

# ***Statistische Signaalverwerking***

prof.dr.ir. R.L. Lagendijk  
prof.dr.ir. J. Biemond

*Technische Universiteit Delft  
Faculteit Informatietechnologie en Systemen*

**CIP-gegevens Koninklijke Bibliotheek, Den Haag**

Legendijk, R.L.

Statistische signaalverwerking / R.L. Legendijk, J. Biemond. - Delft : Delft University Press. - Ill.

Uitg. in opdracht van: Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft. - 1e dr. : Delft : Delftse Uitgevers Maatschappij, 1994. – Met lit.opg., reg.

ISBN 90-407-1258-1

Trefw.: statistische signaalverwerking / detectietheorie / schattingstheorie.

**© VSSD**

Eerste druk 1994, verbeterd 1999

Uitgegeven door:

Delft University Press

Postbus 98, 2600 MG Delft

tel. 015 278 3254, fax 015 278 1661, e-mail [dup@dup.tudelft.nl](mailto:dup@dup.tudelft.nl)

In opdracht van:

Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft

Poortlandplein 6, 2628 BM Delft

tel. 015 - 2782124, fax 015 - 2787585, e-mail: [vssd@tudelft.nl](mailto:vssd@tudelft.nl)

internet: [www.oli.tudelft.nl/vssd/hlf/handleidingen.html](http://www.oli.tudelft.nl/vssd/hlf/handleidingen.html)

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

*All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photo-copying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.*

ISBN 90-407-1258-1

# Voorwoord

In de laatste decennia heeft de signaalverwerking sterke veranderingen doorgemaakt. Door de opkomst van geïntegreerde digitale signaalverwerkingsprocessoren en door de ontwikkeling van gespecialiseerde geïntegreerde circuits voor complexe signaalverwerkingsalgoritmen heeft de bewerking van elektrische signalen in real-time zich ontwikkeld van abstract idee tot dagelijkse praktijk. Algoritmen die lange tijd slechts conceptuele oplossingen van theoretische problemen waren, worden momenteel routinematig gebruikt in een groot aantal toepassingen binnen de Elektrotechniek (telecommunicatie: detectie en schatting van signalen, netwerktheorie: realisatie van algoritmen, regeltechniek: regelen en meten van systemen, en informatietheorie: transport en extractie van informatie), maar ook daar buiten. De statistische signaalverwerking concentreert zich op dat deel van de signaalverwerking waarin het gebruik van stochastische signaalmodellen en statistische kenmerken essentieel is. Bij alle te bespreken onderwerpen draait het telkens om het scheiden van informatie en verstoring, waarbij de verstoring meestal gemodelleerd wordt als een (additieve) ruiscomponent.

Dit boek is gebaseerd op het college *Statistische Signaalverwerking* zoals dat sinds 1983 gegeven wordt aan de faculteit der Elektrotechniek van de Technische Universiteit in Delft. Door de jaren heen is het studiemateriaal geëvolueerd van collegeaantekeningen, via collegediktaten tot het voor u liggende boek.

## Aanpak en inhoud

---

Dit boek behandelt de elementaire onderwerpen uit de statistische signaalverwerking, zodat na bestudering de (vrij uitgebreide) literatuur op dit gebied goed toegankelijk is. Er wordt ingegaan op detectie- en schattingstheorie, lineaire kleinste-kwadraten schatters (Wiener, Kalman schatters en adaptieve filters) en methoden voor het schatten van spectra.

In dit boek staan de methodologieën voorop en niet zozeer de toepassingen, alhoewel de behandelde stof wel zoveel mogelijk geïllustreerd wordt aan de hand van voorbeelden uit de praktijk van de signaalverwerking. De methoden die besproken worden, vormen de basis voor veel gerealiseerde systemen. Voordat een gekozen methode in de praktijk gebruikt kan worden, zal eerst een geschikte implementatie gevonden moeten worden. Dit niet onbelangrijke architectuur- en hardware-aspect wordt slechts op enkele plaatsen in het boek genoemd. De nadruk van dit boek ligt dus meer op het

ontwikkelen van methoden en algoritmen dan op de realisatie hiervan.

In hoofdstuk 1 wordt een nadere toelichting gegeven op de doelstellingen van de statistische signaalverwerking aan de hand van enkele voorbeelden. Vervolgens wordt een resumé gegeven van de belangrijkste begrippen uit de kansrekening en de theorie van de stochastische processen. Op basis hiervan wordt daarna een aantal stochastische signaalmodellen geïntroduceerd (AR, MA, ARMA), omdat deze essentieel zijn voor de ontwikkeling van Kalman filters en spectrum schatters.

In hoofdstuk 2 wordt het meest elementaire probleem uit de statistische signaalverwerking besproken, namelijk het beslissen of een signaal wel of niet aanwezig is. Bij dit detectieprobleem zijn de beslissingscriteria van groot belang. Een toepassing van de detectietheorie is te vinden in het matched filter.

Nadat een signaal gedetecteerd is, kunnen hieraan bepaalde eigenschappen gemeten worden. Bij stochastische signalen spreekt men dan over het schatten van signaalparameters, wat het onderwerp is van hoofdstuk 3. Omdat bij deze schatting altijd afwijkingen optreden ten opzichte van de werkelijke parameterwaarde, is ook bij de schattingstheorie de keuze van een foutcriterium belangrijk. Vanwege implementatieoverwegingen beperkt men zich vaak tot lineaire schatters voor parameters, dat wil zeggen, schatters die een gewogen gemiddelde van waargenomen signaalwaarden zijn. Dit onderwerp vormt de overgang naar de lineaire filtertheorie (hoofdstuk 4, 5 en 6).

