theorema van THEVENIN volgt het hieronder samengevatte theorema van NORTON.

*Theorema van NORTON*

De *lineaire* resistieve bron-*eenpoort N* is aan de klemmen equivalent met een enkele *stroomdoos*, het *NORTON-equivalent van N* geheten.

(8.70)



Hierin heet  $j_N$  de *NORTON-stroom* en  $G_N$  de *NORTON-geleiding* van **N**. Er geldt

$$j_N = i_{\text{kort}} \quad \text{en} \quad G_N = i_{\text{kort}} / u_{\text{open}},$$

waarin  $i_{\text{kort}}$  de *kortsluitstroom* (dan is  $u = 0$ ) en  $u_{\text{open}}$  de *open spanning* (dan is  $i = 0$ ) van **N** zijn.

Tevens is  $G_N$  de *inwendige geleiding* van **N**; dit is de geleiding die aan de klemmen van **N** wordt waargenomen als alle inwendige *onafhankelijke* bronnen van **N** de *nul-sterkte* krijgen (worden uitgeschakeld).

Daar een spanningsdoos (het THEVENIN-equivalent) kan worden omgerekend naar een equivalente stroomdoos (het NORTON-equivalent) volgt dat indien de equivalenten betrekking hebben op *dezelfde* eenpoort **N**

$$(8.71) \quad G_N = R_T^{-1}$$

Samenvattend wordt met (8.59), (8.70) en (8.71) geconcludeerd dat een *lineaire* bron-*eenpoort aan de klemmen* volledig is getypeerd indien *twee* van de drie grootheden  $e_T (= u_{\text{open}})$ ,  $j_N (= i_{\text{kort}})$  en  $R_T (= u_{\text{open}}/i_{\text{kort}})$  bekend zijn. Bovendien: het THEVENIN/NORTON-equivalent is voor een gegeven eenpoort eenvoudig door *meting* te verkrijgen: de open spanning en de kortsluitstroom zijn daarvoor voldoende gegevens.

**Opmerking 8.9**

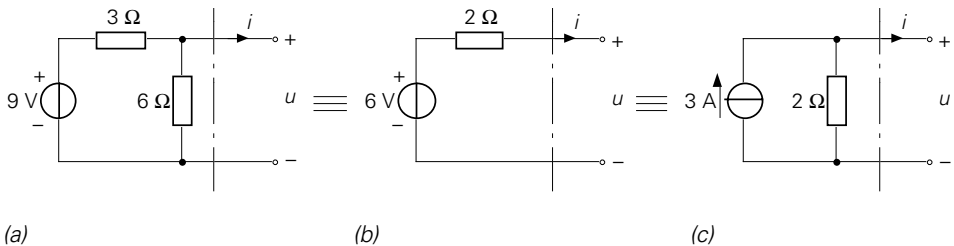
De *affiene u-i-relatie* van een lineaire bron-eenpoort gaat over in een *lineaire u-i-relatie* (een *evenredigheid*) indien de eenpoort *géén onafhankelijke bronnen* bevat (vergelijk (8.61) en (8.62)).

**Opmerking 8.10**

Niet elke lineaire bron-eenpoort heeft èn een THEVENIN- èn een NORTON-equivalent. De eenvoudigste voorbeelden zijn de onafhankelijke bronnen zèlf! Het kan zelfs voorkomen dat een eenpoort in het geheel geen THEVENIN/NORTON-equivalent heeft. De nullator en de norrator van Hoofdstuk 6 zijn daar voorbeelden van. Een *noodzakelijke voorwaarde* voor het bestaan van respectievelijk een THEVENIN- of een NORTON-equivalent is dat de eenpoort een *stroombestuurde*, dan wel een *spanningsbestuurde* representatie toelaat [1]. Dit volgt direct uit de bewijsvoering van het THEVENIN-equivalent. Daarin is de toepassing van het *substitutie beginsel* slechts toegestaan indien de vervangende stroombron is aangesloten op een stroombestuurde eenpoort; alléén dan is er slechts één oplossing in het geding!

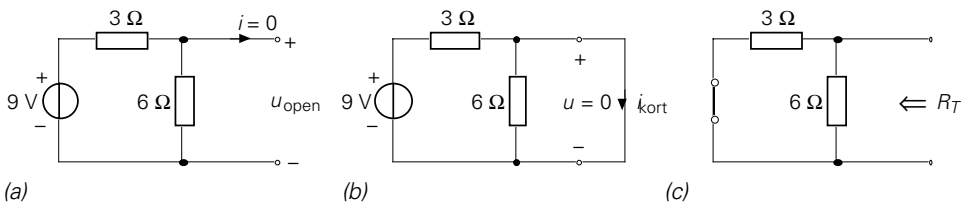
Aan de hand van enkele voorbeelden wordt gedemonstreerd hoe het THEVENIN- en/of NORTON-equivalent van een gegeven lineaire resitieve bron-eenpoort kan worden verkregen.

Beschouw dan eerst de lineaire bron-eenpoort van figuur 8.28(a).



Figuur 8.28. Een lineaire resitieve bron-eenpoort (a) met THEVENIN-equivalent (b) en NORTON-equivalent (c).

We berekenen eerst de open spanning  $u_{\text{open}}$  en de kortsluitstroom  $i_{\text{kort}}$  (vergelijk figuur 8.29(a) en (b)).

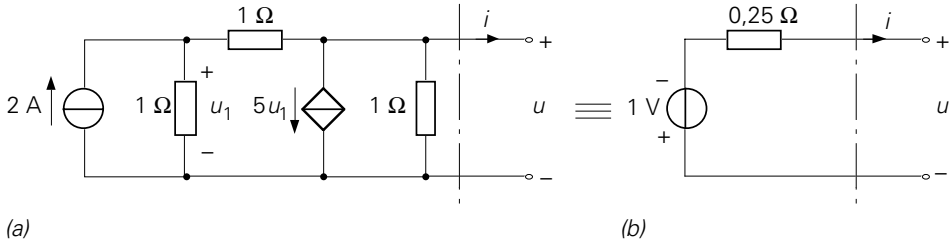


Figuur 8.29. Deel-circuits ter berekening van  $u_{\text{open}}$  (a),  $i_{\text{kort}}$  (b) en  $R_T$  (c).

Via spanningsdeling wordt van figuur 8.29(a) afgelezen dat  $u_{\text{open}} = (6/(6 + 3)) \times 9 = 6 \text{ V}$ , terwijl de lus KVL in figuur 8.29(b) geeft  $9 = 3i_{\text{kort}} \Rightarrow i_{\text{kort}} = 3 \text{ A}$ . Met beide gegevens wordt de THEVENIN-weerstand  $R_T = u_{\text{open}} / i_{\text{kort}} = 6/3 = 2 \Omega$ . Het THEVENIN-equivalent is nu gevonden:  $e_T = u_{\text{open}} = 6 \text{ V}$  en  $R_T = 2 \Omega$  (figuur 8.28(b)), terwijl het NORTON-equivalent volgt met  $j_N = i_{\text{kort}} = 3 \text{ A}$  (anders: reken de THEVENIN-spanningsdoos om naar een equivalente stroomdoos); zie figuur 8.28(c).

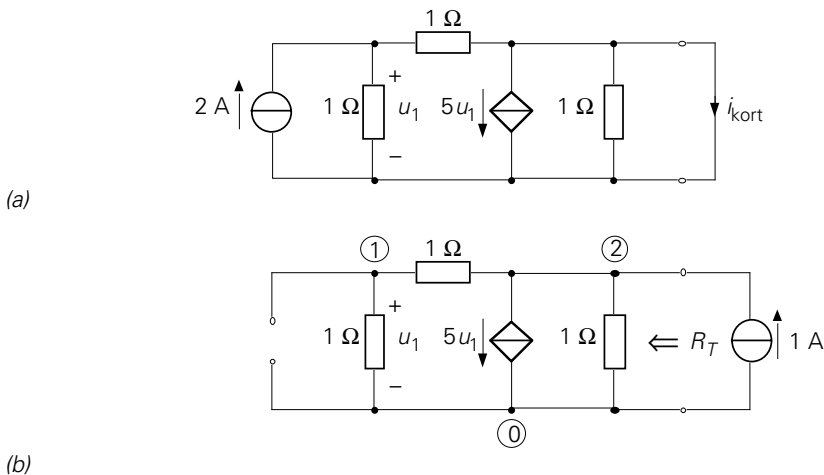
De THEVENIN-weerstand kan ook op een alternatieve wijze worden verkregen. Volgens het theorema van THEVENIN is  $R_T$  immers juist de *inwendige weerstand* van de gegeven eenpoort. En inderdaad, van figuur 8.29(c) wordt direct afgelezen dat  $R_T = (3 + 6)/(3 \times 6) = 2 \Omega$  (een *spanningsbron* met de *nul-sterkte* is equivalent met een *kortsluiting*).

De lineaire resistieve bron-eenpoort van figuur 8.30(a) dient als tweede voorbeeld. Merk op dat de eenpoort óók een *bestuurde* (afhankelijke) bron bevat. Het THEVENIN-equivalent wordt gevraagd.



Figuur 8.30. Een lineaire resistieve bron-eenpoort (a) met THEVENIN-equivalent (b).

Daar steeds slechts *twee* van de drie grootheden  $e_T$ ,  $j_N$  en  $R_T$  nodig zijn, kunnen we ons beperken tot de berekening van bijvoorbeeld  $j_N = i_{\text{kort}}$  en  $R_T$ .



Figuur 8.31. Deel-circuits ter berekening van  $i_{\text{kort}}$  (a) en  $R_T$  (b).

Via inspectie volgt (nagaan!)  $i_{\text{kort}} = -4$  A (figuur 8.31(a)). Ter berekening van de *inwendige weerstand* wordt de eenpoort aangesloten op een stroombron van 1 A, waarbij de inwendige *onafhankelijke* bronnen de *nul-sterkte* krijgen (hier: een *stroombron* met de *nul-sterkte* is equivalent met een *open klemmenpaar*); zie figuur 8.31(b). De numerieke waarde van de gezochte inwendige weerstand is dan juist gelijk aan de spanning over de stroombron; immers  $u = R_T i$  met  $i = 1$  A. Ter berekening van die spanning (de potentiaal  $v_2$  in figuur 8.31(b)) wordt de knooppuntmethode toegepast. Met  $u_1 = v_1$  volgt

$$(8.72) \quad \begin{cases} \textcircled{1}: 2v_1 - v_2 = 0 \\ \textcircled{2}: -v_1 + 2v_2 = -5v_1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v_1 - v_2 = 0 \\ 4v_1 + 2v_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow v_2 = 0,25 \text{ V.}$$

Dus,  $R_T = 0,25 \Omega$ . Daar anderzijds  $R_T = u_{\text{open}} / i_{\text{kort}}$ , volgt met  $i_{\text{kort}} = -4$  A dat  $u_{\text{open}} = e_T = -1$  V. Hiermee is het THEVENIN-equivalent van figuur 8.30(b) verklaard.

**Oefening 8.26** Geef het NORTON-equivalent van de eenpoort.

**Oefening 8.27** Ga na dat de *foutieve* waarde  $R_T = \frac{2}{3} \Omega$  wordt gevonden als óók de *bestuurde* bron de nul-sterkte krijgt.

**Oefening 8.28** Bereken de THEVENIN-spanning  $e_T = u_{\text{open}}$  zonder omwegen.

**Oefening 8.29** Een alternatieve berekening van de inwendige weerstand  $R_T$  is die waar de eenpoort wordt aangesloten op een spanningsbron. Voer die berekening uit.

**Oefening 8.30** Indien de bronsterkte van 2 A in figuur 8.30(a) wordt vervangen door  $10 \cos(3t)$  A, wat wordt dan het THEVENIN-equivalent?

Tot slot van deze paragraaf laten we zien dat het THEVENIN/NORTON-equivalent een krachtig *hulpmiddel* is bij de berekening van een *enkele takvariabele* (spanning of stroom) van een gegeven elektrisch circuit. Daarbij wordt de volgende *standaard procedure* gevolgd.

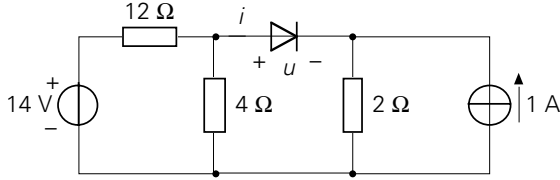
*Standaard procedure ter berekening van één takvariabele*

- (8.73)
  1. *Verwijder* de tak in kwestie; er resulteert een eenpoort.
  2. *Bepaal* het THEVENIN/NORTON-equivalent van die eenpoort.
  3. *Sluit* de eerder verwijderde tak daarop aan.
  4. *Bereken* de gevraagde takvariabele.

Het (niet-lineaire!) diode-circuit van figuur 8.32 dient als voorbeeld. Daarin is de *u-i*-relatie van de diode gegeven door

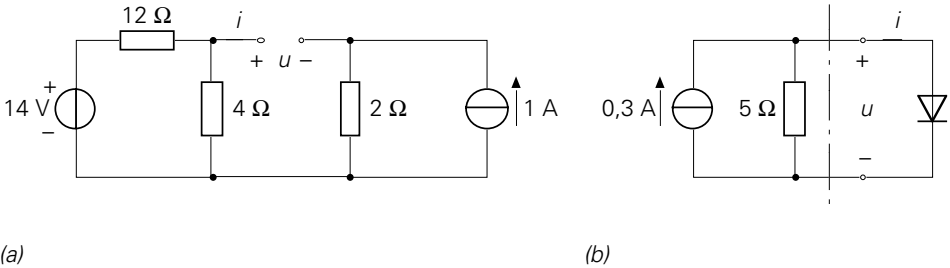
$$(8.74) \quad i = \tilde{i}(u) \equiv 0,1(e^u - 1).$$

De diode-spanning  $u$  wordt gevraagd.



Figuur 8.32. Voorbeeld-circuit.

Na verwijdering van de tak in kwestie (hier: de diode) resteert de (wèl lineaire!) bron-eenpoort van figuur 8.33(a). Daarvan wordt eerst het NORTON-equivalent bepaald.



Figuur 8.33. Na verwijdering van de diode uit het circuit van figuur 8.32 resteert een lineaire bron-eenpoort (a). De diode-spanning  $u$  wordt berekend middels het NORTON-equivalent (b).

Via inspectie volgt direct  $u_{\text{open}} = (4/(4 + 12)) \times 14 - 2 \times 1 = 1,5$  volt en  $R_T = (4 \times 12)/(4 + 12) + 2 = 5 \Omega$ , waarmee  $i_{\text{kort}} = j_N = u_{\text{open}}/R_T = 0,3$  ampère. Het NORTON-equivalent is nu gevonden en de diode wordt erop aangesloten (figuur 8.33(b)). Er volgt

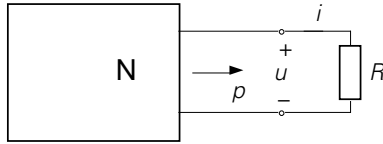
$$(8.75) \quad -0,3 + 0,2u + \tilde{i}(u) = 0,$$

waarin  $\tilde{i}(u)$  wordt gegeven door (8.74). De NEWTON-RAPHSON-methode geeft tenslotte  $u = 0,84$  volt.

**Oefening 8.31** Bereken in het circuit van figuur 8.32 het in de weerstand van  $2 \Omega$  gedissipeerde vermogen. *Substitueer* daartoe eerst een spanningsbron van  $0,84$  volt voor de diode, en pas daarna het *superpositie beginsel* toe. (Antwoord:  $2,6$  watt.) Vind dit vermogen opnieuw, maar nu door eerst de diode-stroom te berekenen.

## 8.7 VERMOGENSAANPASSING

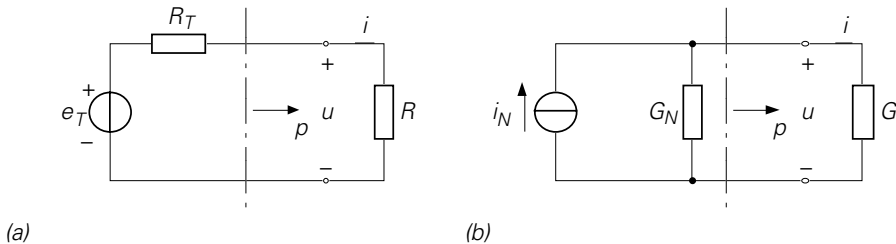
Gegeven een lineaire, resistieve bron-eenpoort  $N$ . De eenpoort wordt aangesloten op een eveneens lineaire, doch *passieve* weerstand  $R$  ( $R \geq 0$ ), die in de nu volgende context een *belastingsweerstand* (Eng. load resistance) heet (zie figuur 8.34).



Figuur 8.34. De eenpoort  $N$  is afgesloten met de belastingsweerstand  $R$ .

We spitsen ons hier toe op de vraag hoe groot het *maximale vermogen*  $p = p_{\max}$  is dat  $N$  kan afgeven aan een nader te bepalen belastingsweerstand  $R$ . Het vraagstuk is relevant als een optimale vermogensoverdracht van een gegeven eenpoort naar een daarop aan te sluiten elektrisch apparaat moet worden gerealiseerd.

Bedenk dan eerst dat de eenpoort  $N$  aan de klemmen kan worden vervangen door een THEVENIN/NORTON-equivalent. Bovendien: voor de *gegeven* eenpoort zijn  $e_T, R_T / i_N, G_N$  vaste gegevens (steeds wordt aangenomen dat  $R_T = G_N^{-1} > 0$ ). Figuur 8.35 toont die vervanging; daarin is  $G = R^{-1} \geq 0$ . (Zie Vraagstuk 8.41 voor een meer algemene opzet, tevens geldig voor een *niet-lineaire* belastingsweerstand.)



Figuur 8.35. De eenpoort  $N$  van figuur 8.34 is vervangen door het THEVENIN-equivalent (a) het NORTON-equivalent (b);  $e_T, R_T / i_N, G_N$  zijn vaste gegevens.

Voor een *willekeurige* lineaire belastingsweerstand/geleiding is het door  $N$  afgegeven vermogen  $p$  gelijk aan

$$(8.76) \quad p = ui = Ri^2 = Gu^2 \geq 0,$$

waarin  $i$  en  $u$  respectievelijk van figuur 8.35(a) en (b) worden afgelezen als

$$(8.77) \quad i = \frac{e_T}{(R_T + R)} \quad \text{en} \quad u = \frac{j_N}{(G_N + G)}.$$

Hiermee kan  $p$  in (8.76) worden uitgedrukt in de vaste gegevens van  $N$ , namelijk

$$(8.78) \quad p = e_T^2 \frac{R}{(R_T + R)^2} = j_N^2 \frac{G}{(G_N + G)^2} \geq 0.$$

Dit vermogen wordt *maximaal* door  $R/G$  zó te kiezen dat  $dp/dR = 0$  of  $dp/dG = 0$ . Omdat

$$(8.79) \quad \frac{dp}{dR} = \frac{d}{dR} (e_T^2 R(R_T + R)^{-2}) = e_T^2 ((R_T + R)^{-2} - 2R(R_T + R)^{-3}),$$

volgt met  $R_T > 0$  en  $R \geq 0$

$$(8.80) \quad \frac{dp}{dR} = e_T^2 \frac{((R_T + R) - 2R)}{(R_T + R)^3} = 0 \Leftrightarrow R = R_T$$

of, in termen van de NORTON-gegevens

$$(8.81) \quad \frac{dp}{dR} = 0 \Leftrightarrow G = G_N.$$

Indien is voldaan aan de voorwaarden (8.80) of (8.81), zegt men dat de eenpoort is *aangepast* (Eng. *matched*) op basis van vermogen. Hieronder staat een samenvatting.

*Aanpassingsvoorwaarde*

(8.82) De lineaire, resitieve bron-eenpoort  $N$  staat het *maximale vermogen*  $p_{\max}$  af indien  $N$  wordt afgesloten met een *belastingsweerstand/ geleiding*  $R/G$  gelijk aan

$$R = R_T / G = G_N.$$

Hierin is  $R_T/G_N$  de *inwendige weerstand/geleiding* van  $N$ .

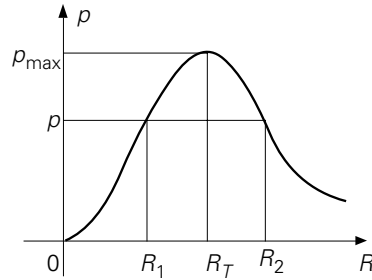
Het *maximaal beschikbare vermogen*  $p_{\max}$  van de eenpoort wordt met de aanpassingsvoorwaarde (8.82) van (8.78) afgelezen als

$$(8.83) \quad p_{\max} = \frac{1}{4} \frac{e_T^2}{R_T} = \frac{1}{4} \frac{i_N^2}{G_N}$$

Ditzelfde vermogen wordt gedissipeerd in een daadwerkelijk aangesloten belastingsweerstand/geleiding  $R = R_T/G = G_N$ .

Merk nog op dat  $p_{\max}$  een *intrinsiek* gegeven van een eenpoort is, dat bovendien eenvoudig kan worden *gemeten*; andermaal zijn de open spanning en de kortsluitstroom daarvoor voldoende gegevens (zie tevens Oefening 8.33).

Tenslotte toont figuur 8.36 de grafiek van  $p$  als functie van de belastingsweerstand  $R$ . Men ziet dat er steeds *twee verschillende* weerstandswaarden zijn die eenzelfde vermogen  $p \neq p_{\max}$  aan de eenpoort onttrekken.



Figuur 8.36. Er vindt een optimale vermogensoverdracht plaats indien de belastingsweerstand  $R$  juist gelijk is aan de inwendige weerstand  $R_T$  van de eenpoort (vermogensaanpassing).

**Oefening 8.32** Leid de uitdrukking van  $p_{\max}$  in termen van de NORTON-gegevens, direct af uit die van  $p_{\max}$  in termen van de THEVENIN-gegevens.

**Oefening 8.33** Laat zien dat  $p_{\max} = \frac{1}{4} u_{\text{open}} i_{\text{kort}}$ .

**Oefening 8.34** Neem  $R = R_T$  in figuur 8.35(a), en vind het daarin opgenomen vermogen. Stel vast dat het resultaat identiek is aan (8.83).

**Oefening 8.35** Sluit de eenpoort van figuur 8.28(a) achtereenvolgens af met een weerstand van  $1 \Omega$ ,  $2 \Omega$  en  $4 \Omega$ . Bereken steeds het daarin gedissipeerde vermogen. Wat merkt u op?

### Opmerking 8.11

Zoals gesteld, is de uitdrukking (8.83) voor het *maximaal beschikbare vermogen*  $p_{\max}$  een intrinsiek gegeven van de eenpoort  $\mathbf{N}$ , en is derhalve eveneens geldig voor een *niet-lineaire belastingsweerstand*  $R$ . Het vermogen  $p_{\max}$  wordt daadwerkelijk aan  $R$  geleverd (er is dan sprake van *aanpassing*) indien de  $u$ - $i$ -karakteristiek van  $R$  door het punt  $(u, i) = (\frac{1}{2} e_T, \frac{1}{2} e_T/R_T)$  of  $(u, i) = (\frac{1}{2} j_N/G_N, \frac{1}{2} j_N)$  in het  $u$ - $i$ -vlak gaat, afhankelijk of  $\mathbf{N}$  wordt opgevat als een spanningsdoos, dan wel een stroomdoos. (Zie hiervoor Vraagstuk 8.41, maar merk nu reeds op dat de aanpassingsvoorwaarde (8.82) voor een *lineaire* weerstand als bijzonder geval volgt.)

## SAMENVATTING

- *Lus-snede uitsluitingsbeginsel*: elke tak van een samenhangende gerichte graaf behoort òf tot een uniforme lus òf tot een uniforme snede (uniform: de samenstellende takken hebben dezelfde oriëntatie).
- *Strikt passieve niet-lineaire weerstanden* (opgenomen vermogen  $p = ui > 0$ ) stellen *bovengrenzen* aan de spanningen en stromen.
- *Minimax theorema voor potentialen* (strikt passieve niet-lineaire weerstanden en gearde batterijen): de knopen met de hoogste en de laagste potentiaal zijn juist de

batterijklemmen.