In de lineaire filtertheorie probeert men vanuit een waargenomen verstoord tijdsignaal een zo goed mogelijke schatting te maken van het onverstoorde (dat wil zeggen, het originele) informatiedragende tijdsignaal. We beperken ons daarbij tot lineaire schatters die een kwadratisch foutcriterium minimaliseren. Vervolgens wordt een algemeen geldig stelsel van vergelijkingen afgeleid, waaruit de weegcoëfficiënten van de lineaire schatter bepaald dienen te worden. Onder zekere voorwaarden kan dit redelijk eenvoudig gebeuren. We spreken dan van Wiener schatters, waarvan een aantal mogelijke vormen in hoofdstuk 4 aan de orde komt.

Veelal zijn Wiener schatters rekentechnisch onaantrekkelijk. In hoofdstuk 5 komt een klasse van rekentechnisch meer aantrekkelijke schatters aan de orde, namelijk de Kalman schatters. De twee belangrijkste representanten van deze categorie schatters worden afgeleid, namelijk de Kalman 1-staps predictor en het Kalman filter. Uitbreidingen naar meer complexe situaties worden kort genoemd.

Kalman en Wiener schatters zijn gebaseerd op stochastische modellen voor de signalen en de ruiscomponenten. In sommige situaties is echter meer voorkennis over verstoring of signaal beschikbaar. We kunnen dan een lineaire schatter gebruiken in de zogenaamde ‘noise cancelling’ configuratie. Tevens blijkt dan een hoge mate van adaptiviteit aan signaal en ruis mogelijk te zijn, wat schatters met betere prestaties levert dan de Kalman of Wiener schatters. Hoofdstuk 6 beschrijft de basisvorm van het ‘noise cancelling’ concept, behandelt een efficiënte implementatie hiervan en geeft tevens een aantal toepassingen.

Zoals gezegd hebben vele lineaire schatters voorkennis nodig over de te schatten signalen, namelijk het vermogensdichtheidspectrum of de autocorrelatiefunctie. Helaas zijn beide niet zomaar beschikbaar en zullen dus uit een gemeten signaal geschat moeten worden. In hoofdstuk 7 wordt eerst een aantal klassieke spectrum-schattingmethoden besproken. Vervolgens wordt uitgebreid ingegaan op de belangrijke klasse van (AR/MA/ARMA) model-gebaseerde spectrum schatters.

## Vereiste voorkennis

---

Om aansluiting te kunnen vinden bij het materiaal dat in dit boek besproken wordt, is voorkennis vereist over de basisbegrippen rond kansrekening en stochastische processen: (vectoriële) stochastische variabele, kansdichtheidsfunctie, Gaussische stochastische variabele, verwachting, correlatie en covariantie, onafhankelijkheid, ongecorreleerdheid, orthogonaliteit, stationariteit en ergodiciteit. Hoofdstuk 1 van dit boek geeft een resumé van de vereiste voorkennis, en introduceert tevens diverse notaties. Concepten uit de lineaire algebra worden bekend verondersteld, zoals matrix-vector rekenen en het begrip orthogonaliteit. Er wordt tevens van uitgegaan dat de begrippen Fourier transformatie (voornamelijk op tijd-discrete signalen) en z-transformatie en de eigenschappen hiervan bekend en operationeel zijn.

## Dankbetuigingen

---

Het samenstellen van collegeaantekeningen, diktaten of boeken vergt interactie tussen docent en studenten. Ook aan dit boek hebben op een groot aantal plaatsen studenten hun bijdrage geleverd door het stellen van gerichte vragen, het opmerken van fouten, en soms ook door het suggereren van een wijziging in aanpak of formulering. De auteurs bedanken iedereen die op een dergelijke wijze aan verbetering van het studiemateriaal heeft meegewerkt.

Alhoewel het materiaal met uiterste zorg is samengesteld, zijn onvolkomenheden nooit uitgesloten. De auteurs stellen daarom opmerkingen en suggesties met betrekking tot de inhoud zeer op prijs.

Delft, januari 1994

Inald Lagendijk

Jan Biemond

# inhoud

VOORWOORD	5
1. INTRODUCTIE IN DE STATISTISCHE SIGNAALVERWERKING	13
1.1. Toepassingen	13
1.2. Resumé stochastische variabelen	17
1.2.1. Het kansbegrip	17
1.2.2. Gezamenlijke en conditionele kans, onafhankelijkheid	19
1.2.3. Stochastische variabelen	19
1.2.4. Vectoriële stochastische variabelen	22
1.2.5. Stochastische processen en signalen	26
1.2.6. Gemiddelde, correlatie en covariantie van stochastische signalen	28
1.2.7. Stationariteit en ergodiciteit	30
1.2.8. Autocorrelatiefunctie en vermogensdichtheidsspectrum	31
1.2.9. Witte ruis	34
1.3. AR, MA en ARMA signaalmodellen	36
1.3.1. Klassen van signaalmodellen	36
1.3.2. Autoregressief signaalmodel	38
1.3.3. Moving-average signaalmodel	39
1.3.4. Autoregressief moving-average signaalmodel	40
1.3.5. Toestandsbeschrijving van ARMA modellen	41
1.4. Samenvatting en belangrijke termen	45
Lijst van belangrijke termen	45
2. DETECTIETHEORIE	46
2.1. Inleiding	46
2.2. Het toetsen van hypothesen	47
2.3. Beslissingscriteria	50
2.3.1. Bayes criterium	51
2.3.2. MAP-criterium	55
2.3.3. Minimale foutkans criterium	55
2.3.4. Minimax criterium	57
2.3.5. Neyman-Pearson toets	59
2.3.6. Maximum likelihood	63