- *Maximale potentiaal eigenschap* (strikt passieve niet-lineaire weerstanden en voedingsbatterij met geaarde min-klem): geen enkele potentiaal kan de batterijspanning overschrijden.
- *Lokaal strikt passieve weerstanden* (opgenomen vermogen  $p = ui > 0$  in *instelpunt*) stellen *bovengrenzen* aan de spannings- en stroomvariaties. Voor een *signaalversterker* zijn *lokaal actieve* niet-lineaire weerstanden nodig.
- *Theorema van TELLEGEN*:  $\sum u'i'' = 0$ , waarin wordt gesommeerd over alle takken van het circuit (met gebruik van de standaard tekenconventie). De  $u$ 's en de  $i$ 's kunnen betrekking hebben op twee *verschillende* stroom-spanningsverdelingen in het circuit. Zelfs twee verschillende circuits met een gemeenschappelijke graaf zijn toegestaan.
- Het theorema van TELLEGEN is *algemeen geldig*; de KIRCHHOFF-postulaten zijn *nodige* en *voldoende* voorwaarden.
- *Wet van behoud van vermogen*: het geleverde vermogen is gelijk aan het opgenomen vermogen. De behoudswet is het onmiddellijke gevolg van het theorema van TELLEGEN, en ligt derhalve besloten in de KIRCHHOFF-postulaten.
- *Vermogensbalans*: het door de bronnen geleverde vermogen is gelijk aan het gedissipeerde vermogen in de weerstanden, plus het tempo waarin de opgeslagen elektromagnetische veldenergie in de capaciteiten en inductiviteiten verandert.
- Wegens de *algemene geldigheid* en *eenvoud* is het theorema van TELLEGEN een krachtig *bewijsvehikel*. Ter illustratie wordt bewezen dat elektrische circuits, bestaande uit niet-lineaire weerstanden met een strikt monotoon stijgende  $u$ - $i$ -karakteristiek en onafhankelijke bronnen, hoogstens één oplossing hebben.
- Als verdere toepassing van het theorema van TELLEGEN wordt bewezen dat lineaire weerstandsnetwerken zonder bestuurde bronnen voldoen aan de volgende *reciprociteitseigenschap*: verwisseling van spanningsbron en ampèremeter heeft geen invloed op de meteruitslag. Tevens wordt een korte beschrijving gegeven van een zeer efficiënte procedure ter berekening van *gevoeligheidsfactoren*.
- *Bronmanipulaties*: bij gelijkblijvend circuitgedrag kan een *spanningsbron* door een aangrenzende knoop (snede) in alle incidente (gesneden) takken worden geschoven, daarbij de oorspronkelijke positie als kortsluitak achterlatend (*V-shift*). Ook: plaats een *stroombron* over de takken waarmee een (al dan niet fictieve) lus wordt gevormd, daarbij de oorspronkelijke positie als open tak achterlatend (*I-shift*). De  $V$ - en  $I$ -shift hebben *algemene geldigheid*.
- *Substitutie beginsel*: bij gelijkblijvende spanningen en stromen kan voor een tak van een *willekeurig* circuit een spanningsbron of een stroombron (met de sterkte van de oorspronkelijke takvariabele) worden gesubstitueerd. Een noodzakelijke voorwaarde is evenwel dat er steeds *één oplossing* in het geding is.

- *Superpositie beginsel*: elke spanning/stroom van een *lineair* elektrisch circuit, bestaande uit bronnen en weerstanden, is gelijk aan de *som* van de *deelspanningen/stromen* als gevolg van elke *onafhankelijke bron apart* (de overige onafhankelijke bronnen krijgen daarbij de *nul-sterkte*). *Circuit interpretatie*: vervang een spanningsbron en een stroombron met de nul-sterkte respectievelijk door een kortsluiting of een open klemmenpaar.
- *Theorema van THEVENIN (NORTON)*: een *lineaire* resitieve bron-eeppoort is aan de klemmen equivalent met een enkele *spanningsdoos (stroomdoos)*, het *THEVENIN-(NORTON)-equivalent* geheten. De bronsterkte in het equivalent heet de *THEVENIN-spanning (NORTON-stroom)*; deze is juist gelijk aan de *open spanning*  $u_{\text{open}}$  (*kortsluitstroom*  $i_{\text{kort}}$ ) van de eenpoort. De inwendige weerstand (geleiding) van het equivalent heet de *THEVENIN-weerstand*  $R_T$  (*NORTON-geleiding*  $G_N$ ). Er geldt  $R_T = u_{\text{open}}/i_{\text{kort}}$  ( $G_N = i_{\text{kort}}/u_{\text{open}}$ ). Tevens is  $R_T$  ( $G_N$ ) de *inwendige weerstand (geleiding)* van de eenpoort, zijnde de weerstand (geleiding) die aan de klemmen van de eenpoort wordt waargenomen als daarin de *onafhankelijke bronnen* worden uitgeschakeld.
- Het THEVENIN(NORTON)-equivalent kan eenvoudig door *meting* worden verkregen; de open spanning en de kortsluitstroom zijn daarvoor voldoende gegevens.
- Een *lineaire resitieve bron-eeppoort* heet *aangepast*, indien de eenpoort is afgesloten met een lineaire *belastingsweerstand* die *gelijk* is aan de *inwendige weerstand*. In dat geval levert de eenpoort het *maximaal beschikbare vermogen* aan de belasting.

## REFERENTIES

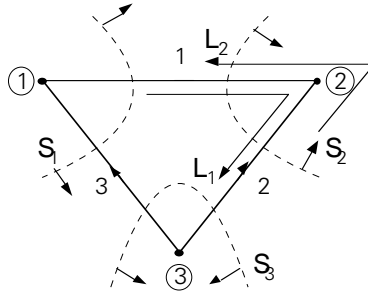
- [1] Chua, L.O., C.A. Desoer and E.S. Kuh, *Linear and Nonlinear Circuits*, McGraw-Hill, New York, 1987, Chapt. 5.
- [2] Seshu, S. and M.B. Reed, *Linear Graphs and Electrical Networks*, Addison-Wesley Co., Reading, Mass., 1961, Chapt. 5.
- [3] Balabanian, N., T.A. Bickart and S. Seshu, *Electrical Network Theory*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969, Chapt. 2.
- [4] Strang, G., *Linear Algebra and Its Applications*, Harcourt Brace Jovanovich, Inc., Orlando, Florida, third edition, 1988, Chapt. 3.
- [5] Minty, G.J., 'Monotonic Networks', Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, vol. 257, pp. 194-212, 1960.
- [6] Vandewalle, J. and L.O. Chua, 'The Colored-Branch Theorem and its Applications in Circuit Theory', IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. CAS-27, pp. 816-825, 1980.
- [7] Hasler, M. and J. Neiryneck, *Nonlinear Circuits*, Artech House, Inc. Norwood, 1986, Chapt. 3.
- [8] Fosséprez, M., *Non-linear Circuits. Qualitative Analysis of Non-linear, Non-reciprocal Circuits*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 1992, Chapt. 2.
- [9] Penfield, P., Jr., R. Spence and S. Duinker, *Tellegen's Theorem and Electrical Networks*, Research Monograph No. 58, M.I.T. Press, Cambridge, 1970, Chapt. 4.
- [10] Desoer, C.A. and E.S. Kuh, *Basic Circuit Theory*, McGraw-Hill, New York, 1969, Chapt. 18.
- [11] Tellegen, B.D.H., 'A General Network Theorem, with Applications', Philips Res. Rept., vol. 7, pp. 259-269, 1952.
- [12] Tellegen, B.D.H., 'A General Network Theorem, with Applications', Proc. Inst. Radio Engrs. Australia, vol. 14, pp. 265-270, 1955.

- [13] Penfield, P., Jr., R. Spence and S. Duinker, *Tellegen's Theorem and Electrical Networks*, loc. cit., Chapt. 2.
- [14] Chua, L.O., C.A. Desoer and E.S. Kuh, *Linear and Nonlinear Circuits*, loc. cit., Chapt. 1.
- [15] Chua, L.O., C.A. Desoer and E.S. Kuh, *Linear and Nonlinear Circuits*, loc. cit., Chapt. 12.
- [16] Desoer, C.A. and E.S. Kuh, *Basic Circuit Theory*, loc. cit., Chapt. 9.
- [17] Penfield, P., Jr., R. Spence and S. Duinker, *Tellegen's Theorem and Electrical Networks*, loc. cit., Chapt. 3-7.
- [18] Seidel, M.N., 'On the independence of Minty's painting theorem and Tellegen's theorem', *Int. Journ. of Circuit Theory and Applications*, vol. 23, pp. 257-259, 1995.
- [19] Calahan, D.A., *Computer-aided Network Design*, McGraw-Hill, Inc., New York, revised edition, 1972, Chapt. 5.
- [20] Director, S.W., *Circuit Theory. A Computational Approach*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1975, Chapt. 6.
- [21] Temes, G.C. and J.W. LaPatra, *Introduction to Circuit Synthesis and Design*, McGraw-Hill, New York, 1977, Chapt. 9.
- [22] Guillemin, E.A., *Introductory Circuit Theory*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1953, Chapt. 2.
- [23] Seshu, S. and N. Balabahan, *Linear Network Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1959, Chapt. 4.
- [24] Chua, L.O., C.A. Desoer and E.S. Kuh, *Linear and Nonlinear Circuits*, loc. cit., Chapt. 5 and 8.

## VRAAGSTUKKEN

### Lus-snede uitsluitingsbeginsel

**8.1** *Gegeven:* onderstaande gerichte graaf  $G$  met georiënteerde lussen en sneden.



*Gevraagd:* (a) ga na dat elke tak van  $G$  òf tot een uniforme lus òf tot een uniforme snede behoort. (b) Noteer de lussen en sneden respectievelijk als de kolomvectoren  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$  en  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ . (c) Laat zien dat steeds  $\mathbf{l} \perp \mathbf{s}$ . (d) Noem de ruimten die worden opgespannen door de vectoren  $\mathbf{l}$  en  $\mathbf{s}$  respectievelijk  $\mathbf{L}$  en  $\mathbf{S}$ , en ga na dat  $\dim \mathbf{L} + \dim \mathbf{S} =$  de dimensie van de ruimte die wordt opgespannen door de takken van  $G$ .

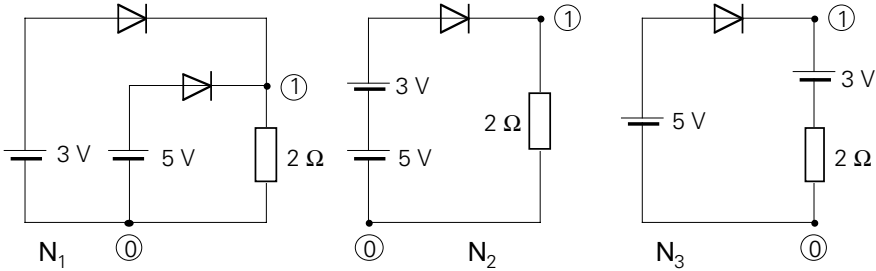
**8.2** *Gegeven:* een samenhangende gerichte graaf  $G$ . Daarvan zijn de zogenaamde *lus-tak incidentiematrix*  $\mathbf{B}$  en de *snede-tak incidentiematrix*  $\mathbf{Q}$  respectievelijk gedefinieerd als  $\text{rij}_i \mathbf{B} = \mathbf{l}_i^T$  en  $\text{rij}_j \mathbf{Q} = \mathbf{s}_j^T$ , waarin  $\mathbf{l}_i$  en  $\mathbf{s}_j$  respectievelijk de lus- en snedevectoren van  $G$  zijn.

*Gevraagd:* laat zien dat het *lus-snede uitsluitingsbeginsel* zich vertaalt als

$\mathbf{BQ}^T = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{QB}^T = \mathbf{0}$ . Verifieer een en ander met de gegevens van Vraagstuk 8.1.

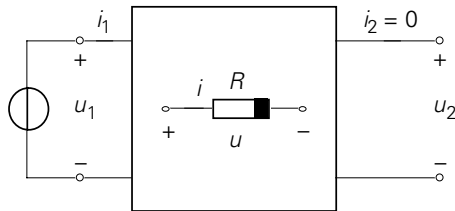
**Bovengrenzen voor spanningen**

**8.3** Gegeven: onderstaande resistieve circuits met exponentiële dioden.



*Gevraagd:* vind grenzen voor de potentiaal  $v_1$ . Welke circuiteigenschappen zijn daarbij gebruikt?

**8.4** Gegeven: een elektrisch circuit, bestaande uit niet-lineaire strikt passieve tweeklemmen weerstanden, is aangesloten op de spanning  $u_1$ . Tussen twee willekeurige knopen van het circuit staat de spanning  $u_2$  (zie de figuur).



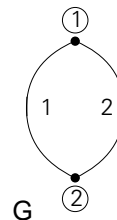
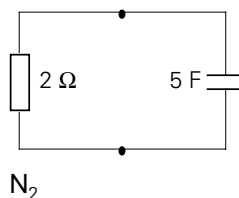
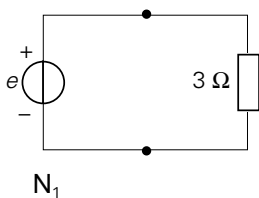
*Gevraagd:* (a) laat zien dat  $|u_2| \leq |u_1|$ . Welke begrenzing legt dit op aan de lokatie van de spanningsoverdracht karakteristiek (d.i. de  $u_2$  versus  $u_1$  karakteristiek) in het  $u_1$ - $u_2$ -vlak? (b) Laat zien dat bij toepassing van lokaal strikt passieve weerstanden voor de differentiaal-spanningsoverdrachtverhouding  $H = d\tilde{u}_2 / du_1$  geldt  $|H| \leq 1$  ( $u_2 = \tilde{u}(u_1)$  is de spanningsoverdrachtrelatie; zie Hoofdstuk 6). (c) Wat verandert er, indien de samenstellende niet-lineaire weerstanden *niet* strikt passief zijn, maar wèl *lokaal* strikt passief? (d) En als de weerstanden weliswaar strikt passief zijn, maar *lokaal* actief?

**Theorema van TELLEGEN**

**8.5** Gegeven: de circuit-matrices  $\mathbf{B}$  en  $\mathbf{Q}$  zoals die in Vraagstuk 8.2 zijn ingevoerd. *Gevraagd:* formuleer de lus KVL's en snede KCL's in termen van  $\mathbf{B}$  en  $\mathbf{Q}$ .

**8.6** Bewijs het *theorema van TELLEGEN*, uitgaande van de in Vraagstuk 8.2 en 8.5 verkregen resultaten, te weten  $\mathbf{BQ}^T = \mathbf{0}$  (*lus-snede uitsluitingsbeginsel*),  $\mathbf{Bu} = \mathbf{0}$  (*lus KVL*) en  $\mathbf{Qi} = \mathbf{0}$  (*snede KCL*).

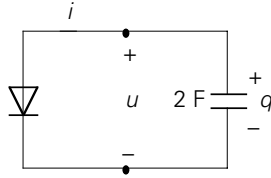
- 8.7** *Gegeven:* in de graaf van Vraagstuk 8.1 is  $i_1 = 1$  A,  $u_1 = 1$  V,  $u_2 = 2$  V.  
*Gevraagd:* geef de takstroomvector  $\mathbf{i}$  en de takspanningsvector  $\mathbf{u}$  die respectievelijk aan de KCL en de KVL voldoen, en laat zien dat  $\mathbf{i}^T \mathbf{u} = 0$ .
- 8.8** *Gegeven:* een samenhangende gerichte graaf  $\mathbf{G}$ , waarvoor het theorema van TELLEGEN geldt.  
*Gevraagd:* (a) bewijs dat de takstromen vanzelf aan de KCL's voldoen, indien de takspanningen voldoen aan de KVL's. (b) Bewijs dat de takspanningen vanzelf aan de KVL's voldoen, indien de takstromen voldoen aan de KCL's. (Aanwijzing: voor het bewijs van (a): ga uit van  $\mathbf{u}^T \mathbf{i}'' = 0$  en  $\mathbf{u}' = \mathbf{A}^T \mathbf{v}'$  (b): neem alle takstromen van  $\mathbf{G}$  gelijk aan nul, behalve de takstromen die deel uitmaken van een geselecteerde lus. Laat deze stroomverdeling vervolgens voldoen aan de knoop KCL's.)
- 8.9** *Gevraagd:* (a) breng het theorema van TELLEGEN onder woorden. (b) Zijn meer-klemmen componenten toegelaten? Waarom? (c) Mogen die meer-klemmen componenten tijd-variant zijn? Niet-lineair? Waarom? (d) Zijn bronnen met quasi-periodieke signalen toegelaten? Waarom?
- 8.10** *Gegeven:* een KIRCHHOFF-graaf met  $b$  takken. De bij elkaar passende takspanningen en -stromen zijn respectievelijk  $u_k = u_k(t)$  en  $i_k = i_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, b$ ).  
*Gevraagd:* bewijs dat  $\sum_{k=1}^b u_k' (di_k''/dt) = 0$  en  $\sum_{k=1}^b (du_k'/dt) i_k'' = 0 \quad \forall t$ .
- 8.11** *Gegeven:* een niet-lineair dynamisch circuit  $\mathbf{N}$ . Laat de spanningen en stromen in  $\mathbf{N}$  alle bestaan uit een constant deel en een daarbij opgeteld (niet noodzakelijk klein) tijd-afhankelijk deel. Dus  $i = I + i_s$  en  $u = E + u_s$ , met  $i_s = i_s(t)$  en  $u_s = u_s(t)$ .  
*Gevraagd:* bewijs dat  $\sum_{\text{alle takken}} EI = 0$  en  $\sum_{\text{alle takken}} u_s i_s = 0 \quad \forall t$ .
- 8.12** *Gegeven:* onderstaande circuits hebben de KIRCHHOFF-graaf  $\mathbf{G}$  gemeenschappelijk. Verder is  $e = 6 \cos(5t)$  volt ( $\mathbf{N}_1$ ),  $u_2(0) = 4$  volt ( $\mathbf{N}_2$ ).



- Gevraagd:* (a) geef de oplossingen van de netwerkproblemen. (b) Verifieer het theorema van TELLEGEN door daarin de spanningen van  $\mathbf{N}_1$  en de stromen van  $\mathbf{N}_2$  te substitueren. (c) Neem de spanningen van  $\mathbf{N}_1$  op  $t = 0$  en de stromen van  $\mathbf{N}_2$  op  $t = 10$  s, en verifieer het theorema van TELLEGEN

andermaal.

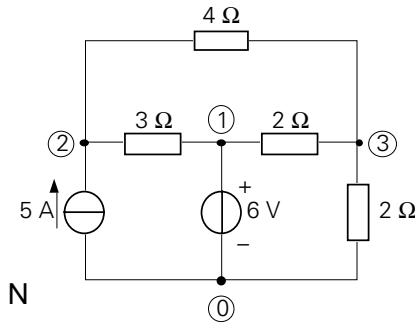
**8.13** Gegeven: in onderstaand niet-lineair dynamisch circuit is  $q(0) > 0$ .



*Gevraagd:* (a) geef de vermogensbalans van het circuit voor  $t > 0$ . (b) Bereken dat de capaciteit zich gedurig zal ontladen. M.a.w. voor elke  $t > 0$  neemt  $q = q(t)$  af. Neem daarbij het onder (a) verkregen resultaat als uitgangspunt. (c) Bewijs tot slot dat  $q \rightarrow 0$  als  $t \rightarrow \infty$ .

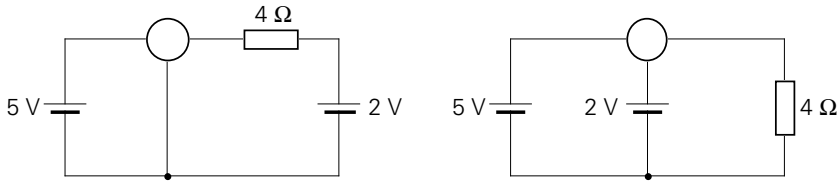
### Bron-manipulaties

**8.14** Gegeven: in het circuit  $\mathbf{N}$  vormt de spanningsbron geen spanningsdoos. Er kan daarom geen omrekening naar een equivalente stroomdoos plaatsvinden. Bij toepassing van de knooppuntmethode is men om dezelfde reden genoodzaakt de MNA-variant te gebruiken.



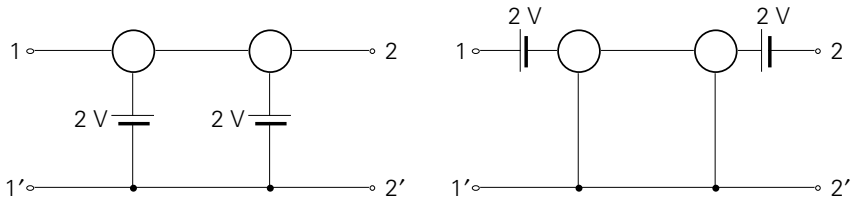
*Gevraagd:* (a) pas een V-shift toe, met als resultaat dat er spanningsdozen ontstaan. (b) Reken de spanningsdozen om naar equivalente stroomdozen. (c) Laat zien dat het aldus ontstane circuit kan worden geanalyseerd met de *ongewijzigde* knooppuntmethode. (d) Hoe worden de potentialen van  $\mathbf{N}$  ten slotte gevonden (geen berekening)?

**8.15** Gegeven: onderstaande circuits bevatten een identieke drie-klemmen component.



*Gevraagd:* laat zien dat voor de drie-klemmen component alles hetzelfde is.

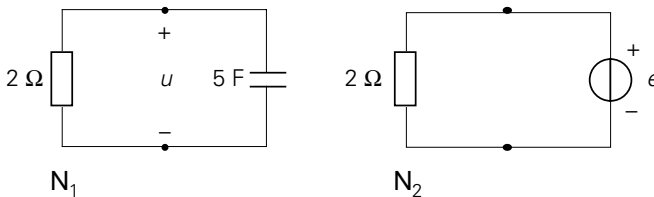
**8.16** Gegeven: onderstaande configuraties.



*Gevraagd:* laat zien dat de configuraties een klem-equivalent vormen.

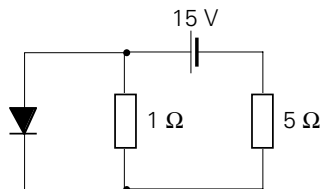
### Substitutie-beginsel

**8.17** Gegeven:  $u(0) = 3$  volt.



*Gevraagd:* (a) welke waarde heeft  $e = e(t)$  opdat  $N_1$  en  $N_2$  dezelfde oplossing hebben? (b) Geef  $N_2$  ten tijde  $t = 0$ .

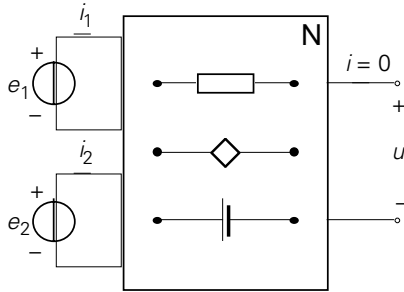
**8.18** Gegeven: onderstaand niet-lineair resistief circuit.



*Gevraagd:* (a) vervang de weerstand van  $1\ \Omega$  door een stroombron met zodanige sterkte dat alle spanningen en stromen onveranderd blijven. (b) Waarom kan voor de weerstand  $1\ \Omega$  géén spanningsbron worden gesubstitueerd?

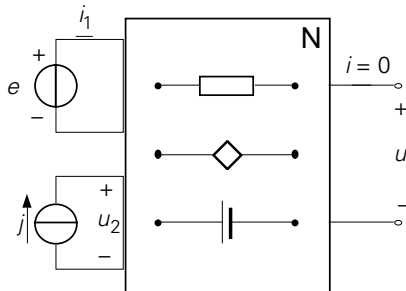
**Superpositie-beginsel**

**8.19** *Gegeven:* een elektrisch netwerk  $N$ , bestaande uit lineaire weerstanden, lineaire bestuurd bronnen en batterijen, wordt aangesloten op twee spanningsbronnen met sterkten  $e_1 = E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$  en  $e_2 = E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ . Tussen twee willekeurige knopen van  $N$  wordt de spanning  $u$  gemeten (zie de figuur).