2.4. Meervoudige waarnemingen	63
2.5. Sequentiële detectie	66
2.6. Detectie van bekende signalen in witte ruis	68
2.6.1. Tijd-discrete geval	68
2.6.2. Tijd-continue geval	69
2.6.3. Matched filter implementatie van de ontvanger	71
2.7. Samenvatting en belangrijke termen	73
Lijst van belangrijke termen	75
Vraagstukken	75
3. SCHATTINGSTHEORIE	80
3.1. Inleiding	80
3.2. Stochastische parameters: Bayes schatters	81
3.2.1. Minimum-variantie schatter	83
3.2.2. Mediaan schatter	84
3.2.3. Maximum a posteriori schatter	84
3.3. Deterministische parameters: maximum likelihood schatters	90
3.4. Eigenschappen van schatters	92
3.5. Lineaire kleinste kwadraten schatters voor stochastische parameters	98
3.6. Samenvatting en belangrijke termen	102
Lijst van belangrijke termen	102
Vraagstukken	103
4. LINEAIRE KLEINSTE KWADRATEN SCHATTERS VOOR SIGNALLEN:	
WIENER FILTERS	105
4.1. Inleiding	105
4.2. Wiener-Hopf vergelijking	109
4.2.1. Orthogonaliteitsprincipe	109
4.2.2. Tijd-variante Wiener-Hopf vergelijking	112
4.2.3. Tijd-invariante Wiener-Hopf vergelijking	113
4.3. Niet-causale Wiener filter	115
4.4. Causale Wiener schatter met oneindig geheugen	119
4.4.1. Whitening benadering	119
4.4.2. Spectrale factorisatie	120
4.4.3. Oplossing voor de causale schatter	122
4.5. Causale Wiener schatter met eindig geheugen	125
4.6. Gegeneraliseerde Wiener filter	127
4.6.1. Matrix-vector formulering	128
4.6.2. Efficiënte implementatie met unitaire transformaties	130
4.6.3. Fourier domein filter	132
4.7. Tijd-continue Wiener schatters	134

---

4.8. Samenvatting en belangrijke termen	134
Lijst van belangrijke termen	136
Vraagstukken	136
5. KALMAN FILTERS	141
5.1. Inleiding	141
5.2. Wold-decompositie	145
5.3. Kalman 1-staps predictor	149
5.3.1. Afleiding	149
5.3.2. Eigenschappen van het innovatieproces	152
5.3.3. Kalmanversterking	154
5.3.4. Ricatti differentievergelijking	155
5.3.5. Begincondities en stabiliteit	156
5.3.6. Steady-state gedrag	157
5.4. Kalman filter	160
5.4.1. Afleiding	160
5.4.2. Kalmanversterking en Ricatti differentievergelijking	162
5.4.3. Steady-state gedrag	162
5.5. Uitbreidingen op de standaard Kalman schatters	164
5.6. Beperkingen en voorbeelden	165
5.6.1. Beperkingen	165
5.6.2. Filteren van beelden	166
5.6.3. Filteren van niet-stationaire ruis	167
5.7. Samenvatting en belangrijke termen	168
Lijst van belangrijke termen	169
Vraagstukken	169
6. ADAPTIEF FILTEREN IN DE ‘NOISE CANCELING’ CONFIGURATIE	172
6.1. Inleiding	172
6.2. Het ‘adaptive noise canceling’ principe	172
6.3. Het adaptieve filter	175
6.3.1. ‘Single-input’ adaptief filter	176
6.3.2. ‘Multiple-input’ adaptief filter	177
6.3.3. De optimale weegvector	178
6.4. Het LMS-algoritme	180
6.5. Toepassingen	182
6.6. Samenvatting en belangrijke termen	190
Lijst van belangrijke termen	192
Vraagstukken	192

7. SPECTRUM SCHATTEN	194
7.1. Inleiding	194
7.2. De ‘taper-and-transform’ methoden	198
7.2.1. Periodogram spectrum schatter	199
7.2.2. Oplossend vermogen en leakage	199
7.2.3. Variantie van de periodogram schatter	203
7.2.4. Middeling van het periodogram	207
7.2.5. Blackman-Tukey schatter	208
7.3. Autoregressieve spectrum schatter	210
7.3.1. AR modellering	210
7.3.2. Yule-Walker vergelijkingen	211
7.3.3. Schatting van de autocorrelatiecoëfficiënten	214
7.3.4. Extrapolatie van de autocorrelatiefunctie	216
7.3.5. Orde van het model	219
7.4. Moving-average en autoregressieve moving-average spectrum schatter	221
7.4.1. MA modellering	221
7.4.2. AR-oneindig benadering	223
7.4.3. Autoregressieve moving-average spectrum schatter	224
7.5. Samenvatting en belangrijke termen	226
Lijst van belangrijke termen	226
Vraagstukken	227
APPENDIX: TWEEZIJDIGE Z-TRANSFORMATIE	229
ANTWOORDEN	232
LITERATUUR	240
TREFWOORDENLIJST	242