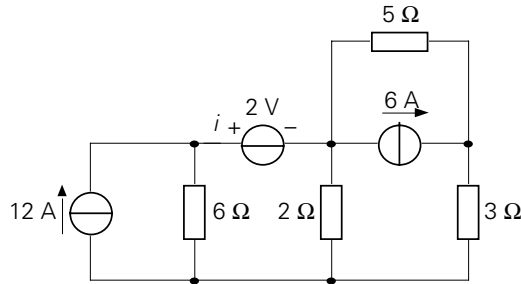
*Gevraagd:* (a) geef een algemene uitdrukking voor de spanning  $u = u(t)$ . (b) Indien  $\omega_1$  en  $\omega_2$  onderling onmeetbaar zijn, toon aan dat  $u = u(t)$  in het algemeen *quasi-periodiek* is. (c) Is het mogelijk dat  $u = u(t)$  periodiek, maar niet harmonisch is? Harmonisch? Een constante?

**8.20** *Gegeven:* een elektrisch netwerk  $N$ , bestaande uit lineaire weerstanden, lineaire bestuurd bronnen en batterijen, wordt aangesloten op een spanningsbron met sterkte  $e$  en een stroombron met sterkte  $j$ . Tussen twee willekeurige knopen van  $N$  wordt de spanning  $u$  gemeten (zie de figuur).



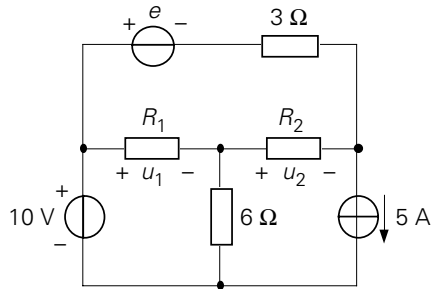
*Gevraagd:* (a) geef een algemene uitdrukking voor de spanning  $u$ . (b) De externe bronnen krijgen achtereenvolgens de volgende sterkten  $e = 1 \text{ V}, j = 1 \text{ A}$ ;  $e = 2 \text{ V}, j = 1 \text{ A}$  en  $e = 1 \text{ V}, j = 2 \text{ A}$  waarbij respectievelijk wordt gemeten  $u = 6 \text{ V}, 5 \text{ V}$  en  $3 \text{ V}$ . Hoe groot is  $u$  indien de externe bronnen de nul-sterkten krijgen?

**8.21** Gegeven: onderstaand elektrisch circuit.



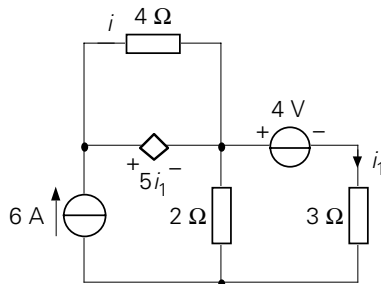
Gevraagd: bereken de stroom  $i$  m.b.v. het superpositiebeginsel.

**8.22** Gegeven: in onderstaand elektrisch circuit is  $R_1 = 6 \Omega$  en  $R_2 = 9 \Omega$ .



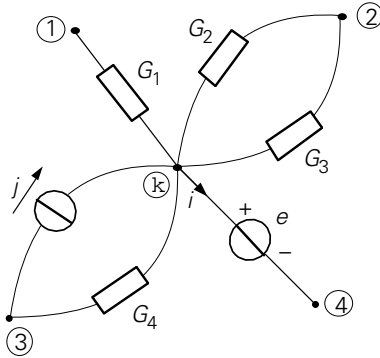
Gevraagd: (a) druk de spanningen  $u_1$  en  $u_2$  m.b.v. het superpositiebeginsel uit in de bronsterkte  $e$ . (b) Voor welke waarden van  $e$  geldt respectievelijk  $u_1 = 0$  en  $u_2 = 0$ ? (c) Voor welke waarde van  $e$  is  $u_1 = 2u_2$ ? (d) Kies  $e$  zodanig dat de in  $R_1$  en  $R_2$  gedissipeerde vermogens even groot zijn.

**8.23** Gegeven: onderstaand elektrisch circuit bevat een lineaire bestuurd bron.



Gevraagd: bereken de stroom  $i$  m.b.v. het superpositiebeginsel.

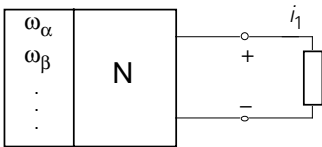
**8.24** Gegeven: onderstaand circuitfragment heeft als knooppuntvergelijking voor knoop  $\textcircled{k}$ :  $+(G_1 + G_2 + G_3 + G_4)v_k - G_1v_1 - (G_2 + G_3)v_2 - G_4v_3 + i = j$  (zie Hoofdstuk 7).



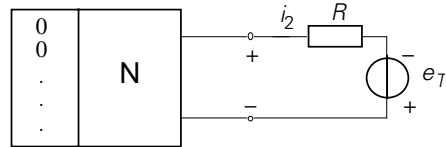
*Gevraagd:* verbind de knopen (k), ①, ② en ③ eerst met gearde spanningsbronnen waarvan de sterkten juist de potentialen van die knopen zijn. (Volgens het substitutiebeginsel heeft deze ingreep geen invloed op de stroom-spanningsverdeling.) Pas vervolgens het *superpositiebeginsel* toe, en laat zien dat de eerste vier termen in het linkerlid van de knooppuntvergelijking de van (k) af gerichte deelstromen door de geleidingen zijn, afkomstig van elke potentiaal apart.

**Theorema's van THEVENIN en NORTON**

**8.25** *Gegeven:* een lineaire resistieve bron-eenpoort **N** met onafhankelijke bronsterkten  $w_\alpha, w_\beta, \dots$  en THEVENIN-spanning  $e_T$ . In de configuratie (a) zijn alle bronnen van **N** in werking, terwijl in (b) de onafhankelijke exemplaren zijn uitgeschakeld.



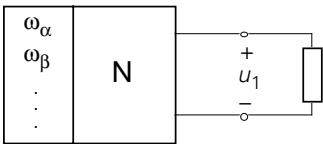
(a)



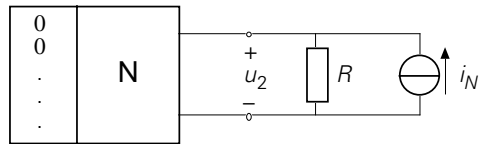
(b)

*Gevraagd:* bewijs dat  $i_2 = i_1$ . (Zie Vraagstuk 8.35 voor een toepassing.)

**8.26** *Gegeven:* als in Vraagstuk 8.25, maar nu met gegeven NORTON-stroom  $j_N$ .



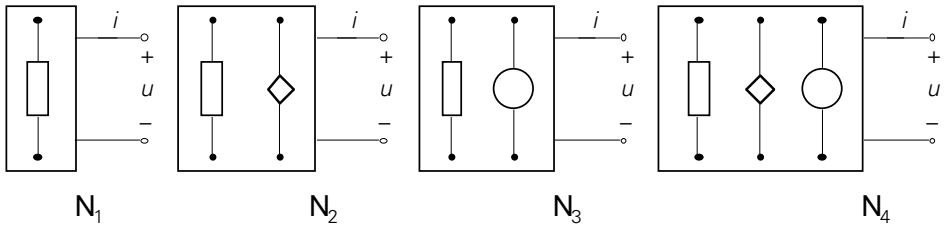
(a)



(b)

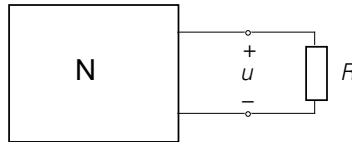
*Gevraagd:* bewijs dat  $u_2 = u_1$ .

**8.27** Gegeven: in onderstaand lineaire resistieve eenpoorten zijn de weerstanden steeds passief.



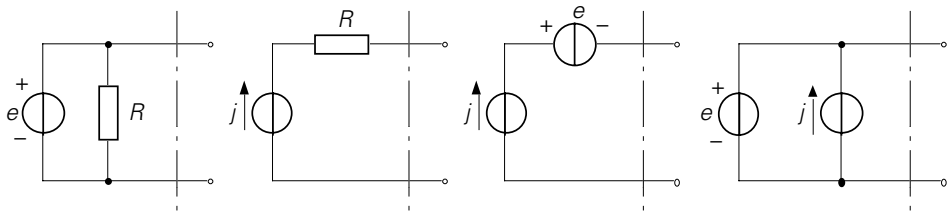
Gevraagd: geef de algemene vorm van de  $u$ - $i$ -relaties.

**8.28** Gegeven: de lineaire resistieve bron-eenpoort  $N$ . Bij  $R = 3 \Omega$  en  $R = 8 \Omega$  wordt respectievelijk gemeten  $u = -3 \text{ V}$  en  $u = -4 \text{ V}$ .



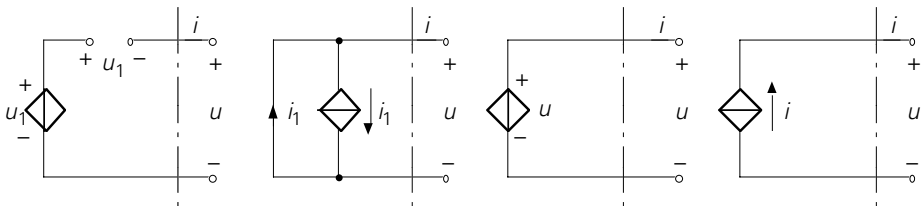
Gevraagd: geef het THEVENIN- en NORTON-equivalent van  $N$ .

**8.29** Gegeven: onderstaande eenpoorten.



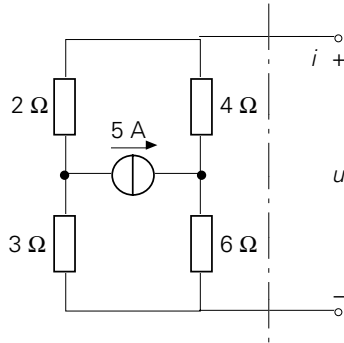
Gevraagd: geef steeds het THEVENIN- en/of NORTON-equivalent.

**8.30** Gegeven: onderstaande eenpoorten.



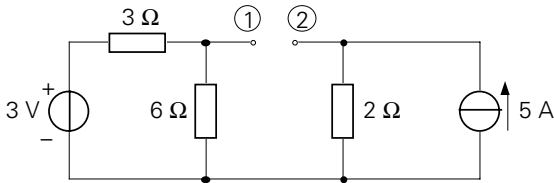
Gevraagd: laat zien dat de eenpoorten nòch een THEVENIN-, nòch een NORTON-equivalent hebben. Hoe valt dit te rijmen met de theorie?

**8.31** Gegeven: onderstaande eenpoort.



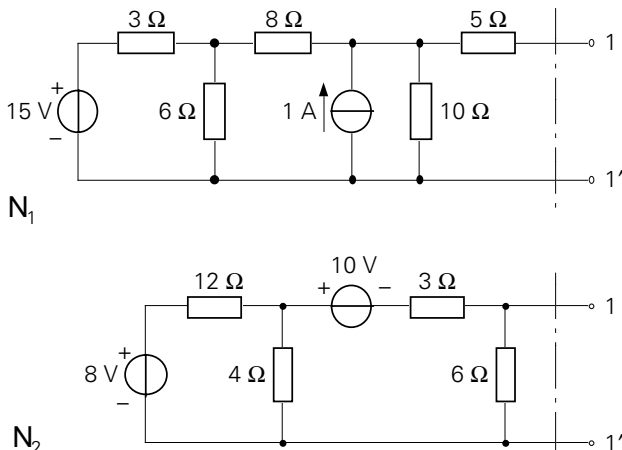
*Gevraagd:* (a) geef het THEVENIN- en NORTON-equivalent. (b) Welke vorm krijgt de  $u$ - $i$ -relatie indien de bronsterkte wordt veranderd? En als de weerstand van  $4 \Omega$  een andere positieve waarde krijgt?

**8.32** Gegeven: onderstaande configuratie.



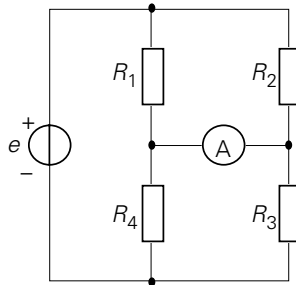
*Gevraagd:* (a) bereken de spanning  $u_{1;2}$ . (b) Bereken de stroom van ①  $\rightarrow$  ② indien ① en ② worden doorverbonden. (c) Nu wordt een weerstand van  $4 \Omega$  tussen ① en ② aangebracht. Bereken het in die weerstand gedissipeerde vermogen.

**8.33** Gegeven: onderstaande eenpoorten.

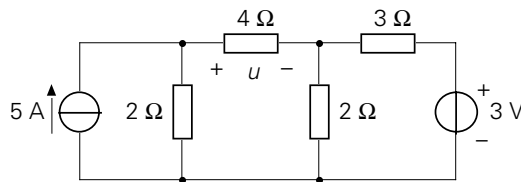


*Gevraagd:* bepaal steeds het THEVENIN- en NORTON-equivalent (gebruik daarbij het superpositiebeginsel).

**8.34** *Gevraagd:* bewijs dat de ampèremeter A de nul-uitslag toont, indien  $R_1 R_3 = R_2 R_4$ .

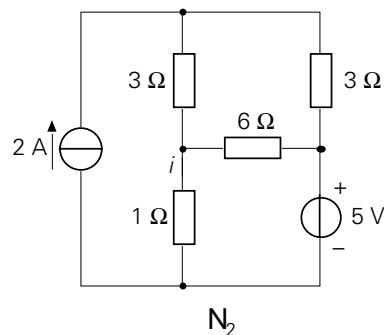
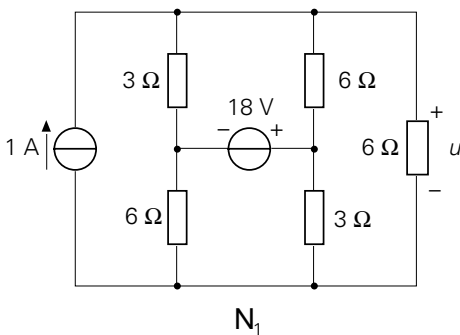


**8.35** *Gegeven:* onderstaand circuit.



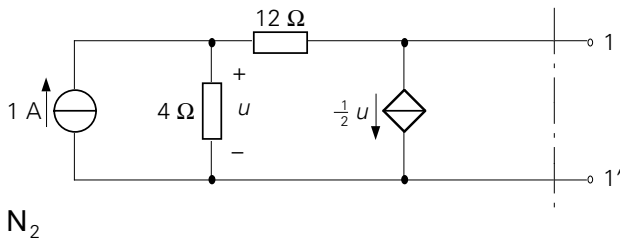
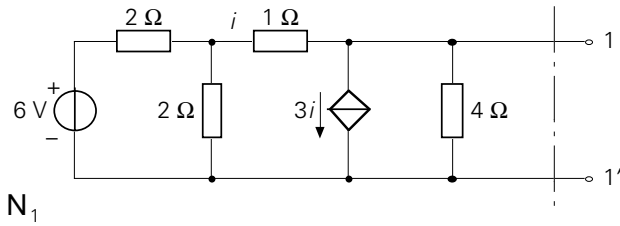
*Gevraagd:* (a) bereken de spanning  $u$  middels de inzichten van Vraagstuk 8.25. (b) Vergelijk de onder (a) gevolgde procedure met de standaardprocedure (8.73) van de tekst. (c) Bereken  $u$  m.b.v. het superpositie-beginsel.

**8.36** *Gegeven:* onderstaande circuits.



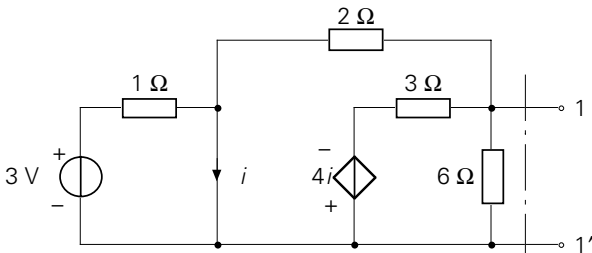
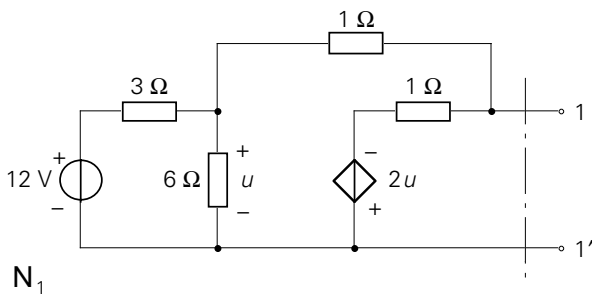
*Gevraagd:* bereken  $u$  en  $i$  middels het theorema van THEVENIN/NORTON (Aanwijzing: gebruik het superpositie-beginsel bij het opstellen van het THEVENIN/ NORTON-equivalent.)

**8.37** Gegeven: onderstaande eenpoorten.



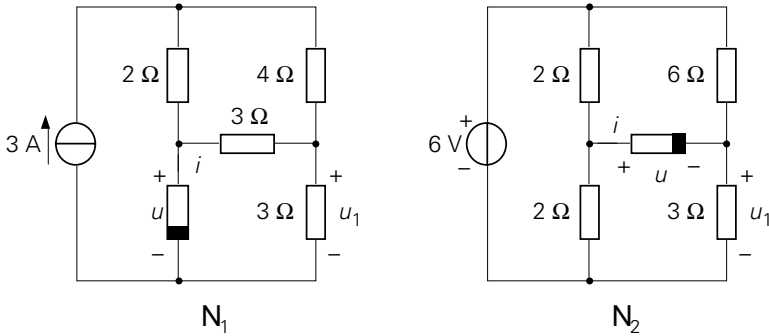
*Gevraagd:* (a) geef het THEVENIN- en NORTON-equivalent door zowel  $u_{open}$  als  $i_{kort}$  via inspectie-technieken te berekenen. (b) Hoe kan de inwendige weerstand op een onafhankelijke manier worden berekend? (c) Hoe verandert de THEVENIN-spanning als de sterkte van de onafhankelijke bron wordt  $3 \cos(5t)$  V ( $N_1$ ),  $4 \cos(3t)$  A ( $N_2$ )? Verandert de inwendige weerstand? (d) Tenslotte worden de oorspronkelijke eenpoorten achtereenvolgens elk afgesloten met een weerstand van  $1 \Omega$  en  $2 \Omega$ . Bereken steeds het in die weerstanden gedissipeerde vermogen.

**8.38** Gegeven: onderstaande eenpoorten.



*Gevraagd:* het THEVENIN- en NORTON-equivalent.

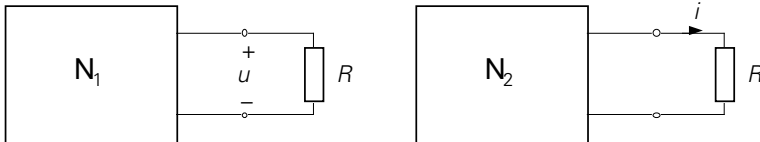
- 8.39** *Gegeven:* onderstaande niet-lineaire resistieve circuits. De  $u$ - $i$ -relatie van de niet-lineaire weerstand is  $i = \tilde{i}(u) \equiv \frac{1}{4}u^{2/3}$  ( $\mathbf{N}_1$ ),  $i = \tilde{i}(u) \equiv 2u^{3/2}$  als  $u \geq 0$  en  $\tilde{i}(u) \equiv 0$  als  $u < 0$  ( $\mathbf{N}_2$ ).



*Gevraagd:* bereken  $u$  en  $u_1$ . (Aanwijzing: bereken eerst  $i$  en/of  $u$  middels het theorema van THEVENIN/NORTON, en pas ter berekening van  $u_1$  vervolgens het substitutie-beginsel toe.)

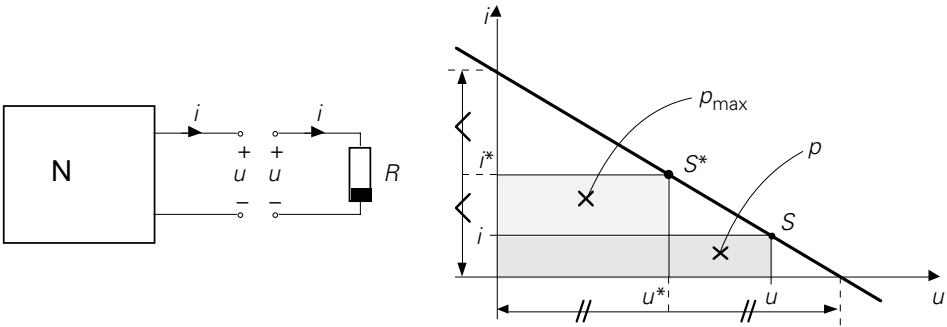
### Vermogensaanpassing

- 8.40** *Gegeven:* de lineaire resistieve bron-eenpoorten  $\mathbf{N}_1$  en  $\mathbf{N}_2$ . Bij  $R = 3 \Omega$  en  $R = 8 \Omega$  wordt respectievelijk gemeten  $u = -3 \text{ V}$  en  $u = -4 \text{ V}$  ( $\mathbf{N}_1$ ), terwijl bij  $R = 10 \Omega$  en  $R = 30 \Omega$  respectievelijk  $i = 2 \text{ A}$  en  $i = 1 \text{ A}$  wordt gevonden ( $\mathbf{N}_2$ ).



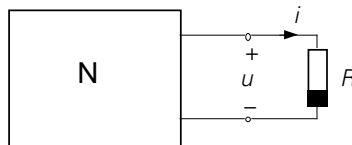
*Gevraagd:* (a) bereken het maximaal beschikbare vermogen  $p_{\max}$  van de eenpoorten. (b) Hoe groot moet  $R$  worden gekozen opdat dit vermogen daadwerkelijk wordt geleverd?

**8.41** *Gegeven:* de lineaire, resistieve bron-eenpoort  $\mathbf{N}$  kan middels het theorema van THEVENIN (NORTON) aan de klemmen worden opgevat als een spannings- (stroom)doos met open spanning  $e_T$  (kortsluitstroom  $j_N$ ) en inwendige weerstand (geleiding)  $R_T$  ( $G_N$ ). Het door  $\mathbf{N}$  afgegeven vermogen  $p$  is steeds gelijk aan  $p = ui$  (zie de figuur).



*Gevraagd:* (a) substitueer de affiene  $u$ - $i$ -relatie van  $\mathbf{N}$  in  $p = ui$  (het oppervlak  $p$  in de figuur) waardoor  $p$  wordt opgevat als functie van  $i$  (respectievelijk  $u$ ). Vind dat  $p = e_T i - R_T i^2$  ( $p = j_N u - G_N u^2$ ). (b) Bepaal de waarde  $i^*$  van  $i$  en  $u^*$  van  $u$  waarvoor  $p$  de maximale waarde  $p_{\max}$  bereikt. Stel daartoe  $dp/di = 0$  ( $dp/du = 0$ ) en vind  $i^* = \frac{1}{2} e_T / R_T$ ,  $u^* = \frac{1}{2} e_T$  ( $u^* = \frac{1}{2} j_N / G_N$ ,  $i^* = \frac{1}{2} j_N$ ). (c) Bepaal vervolgens  $p_{\max}$  via  $p_{\max} = u^* i^*$  (het oppervlak  $p_{\max}$  in de figuur), en vind  $p_{\max} = \frac{1}{4} e_T^2 / R_T$  ( $p_{\max} = \frac{1}{4} j_N^2 / G_N$ ). (d) Nu wordt  $\mathbf{N}$  aangesloten op een niet-lineaire belastingsweerstand  $R$ . Laat zien dat er vermogensaanpassing van  $\mathbf{N}$  op  $R$  wordt verkregen (d.w.z. dat het opgenomen vermogen door  $R$  juist gelijk is aan  $p_{\max}$ ) indien de  $u$ - $i$ -karakteristiek van  $R$  door het punt  $S^* = (u^*, i^*)$  in het  $u$ - $i$ -vlak gaat (zie opnieuw de figuur). (e) Laat tot slot zien dat de aanpassingsvoorwaarde voor een lineaire belastingsweerstand  $R$  luidt  $R = R_T$  ( $G = R^{-1} = G_N$ ).