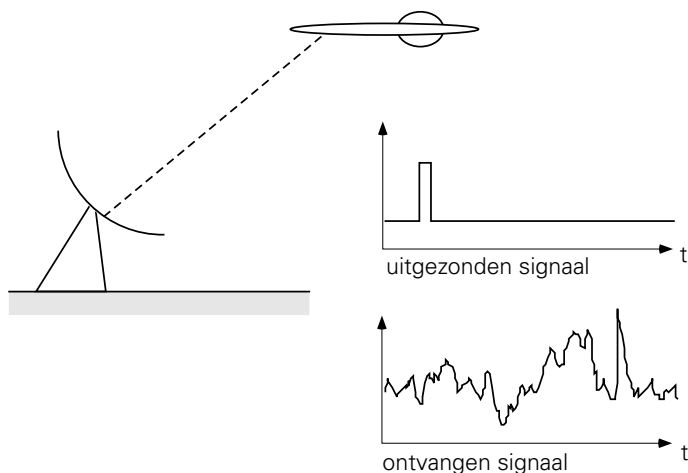
# 1

## Introductie in de statistische signaalverwerking

### 1.1. Toepassingen

Statistische signaalverwerking is dát gebied van de signaalverwerking dat zich bezighoudt met het scheiden van informatie en verstoring in een waargenomen (gemeten) signaal. Het scheiden van informatie en verstoring is relatief eenvoudig als de informatie deterministisch is of als de verstoringen bekende fenomenen zijn die nauwkeurig beschreven kunnen worden. Het wordt echter anders wanneer de signalen stochastische grootheden zijn, zoals in de praktijk meestal het geval is. De precieze beschrijving van informatie en verstoring is dan niet langer mogelijk, en zullen er statistische kenmerken zoals verwachting, variantie en correlatie gebruikt moeten worden. Tevens is het bij stochastische signalen meestal niet mogelijk de gezochte informatie exact te bepalen en moeten schattingsmethoden ingezet worden om een (gemiddeld gezien) zo goed mogelijke scheiding tussen informatie en verstoring te verkrijgen.

Een aantal voorbeelden uit de praktijk kan het nut van statistische signaalverwerking illustreren. Stel we willen met radar bepalen of zich een vliegtuig in een bepaald deel van het luchtruim bevindt (figuur 1.1). Hiertoe wordt een radarbundel op het betreffende deel van het luchtruim gericht en wordt er vervolgens bepaald of zich reflecties voordoen. Er doen zich nu twee vragen voor. In de eerste plaats moet



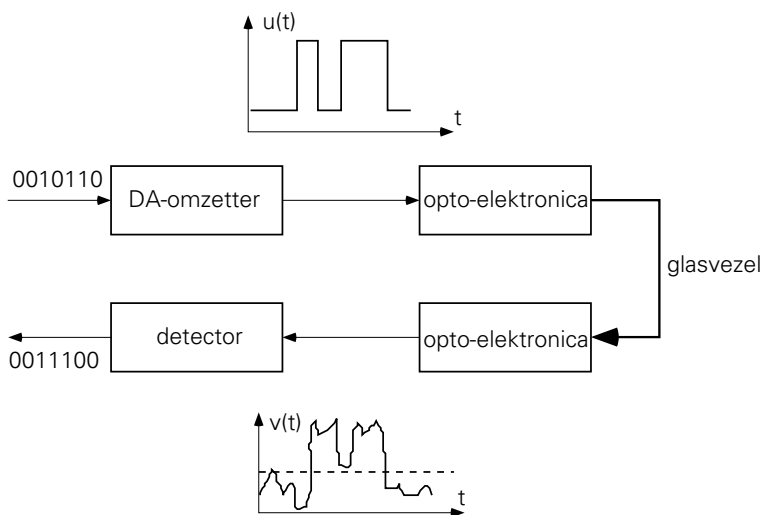
Figuur 1.1. Volgen van een bewegend object met radar.

beslist worden of er wel of geen reflectie optreedt. En als zich dan een reflectie voordoet, is vervolgens de vraag wat de eigenschappen van het betreffende object (vliegtuig?) zijn, zoals positie en snelheid. Als er niets is waartegen de radarpuls kan reflecteren, zal er in ideale omstandigheden ook inderdaad niets waargenomen worden. Indien er wel een object aanwezig is, dan ontvangen we een reflectie  $\tau$  seconden na het uitzenden van een radarpuls. De afstand tot het object is dan  $\ell = 0,5c\tau$ , waarbij  $c$  de voortplantingssnelheid van elektromagnetische golven is.

Helaas gaan bovenstaande ideale omstandigheden in de praktijk nooit op. We hebben altijd te maken met stochastische verstoringen (ruis) van het waargenomen signaal, bijvoorbeeld ten gevolge van verstoringen in het transmissiemedium (multipad-effecten, irrelevante reflecties) en ruis in de detectieapparatuur. Hierdoor is het mogelijk dat een reflectie wordt gedetecteerd terwijl er geen object aanwezig is, of dat de reflectie op een verkeerd tijdstip wordt gedetecteerd, wat tot een verkeerde bepaling van  $\ell$  leidt. Aan de andere kant is het ook mogelijk dat een reflectie gemist wordt, waardoor een vliegtuig niet gedetecteerd wordt. In beide gevallen leidt de aanwezigheid van ruis tot een verkeerde beslissing of verkeerde afstandsbe­paling.

De statistische signaalverwerking probeert nu de kans op een foute beslissing dan wel de grootte van de fout in de afstandsbe­paling te minimaliseren, zodat uit de verstoorte waarnemingen toch de gezochte informatie (wel/geen vliegtuig, welke afstand) zo goed mogelijk geschat kan worden.

Een vergelijkbare situatie doet zich voor in de digitale transmissie van signalen over glasvezels (figuur 1.2). Aan de zenzijde wordt elke  $T$  seconden ofwel een rechthoekige puls (een digitale '1') ofwel geen puls (een digitale '0') verzonden. In ideale