**8.42** *Gegeven:* bij een lineaire resistieve bron-eenpoort  $\mathbf{N}$  wordt gemeten  $u_{\text{open}} = 4 \text{ V}$  en  $i_{\text{kort}} = 2 \text{ A}$ .  $\mathbf{N}$  wordt aangesloten op een niet-lineaire belastingsweerstand  $R$  met  $u$ - $i$ -relatie  $i = \tilde{i}(u) \equiv Au + Bu^3$ .



*Gevraagd:* geef de voorwaarde(n) waaraan de coëfficiënten  $A$  en  $B$  moeten voldoen opdat  $\mathbf{N}$  het maximaal beschikbare vermogen aan  $R$  afgeeft.

## ANTWOORDEN

- 8.1** (b)  $\mathbf{l}_1 = [1 \ -1 \ 1]^T$ ,  $\mathbf{l}_2 = -\mathbf{l}_1$ ,  $\mathbf{s}_1 = [1 \ 0 \ -1]^T$ ,  $\mathbf{s}_2 = [1 \ 1 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{s}_3 = +\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2$   
 (c)  $\mathbf{l}_i^T \mathbf{s}_j = 0$  ( $i = 1, 2; j = 1, 2, 3$ )  
 (d)  $\dim \mathbf{L} = b - (n - 1) = 1$ ,  $\dim \mathbf{S} = (n - 1) = 2 \Rightarrow \dim \mathbf{L} + \dim \mathbf{S} = \dim \mathbb{R}^3$ .

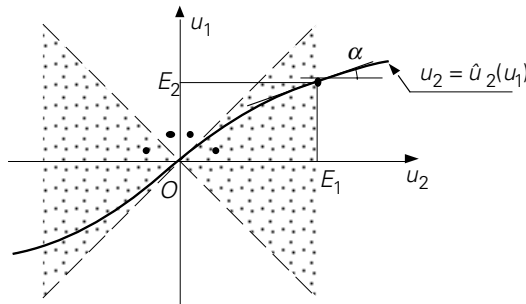
**8.2** Met de gegevens van Vraagstuk 8.1:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{BQ}^T = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{QB}^T = \mathbf{0}.$$

- 8.3**  $3 \leq v_1 \leq 5$  ( $\mathbf{N}_1$ ),  $0 \leq v_1 \leq 8$  ( $\mathbf{N}_2$ ),  $-3 \leq v_1 \leq 5$  ( $\mathbf{N}_3$ ). Circuit met strikt passieve weerstanden en onafhankelijke bronnen (batterijen). Gearde batterijen: min-max theorema (8.16) ( $\mathbf{N}_1$  en  $\mathbf{N}_3$ ); bovengrens voor spanningen (8.15) of maximale potentiaal eigenschap (8.17) ( $\mathbf{N}_2$ ).

- 8.4** (a) Op grond van (8.15):  $|u_2| \leq |u_1| \Rightarrow$  de grafiek van  $u_2 = \tilde{u}_2(u_1)$  ligt in de aangegeven gebieden van het  $u_1$ - $u_2$ -vlak.

(b) Stel  $u_1 = E_1 + du_1 \Rightarrow u_2 = E_2 + du_2$  met  $du_2 = (d\tilde{u}_2/du_1)du_1$ , en splits circuit op in instel-circuit en differentiaal-circuit. In het differentiaal-circuit zijn alle  $R$ 's vervangen door exemplaren die het instelpunt van de oorspronkelijke  $R$ 's als oorsprong hebben  $\Rightarrow$  de  $R$ 's in het differentiaal-circuit zijn strikt passief! Pas vervolgens (8.15) toe op differentiaal-circuit  $\Rightarrow |du_2| \leq |du_1| \Rightarrow |d\tilde{u}_2/du_1| = |\tan \alpha| = |H| \leq 1$  (zie figuur). (c) De ongelijkheid in (a) voor de totaalspanningen is niet langer gegarandeerd, wèl blijft  $|H| \leq 1$ .



(d) De ongelijkheid in (a) blijft gelden, terwijl nu  $|H| > 1$  kan worden (spanningsversterking)!

- 8.5**  $\mathbf{Bu} = \mathbf{0}$  (lus KVL),  $\mathbf{Qi} = \mathbf{0}$  (snede KCL).

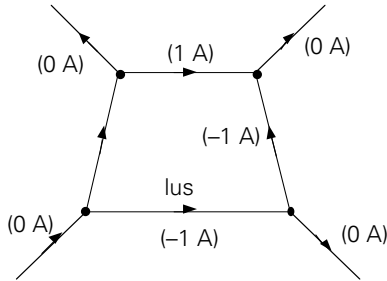
- 8.6**  $\mathbf{Bu} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} \in \mathbf{N}(\mathbf{B})$  (1)  $\mathbf{Qi} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{i} \in \mathbf{N}(\mathbf{Q})$  (2)  $\mathbf{BQ}^T = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{B} \text{ kol}_j \mathbf{Q}^T = \mathbf{0} \Rightarrow \text{rij}_j \mathbf{Q} \in \mathbf{N}(\mathbf{B})$ , maar  $\dim \mathbf{N}(\mathbf{B}) = \text{nulliteit} = b - \text{rang } \mathbf{B} =$  (met Appendix 3.B van Hoofdstuk 3)  $= b - (b - (n - 1)) = (n - 1)$  ( $n$  en  $b$  zijn respectievelijk het aantal knopen en takken van  $\mathbf{G}$ ) en  $\dim \mathbf{R}(\mathbf{Q}^T) = \text{rang } \mathbf{Q} = (n - 1) \Rightarrow$

$\dim \mathbf{R}(\mathbf{Q}^T) = \dim \mathbf{N}(\mathbf{B})$  met rij;  $\mathbf{Q} \in \mathbf{N}(\mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{R}(\mathbf{Q}^T) = \mathbf{N}(\mathbf{B})$  (3); (1) + (3)  $\Rightarrow \mathbf{u} \in \mathbf{R}(\mathbf{Q}^T)$  met (2) en  $\mathbf{N}(\mathbf{Q}) \perp \mathbf{R}(\mathbf{Q}^T) \Rightarrow \mathbf{i} \perp \mathbf{u}$  (TELLEGEN).

**8.7**  $\mathbf{i} = [1 \ -1 \ 1]^T, \mathbf{u} = [1 \ 2 \ 1]^T \Rightarrow \mathbf{i}^T \mathbf{u} = 0$ .

**8.8** (a)  $\mathbf{u}^T \mathbf{i}'' = 0$  (TELLEGEN) met  $\mathbf{u}' = \mathbf{A}^T \mathbf{v}'$  (elementaire KVL)  $\Rightarrow \mathbf{v}'^T \mathbf{A} \mathbf{i}'' = 0$  voor alle  $\mathbf{v}' \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{i}'' = \mathbf{0}$  (knoop KCL)

(b) De weergegeven stroomverdeling voldoet aan alle knoop KCL's! Met  $\sum_k u'_k i''_k = 0$  (TELLEGEN)  $\Rightarrow \sum_m \pm u'_k = 0$ , waarin  $m$  loopt over alle takken van de geselecteerde lus (lus KVL).



**8.9** (a) De takstroomvectoren die voldoen aan de KCL en de takspanningsvectoren die voldoen aan de KVL zijn orthogonaal. Anders: het produkt van takspanningen en bijpassende takstromen is, gesommeerd over alle takken, op elk tijdstip gelijk aan nul. (b) De  $N$ -klemmencomponent kan via  $(N - 1)$  takken worden gerepresenteerd. Het theorema van TELLEGEN heeft niets van doen met de  $(N - 1)$  (al dan niet gekoppelde)  $u$ - $i$ -relaties van die  $(N - 1)$  takken. (c) en (d): elke  $u$ - $i$ -relatie is toegestaan.

**8.10** In een KIRCHHOFF-graaf voldoen de  $u$ 's en de  $i$ 's aan de KIRCHHOFF-wetten.  
 KCL:  $\sum \pm i(t) = 0 \forall t \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum \pm i(t) = \sum \pm \frac{di(t)}{dt} = 0$  (1)  
 KVL:  $\sum \pm u(t) = 0 \forall t$  (2); (1) en (2)  $\Rightarrow$  TELLEGEN's theorema.

**8.11** Splits het circuit op in een instel- en een signaal-circuit. In het instel-circuit zijn alle  $C$ 's en  $L$ 's respectievelijk vervangen door open klemmen en kortsluitingen, terwijl in het signaal-circuit alle niet-lineaire karakteristieken zijn vervangen door exemplaren die het instelpunt van de oorspronkelijke karakteristieken als oorsprong hebben. Voor zowel het instel- als het signaal-circuit geldt TELLEGEN's theorema  $\Rightarrow \sum_{\text{alle takken}} EI = 0, \sum_{\text{alle takken}} u_s(t) i_s(t) = 0 \forall t$ .

**8.12** (a)  $u_1 = 6 \cos(5t), i_1 = -2 \cos(5t) \text{ A}, u_2 = 6 \cos(5t) \text{ V}, i_2 = 2 \cos(5t) \text{ A}$  ( $\mathbf{N}_1$ )  
 $u_1 = 4 \exp(-t/10) \text{ V}, i_1 = 2 \exp(-t/10) \text{ A}, u_2 = 4 \exp(-t/10) \text{ V},$   
 $i_2 = -2 \exp(-t/10) \text{ A}$  ( $\mathbf{N}_2$ )

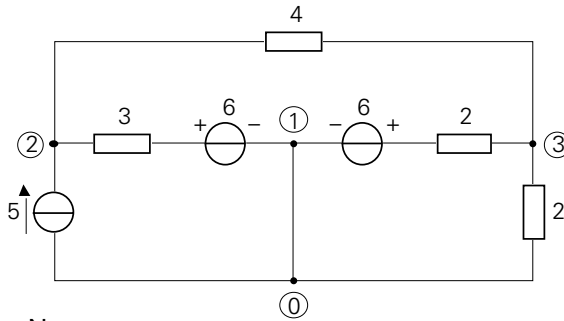
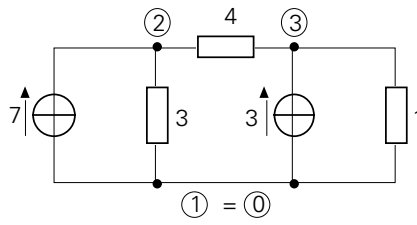
(b)  $\sum u'(t) i''(t) = 6 \cos(5t) 2 \exp(-t/10) + 6 \cos(5t) \times -2 \exp(-t/10) = 0 \forall t$

(c)  $\sum u'(0) i''(10) = 6 \times 2 \exp(-1) + 6 \times -2 \exp(-1) = 0$ .

**8.13** (a)  $0 = p_{\text{diss}} + dw_c/dt$  (b) met  $p_{\text{diss}} > 0$  (de exponentiële diode is een strikt

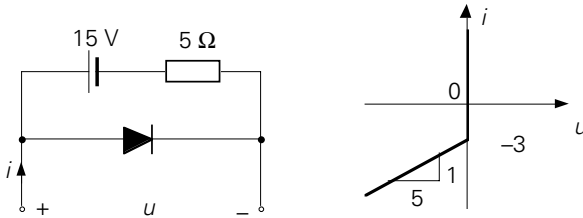
passieve niet-lineaire weerstand)  $\Rightarrow dw_e/dt < 0 \Rightarrow w_e = w_e(t) = \frac{1}{4} q(t)^2$  neemt af  $\forall t > 0 \Rightarrow q = q(t)$  neemt af  $\forall t > 0$ . (c) Stel  $q \rightarrow Q \neq 0$  voor  $t \rightarrow \infty$ , dan  $u \rightarrow \frac{1}{2} Q \neq 0$  voor  $t \rightarrow \infty$  en dus ook  $i \neq 0$  voor  $t \rightarrow \infty$  (diode-karakteristiek)  $\Rightarrow p_{\text{diss}} \neq 0$  voor  $t \rightarrow \infty$  met (a)  $\Rightarrow (dw_e/dt)_{t \rightarrow \infty} < 0 \Rightarrow q = q(t)$  blijft afnemen voor  $t \rightarrow \infty \Rightarrow$  tegenspraak.