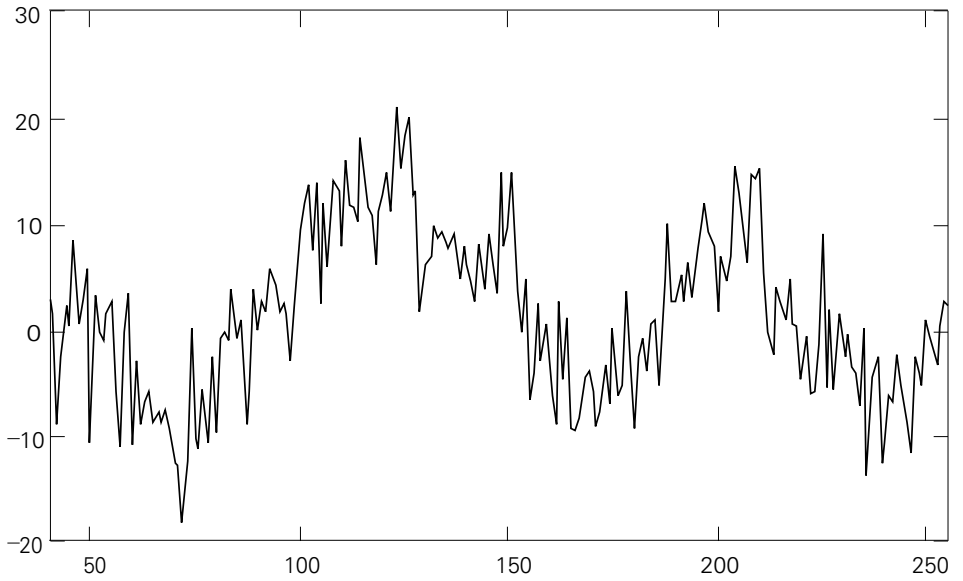
Figuur 1.2. *Optisch communicatiesysteem.*

omstandigheden kan aan het eind van de glasvezel een sensor bepalen of er wel of geen puls was uitgezonden. Helaas zal de puls tijdens de transmissie verstoord worden door bijvoorbeeld looptijdverschillen, dempingen en imperfecties in de glasvezel. Bovendien is de sensor zelf niet ruisvrij. Hierdoor is het mogelijk dat de sensor geen puls detecteert terwijl die wel aanwezig was en vice versa. Met behulp van statistische signaalverwerkingsmethoden kan een detectiesysteem ontworpen worden dat gemiddeld gezien zo min mogelijk fouten maakt, wat de betrouwbaarheid van de communicatieverbinding vergroot.

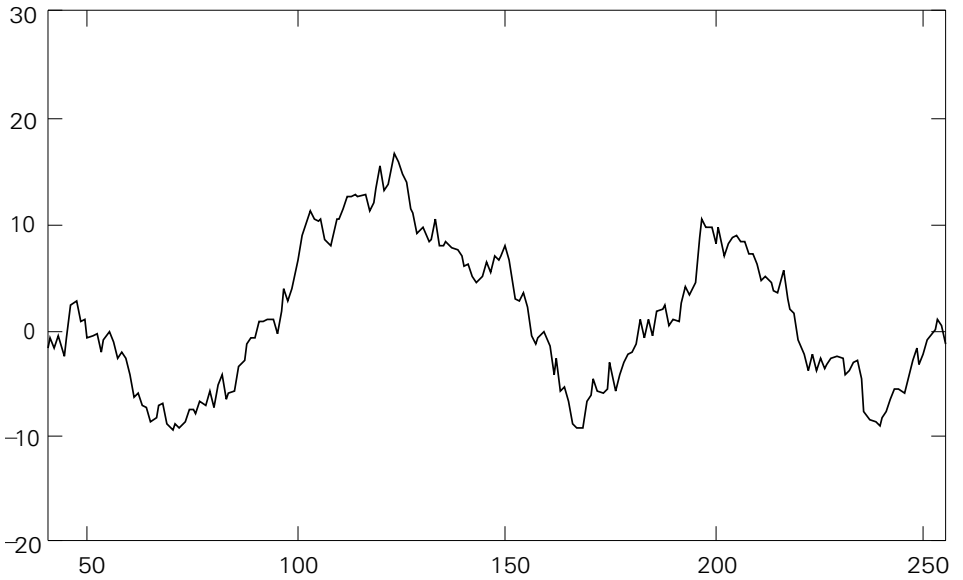
Een heel ander toepassingsgebied is het filteren van signalen. In veel situaties is een signaal dat afkomstig is van een fysisch proces imperfect door verstoringen die ontstaan tijdens het verrichten van de metingen of ten gevolge van de wijze waarop het signaal gemeten wordt. Denk hierbij bijvoorbeeld aan het meten van een EEG (elektro-encefalogram). Deze vorm van afbeelden van hersenactiviteiten vindt toepassing in een groot aantal klinische situaties. De EEG signalen zijn het resultaat van zeer kleine potentiaalverschillen in de hersenen en zijn daarom moeilijk te registreren. Allerlei versturende effecten zoals spieractiviteiten, omgevingsinvloeden en meetruis in de sensoren zorgen ervoor dat het gemeten EEG een verruiste versie is van de feitelijke hersenactiviteiten. Door middel van statistische signaalverwerkingsmethoden zoals Wiener, Kalman en adaptieve schatters is het mogelijk de versturende componenten te reduceren (zie figuur 1.3). Dit maakt vervolgens de interpretatie (bijvoorbeeld een medische diagnose) van de gemeten signalen eenvoudiger en betrouwbaarder.

Andere voorbeelden uit deze categorie van statistische signaalverwerking zijn de regeltechniek (meten/regelen/modelleren van industriële processen), de beeldverwerking (analyse en codering van beelden of beeldsequenties), de robotica (positie/oriëntatie/snelheidsmetingen), de navigatie (global position systems) en de biomedische techniek.

In elk van de genoemde toepassingen is er sprake van *waarnemingen*, *informatie-dragende signalen* en *verstoringen*. In figuur 1.4 worden deze termen in relatie tot elkaar geplaatst. Een fysisch of andersoortig proces genereert een zeker informatie-dragend signaal, dat echter niet rechtstreeks kan worden waargenomen (aangegeven met ???). De waarneming (meting) die verkregen wordt, is een verstoorde versie van het informatiedragende signaal. Door modellering van het oorspronkelijke proces en de verstoringen kunnen schattingsalgoritmen worden afgeleid die optimaal zijn volgens een bepaald criterium. Toepassen van deze algoritmen op de waarneming leidt dan tot een schatting van het gezochte signaal of informatie. In de statistische signaalverwerking wordt dus altijd uit de (verstoorde) waarnemingen informatie onttrokken via schattingsalgoritmen. Stochastische modellen voor de diverse signalen spelen hierbij een cruciale rol.

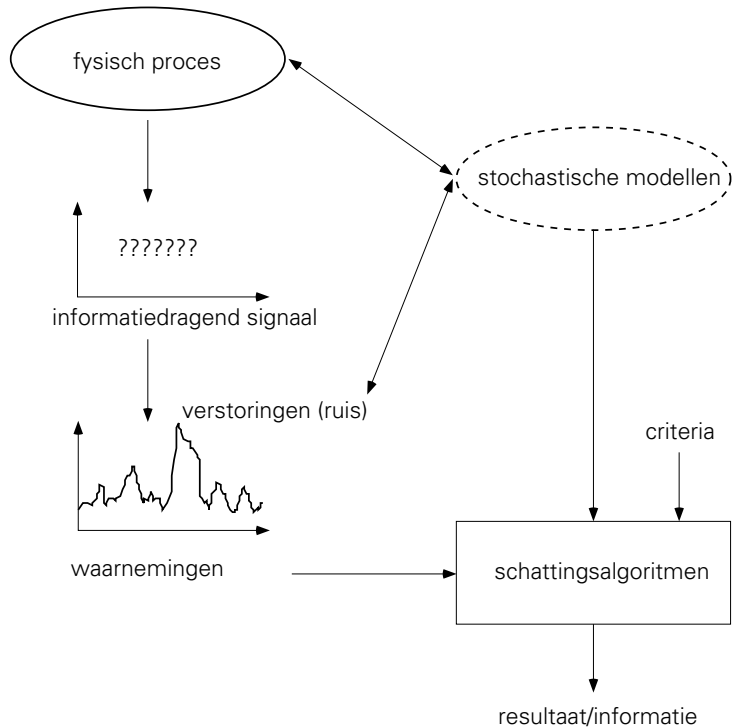


(a)



(b)

Figuur 1.3. Filteren van signaal met ruis.



Figuur 1.4. Ingrediënten van de statistische signaalverwerking.

## 1.2. Resumé stochastische variabelen

Deze paragraaf geeft een resumé van enkele van de belangrijkste begrippen uit de kansrekening en stochastische processen, waarbij de nadruk wordt gelegd op de aspecten die voor de modellering van signalen belangrijk zijn. Een meer diepgaande presentatie van het materiaal in deze paragraaf is te vinden in elk goed tekstboek over waarschijnlijkheidsrekening, bijvoorbeeld [1] en [2]. Paragraaf 1.3 bouwt verder op de hier besproken begrippen en introduceert de belangrijke klasse van autoregressieve (AR), moving-average (MA) en autoregressieve moving-average (ARMA) signaalmodellen.

Opgemerkt wordt dat deze paragraaf zich beperkt tot de behandeling van *reëel-waardige* stochastische variabelen en signalen.

### 1.2.1. Het kansbegrip

Het deel van de wiskunde dat zich bezighoudt met het bestuderen van verschijnselen die niet in detail voorspelbaar zijn, is de waarschijnlijkheids- of kansrekening. In de kansrekening wordt verondersteld dat er sprake is van een *experiment*, dat goed omschreven moet worden om dubbelzinnigheden en onduidelijkheden te vermijden.

Bovendien wordt verondersteld dat het experiment willekeurig vaak herhaald kan worden onder identieke omstandigheden. De laatste veronderstelling waarvan uitgegaan wordt, is dat men aan kan geven welke *uitkomsten* mogelijk zijn bij het uitvoeren van een experiment. De set van mogelijke uitkomsten noemt men de *uitkomstenruimte*.

Als voorafgaande veronderstellingen waar zijn, dan is het mogelijk om te spreken over de *kans* dat een experiment een bepaalde uitkomst aanneemt. Aan elke uitkomst wordt dan een getal verbonden tussen 0 en 1 dat aangeeft hoe groot de kans is dat deze uitkomst zich voordoet.

Men kan slechts over de kans van een uitkomst spreken als een experiment willekeurig vaak herhaald kan worden. Definieren we de *relatieve frequentie* of *frequentiecoëfficiënt* van een uitkomst  $A_i$  als

$$f(A_i) = \frac{N(A_i)}{N} \quad 0 \leq f(A_i) \leq 1 \quad (1.1)$$

waarbij  $N$  het aantal malen herhaling van het experiment is, en  $N(A_i)$  het aantal malen dat uitkomst  $A_i$  voorkomt, dan kan de kans op  $A_i$  gedefinieerd worden als:

$$P(A_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} f(A_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(A_i)}{N} \quad (1.2)$$

Een op deze manier gedefinieerde kans is een hypothetische grootheid, omdat oneindig veel waarnemingen gedaan zouden moeten worden. In feite levert een eindig aantal waarnemingen slechts een schatting op van de kans. Om deze reden wordt overgegaan op een axiomatische definitie.