- 8.14** (a)  $N_1$  ontstaat na de V-shift. (b)  $N_2$  ontstaat na de omrekening naar equivalente stroomdozen, terwijl bovendien  $\textcircled{1} = \textcircled{0}$  is gesteld.

 $N_1$  $N_2$ 

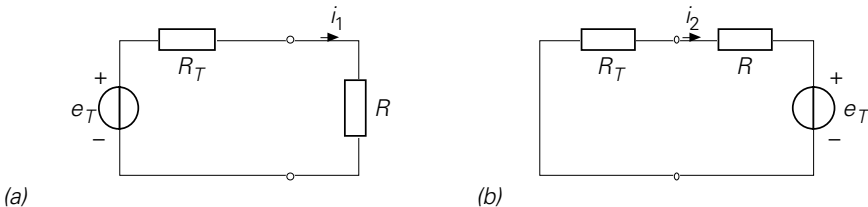
(c) In  $N_2$  komen uitsluitend spanningsbestuurde elementen voor (geen spanningsbronnen)  $\Rightarrow$  NA-methode. (d) De te berekenen potentialen  $v_2$  en  $v_3$  in  $N_2$  zijn dezelfde als in het oorspronkelijke circuit  $N$ . Bovendien: van  $N$  wordt afgelezen dat  $v_1 = 6$  volt.

- 8.15** Na toepassing van een V-shift ontstaat het éne circuit uit het andere.  
**8.16** Pas twee maal een generaliseerde V-shift toe, waarbij eerst de drie-klemmen componenten elk door een snede worden omhuld.  
**8.17** (a)  $e = 3 \exp(-t/10)$  voor  $t \geq 0$ . (b) Vervang de spanningsbron door een batterij met sterkte  $E = 3$  volt.  
**8.18** (a) Een stroombron met de nul-sterkte (open klemmenpaar). (b) Nadat de weerstand van  $1 \Omega$  uit het circuit is verwijderd, ontstaat de getoonde eenpoort met bijbehorende  $u$ - $i$ -karakteristiek.



Zou de weerstand van  $1\ \Omega$  worden vervangen door een spanningsbron met de nul-sterkte (kortsluiting), dan zouden alle  $i \geq -3$  mogelijk zijn; derhalve zouden er meerdere oplossingen in het geding zijn die eerder niet aanwezig waren.

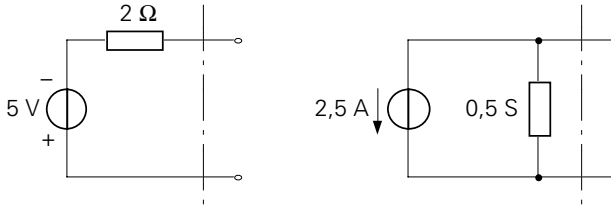
- 8.19** (a)  $u = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \sum C_i E_i$  ( $A, B$  en  $C_i$  zijn vaste coëfficiënten, terwijl  $E_i$  de interne batterijspanningen voorstellen). (b) Indien  $A \neq 0, B \neq 0$  met  $\omega_1$  en  $\omega_2$  onderling onmeetbaar  $\Rightarrow$  de samenstellende perioden van het somsignaal zijn onderling onmeetbaar  $\Rightarrow$  quasi-periodiek signaal (c) periodiek, maar niet harmonisch: indien  $\omega_1/\omega_2$  een rationaal getal is, terwijl  $A \neq 0, B \neq 0$ ; harmonisch: indien  $C_i = 0$ , terwijl  $\omega_1 \neq \omega_2$  met  $A = 0$  òf  $B = 0$ , òf  $\omega_1 = \omega_2$  met  $A \neq 0, B \neq 0$ ; een constante: indien  $A = B = 0$  (dit is bijvoorbeeld het geval indien de knopen waartussen de spanning  $u$  wordt gemeten, juist de twee klemmen van een batterij zijn).
- 8.20** (a)  $u = Ae + Bj + \sum C_i E_i$  ( $A, B$  en  $C_i$  zijn vaste coëfficiënten, terwijl  $E_i$  de interne batterijspanningen voorstellen) (b)  $u = -e - 3j + 10$ ; bij  $e = 0, j = 0 \Rightarrow u = 10$  volt.
- 8.21**  $i = i' + i'' + i''' = \frac{180}{19} - \frac{5}{19} + \frac{15}{19} = 10$  A.
- 8.22** (a)  $u_1 = u_1' + u_1'' + u_1''' = 0,2e + 4 + 3, u_2 = u_2' + u_2'' + u_2''' = 0,6e - 3 + 9$   
 (b)  $e = -35$  V ( $u_1 = 0$ ),  $e = -10$  V ( $u_2 = 0$ )  
 (c)  $e = -5$  V (d)  $e = -5 + 5\sqrt{6}$  volt of  $e = -5 - 5\sqrt{6}$  volt.
- 8.23**  $i = i' + i'' = 3 - 1 = 2$  A.
- 8.25** Vervang  $N$  in (a) en (b) door het THEVENIN-equivalent.  
 In (b) geldt  $w_\alpha = w_\beta = \dots = 0 \Rightarrow u_{\text{open}} = 0$ .



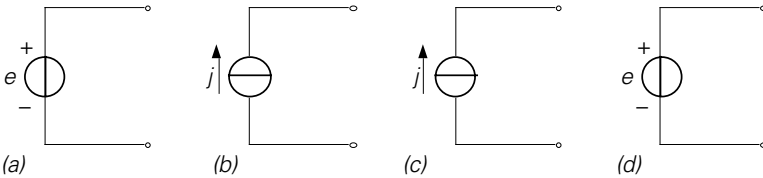
(a)  $i_1 = e_T / (R_T + R)$                       (b)  $i_2 = e_T / (R_T + R) = i_1$

- 8.26** Het duale argument van Vraagstuk 8.25.
- 8.27**  $N_1: u = -Ri$  ( $R \geq 0$ ),  $N_2: u = -Ri$  (alle  $R$ ),  $N_3: u = -Ri + e_T$  ( $R \geq 0$ , alle  $e_T$ ),  $N_4: u = -Ri + e_T$  (alle  $R$ , alle  $e_T$ ), waarin  $R$  en  $e_T$  steeds respectievelijk de inwendige weerstand en de open spanning zijn.

8.28



8.29



8.30 (a) en (b) zijn een nullator, (c) en (d) een norator; deze elementen hebben nòch een spanningsbestuurde, nòch een stroombestuurde representatie.

8.31 (a)  $e_T = 0 \text{ V}$ ,  $R_T = 10/3 \Omega$ ;  $j_N = 0 \text{ A}$ ,  $G_N = 0,3 \text{ S}$ .

(b) Andere bronsterkte: de  $u$ - $i$ -relatie blijft  $i = -0,3u$ ; andere weerstandswaarde:  $i = -G_N u + j_N$ , met  $G_N \geq 0$ .

8.32 (a)  $-8 \text{ V}$  (b)  $-2 \text{ A}$  (c)  $4 \text{ W}$  (① en ② vormen een eenpoort met  $e_T = -8 \text{ V}$  en  $R_T = 4 \Omega$ ).

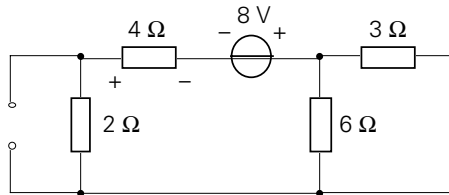
8.33  $e_T = 10 \text{ V}$ ,  $R_T = 10 \Omega$ ,  $j_N = 1 \text{ A}$  ( $\mathbf{N}_1$ ),  $e_T = -4 \text{ V}$ ,  $R_T = 3 \Omega$ ,  $j_N = -4/3 \text{ A}$  ( $\mathbf{N}_2$ ); steeds heeft klem 1 de positieve referentiepotentiaal.

8.34 Knip de A-meter uit het circuit, en stel een THEVENIN-equivalent op voor de resulterende eenpoort.

8.35 (a) Verwijder de weerstand van  $4 \Omega$ , en vind voor de resulterende eenpoort  $e_T = 8 \text{ V}$ . Met de procedure van Vraagstuk 8.24, vervolgens:  
via spanningsdeling:  $u = (4/(2 + 4 + 2)) \times 8 = 4 \text{ V}$ .

(b) standaardprocedure:  $e_T = 8 \text{ V}$ ,  $R_T = 4 \Omega \Rightarrow u = 4 \text{ V}$

(c)  $u = u' + u'' = 5 - 1 = 4 \text{ V}$ .



8.36  $R_T = 4 \Omega$ ,  $e_T = e_T' + e_T'' = 4 - 6 = -2 \text{ V}$ ,  $u = -1,2 \text{ V}$  ( $\mathbf{N}_1$ )

$R_T = 3 \Omega$ ,  $e_T = e_T' + e_T'' = 5 + 3 = 8 \text{ V}$ ,  $i = 2 \text{ A}$  ( $\mathbf{N}_2$ ).

8.37 (a)  $u_{\text{open}} = 4 \text{ V}$ ,  $i_{\text{kort}} = -3 \text{ A} \Rightarrow e_T = 4 \text{ V}$ ,  $R_T = -4/3 \Omega$ ;  $i_N = -3 \text{ A}$ ,  $G_N = -3/4 \text{ S}$  ( $\mathbf{N}_1$ )  $u_{\text{open}} = -20/3 \text{ V}$ ,  $i_{\text{kort}} = -1,25 \text{ A} \Rightarrow e_T = -20/3 \text{ V}$ ,  $R_T = 16/3 \Omega$ ;  $j_N = -1,25 \text{ A}$ ,  $G_N = 3/16 \text{ S}$  ( $\mathbf{N}_2$ ) (steeds heeft klem 1 de positieve referentie potentiaal).

(b) Geef de onafhankelijke bron de nul-sterkte en sluit het klemmenpaar 1-1'

naar keuze aan op een spannings- of stroombron met de eenheidsterkte.

(c)  $e_T = 2 \cos(5t)$  V ( $\mathbf{N}_1$ )  $e_T = -80/3 \cos(3t)$  V ( $\mathbf{N}_2$ )  $R_T$  verandert niet

(d) 144 W, 72 W ( $\mathbf{N}_1$ ) 1,11 W, 1,65 W ( $\mathbf{N}_2$ ).

**8.38**  $e_T = -1$  V,  $R_T = 3/8 \Omega$ ;  $j_N = -8/3$  A,  $G_N = 8/3$  S ( $\mathbf{N}_1$ )

$e_T = -2,4$  V,  $R_T = 0,6 \Omega$ ;  $i_N = -4$  A,  $G_N = 1,7$  S ( $\mathbf{N}_2$ ).

**8.39**  $R_T = 5 \Omega$ ,  $e_T = 13$  V,  $u = 8$  V,  $u_1 = u_1' + u_1'' = 9 + 3 = 12$  V ( $\mathbf{N}_1$ )

$R_T = 3 \Omega$ ,  $e_T = 1$  V,  $u = 0,25$  V,  $u_1 = u_1' + u_1'' = 2 + \frac{1}{2} = 2,5$  V ( $\mathbf{N}_2$ ).

**8.40** (a)  $p_{\max} = 3,125$  W ( $\mathbf{N}_1$ ) 40 W ( $\mathbf{N}_2$ ) (b)  $R = 2 \Omega$  ( $\mathbf{N}_1$ )  $10 \Omega$  ( $\mathbf{N}_2$ ).

**8.42**  $2A + 8B = 1$ .