Eerst wordt een *gebeurtenis* gedefinieerd als een verzameling van één of meer uitkomsten. De uitkomstenruimte  $S$  komt overeen met de zogenaamde zekere gebeurtenis ( $\Omega$ ) waarin alle uitkomsten opgenomen zijn. Aan elke gebeurtenis wordt nu een getal, de kans of waarschijnlijkheid, toegekend dat voldoet aan een drietal axioma's:

axioma 1: Voor elke gebeurtenis  $A_i$  geldt:  $P(A_i) \geq 0$ ,

axioma 2: Voor de zekere gebeurtenis geldt:  $P(\Omega) = 1$ ,

axioma 3: Zijn er  $N$  disjuncte gebeurtenissen  $A_1, A_2, \dots, A_N$ , dan moet gelden:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_N) \quad (1.3)$$

Uitgaande van deze axioma's kunnen verdere eigenschappen van kansen worden afgeleid, zoals

$$P(A_i^c) = 1 - P(A_i)$$

$$P(\emptyset) = 0$$

(1.4)

$$0 \leq P(A_i) \leq 1$$

$$P(A_i \cup A_j) = P(A_i) + P(A_j) - P(A_i \cap A_j)$$

### 1.2.2. Gezamenlijke en conditionele kans, onafhankelijkheid

Soms kan men bij een enkel experiment twee soorten uitkomsten onderscheiden, zodat er in feite sprake is van een combinatie van twee subexperimenten. We kunnen nu de kans op de gebeurtenis  $(A_i \cap B_j)$  opvatten als de kans op het gezamenlijk (tegelijkertijd) optreden van  $A_i$  en  $B_j$ , en wordt  $P(A_i \cap B_j) = P(A_i, B_j)$  een *gezamenlijke kans* genoemd. Uit de gezamenlijke kansen zijn de *marginale kansen*  $P(A_i)$  en  $P(B_j)$  direct te bepalen. Het omgekeerde is niet noodzakelijkerwijs waar.

Naast de marginale en gezamenlijke kans bestaat er nog een derde vorm, namelijk de *conditionele kans*. Die doet zich voor wanneer we de kans op een bepaalde gebeurtenis  $A_i$  willen weten indien een andere gebeurtenis  $B_j$  reeds is opgetreden (en dus bekend is). De conditionele kans van  $A_i$  onder de voorwaarde (of gegeven)  $B_j$  wordt gedefinieerd als:

$$P(A_i / B_j) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(B_j)} \quad \text{mits } P(B_j) > 0 \quad (1.5)$$

Een belangrijke relatie die vaak bij manipuleren van conditionele kansen gebruikt wordt, is de regel van Bayes:

$$P(A_i / B_j) = \frac{P(B_j / A_i) P(A_i)}{P(B_j)} = \frac{P(B_j / A_i) P(A_i)}{\sum_i P(A_i) P(B_j / A_i)} \quad (1.6)$$

In het algemeen is de conditionele kans  $P(A_i / B_j)$  groter of kleiner dan de marginale kans  $P(A_i)$ . Echter in het geval dat  $P(A_i / B_j) = P(A_i)$  heeft kennis over de gebeurtenis  $B_j$  blijkbaar geen invloed op de conditionele kans van  $A_i$ . We noemen de gebeurtenissen dan *stochastisch onafhankelijk*. Meestal wordt onafhankelijkheid als volgt geverifieerd:

$$P(A_i, B_j) = P(A_i) P(B_j) \Leftrightarrow \text{stochastisch onafhankelijk} \quad (1.7)$$

### 1.2.3. Stochastische variabelen

Een stochastische variabele is formeel gesproken een numerieke functie die aan elke uitkomst van een experiment een *reëel-waardig getal* koppelt. Gebeurtenissen zijn nu eenvoudig te definiëren als een deelverzameling van de reële as. Wanneer de stochastische variabele slechts waarden  $x_i$  aanneemt die individueel aanwijsbaar zijn, spreken we van een discrete stochastische variabele. Bij continue stochastische variabelen zijn de uitkomsten van het experiment niet individueel aanwijsbaar.

Het gedrag van een stochastische variabele  $X$  wordt volledig beschreven door de *cumulatieve distributiefunctie* (cdf)  $F(x)$ , gedefinieerd als:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad -\infty < x < \infty \quad (1.8)$$

Uit de definitie van een stochastische variabele en de eigenschappen van kansen volgen ondermeer de volgende eigenschappen van de cumulatieve distributiefunctie:

$$\begin{aligned} F(-\infty) &= 0 \\ F(\infty) &= 1 \\ 0 &\leq F(x) \leq 1 \\ F(a) &\leq F(b) \quad \text{voor } a < b \\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F(x + \varepsilon) &= F(x) \\ P(X > x) &= 1 - F(x) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Vanuit de cumulatieve distributieverdeling wordt de *kansdichtheidsfunctie* (pdf)  $p(x)$  van de stochastische variabele  $X$  gedefinieerd als

$$p(x) = \frac{d}{dx} F(x) \quad (1.10)$$

waarbij discontinuïteiten in  $F(x)$  delta-impulsen in  $p(x)$  opleveren. Voor discrete stochastische variabelen  $X$  wordt soms ook van de zogenaamde *kansfunctie*  $p_i$  gebruik gemaakt, gedefinieerd als:

$$p_i = P(X = x_i) \quad (1.11)$$

In praktische situaties is vaak van een stochastische variabele niet de volledige kansdichtheidsfunctie bekend, maar is slechts kennis over gemiddelden beschikbaar. Dit leidt tot een meer globale en daardoor minder precieze omschrijving van het gedrag van een stochastische variabele. Veelal worden de *verwachting*, *verwachte waarde* of *eerste moment*

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx \quad (1.12)$$

en de *variantie* of *tweede centrale moment*

$$\sigma^2 = \text{var}[X] = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx \quad (1.13)$$

gebruikt.

Wanneer een stochastische variabele  $X$  niet direct waargenomen wordt, maar via een functie daarvan, bijvoorbeeld:

$$Y = aX + b \quad (1.14)$$

dan kan uit de kansdichtheidsfunctie  $p_X(x)$  van  $X$  die van  $Y$  bepaald worden via de transformatietechniek. Voor het geval van de lineaire functie (1.14) levert dit:

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \frac{1}{|a|} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \\ E[Y] &= aE[X] + b \\ \text{var}[Y] &= a^2 \text{var}[X] \end{aligned} \quad (1.15)$$

Enkele kansdichtheidsfuncties die in dit boek gebruikt zullen worden, zijn:

- de uniforme kansdichtheidsfunctie:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b \\ E[X] &= \frac{a+b}{2} \quad \text{var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned} \quad (1.16)$$

- de Gaussische kansdichtheidsfunctie:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \\ E[X] &= m, \quad \text{var}[X] = \sigma^2 \end{aligned} \quad (1.17)$$

- de negatief-exponentiële kansdichtheidsfunctie:

$$\begin{aligned} p(x) &= \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \\ E[X] &= \lambda \quad \text{var}[X] = \lambda^2 \end{aligned} \quad (1.18)$$

- de Laplace kansdichtheidsfunctie:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{|x|}{\lambda}\right) \\ E[X] &= 0 \quad \text{var}[X] = 2\lambda^2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

- de Chi-kwadraat kansdichtheidsfunctie ( $m$  vrijheidsgraden):

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{(m/2)} \Gamma(\frac{m}{2})} x^{(m/2)-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

$$E[X] = m \quad \text{var}[X] = 2m$$

- de binomiale kansfunctie ( $N$  Bernoulli variabelen):

$$p_k = P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, N \quad (1.21)$$

$$E[X] = Np \quad \text{var}[X] = Np(1-p)$$

#### 1.2.4. *Vectoriële stochastische variabelen*

Net zoals een enkel experiment aanleiding kan geven tot twee of meer (afhankelijke of onafhankelijke) soorten gebeurtenissen, kunnen ook twee of meer verschillende stochastische variabelen iets met elkaar te maken hebben. We spreken dan van *vectoriële stochastische variabelen*. Formeel gesproken is een vectoriële stochastische variabele een numerieke functie die aan de uitkomst van een experiment een reëelwaardige *vector* koppelt. We beschouwen hier kort de beschrijvingswijze van de vectoriële stochastische variabele  $(X, Y)$ .

Het gedrag van een twee-dimensionale stochastische variabele wordt volledig vastgelegd door de *gezamenlijke cumulatieve distributiefunctie*, gedefinieerd als:

$$F(x, y) = P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (1.22)$$

Deze gezamenlijke cdf heeft dezelfde soort eigenschappen als de cdf van een enkelvoudige stochastische variabele:

$$\begin{aligned} F(\infty, \infty) &= 1 \\ F(x, -\infty) &= 0 \\ F(-\infty, y) &= 0 \\ F(x, \infty) &= F(x) \\ F(\infty, y) &= F(y) \\ 0 &\leq F(x, y) \leq 1 \\ F(x, y) &\leq F(a, b) \quad \text{voor } x < a \text{ én } y < b \\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0, \delta \downarrow 0} F(x + \varepsilon, y + \delta) &= F(x, y) \end{aligned} \quad (1.23)$$

De gezamenlijke twee-dimensionale kansdichtheidsfunctie  $p(x,y)$  is gedefinieerd als:

$$p(x,y) = \frac{d}{dx dy} F(x,y) \quad (1.24)$$

Vanuit de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie  $p(x,y)$  zijn de marginale kansdichtheidsfuncties  $p(x)$  en  $p(y)$  te bepalen, bijvoorbeeld

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) dy \quad (1.25)$$

Als er bij de stochastische variabelen  $X$  en  $Y$  sprake is van onderlinge afhankelijkheid wil dat zeggen dat kennis over  $Y$  de kansdichtheidsfunctie van  $X$  beïnvloedt, en omgekeerd. In dit verband komt naast de marginale en gezamenlijke kansdichtheid weer de derde vorm van een kansdichtheid naar voren, namelijk de conditionele kansdichtheid  $p(x/y)$ , gedefinieerd voor de stochastische variabele  $X$ , gegeven de continue stochastische variabele  $Y$  als

$$p(x/y) = \frac{p(x,y)}{p(y)} \quad (1.26)$$

en gegeven de discrete stochastische variabele  $Y$  als

$$p(x/Y = y_i) = \frac{p(x, Y = y_i)}{P(Y = y_i)} \quad (1.27)$$

Wanneer kennis over  $Y$  de kansdichtheid van  $X$  niet beïnvloedt, dat wil zeggen,  $p(x/y) = p(x)$ , dan zijn de stochastische variabelen  $X$  en  $Y$  stochastisch onafhankelijk. Uit (1.26) volgt dan de volgende regel:

$$p(x,y) = p(x)p(y) \quad \text{voor alle } x,y \Leftrightarrow \text{stochastisch onafhankelijk} \quad (1.28)$$

Slechts in dit geval kan uit de marginale kansdichtheden de gezamenlijke kansdichtheid bepaald worden.

Voor stochastische variabelen die geconditioneerd zijn op een andere stochastische variabele zijn de verwachting en variantie gedefinieerd als:

$$\begin{aligned} \mu &= E[X/Y] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x/y) dx \\ \sigma^2 &= E[(X - \mu)^2 / Y] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x/y) dx \end{aligned} \quad (1.29)$$

Ook bij stochastische variabelen speelt de regel van Bayes een belangrijke rol, die in dit geval de volgende algemene vorm aanneemt:

$$p(x / y) = \frac{p(y / x)p(x)}{p(y)} \quad (1.30)$$

Om een globale beschrijving te verkrijgen van het gezamenlijke gedrag van twee stochastische variabelen wordt de *correlatie*  $R_{xy}$ , *covariantie*  $C_{xy}$ , of *correlatiecoëfficiënt*  $\rho_{xy}$  gebruikt:

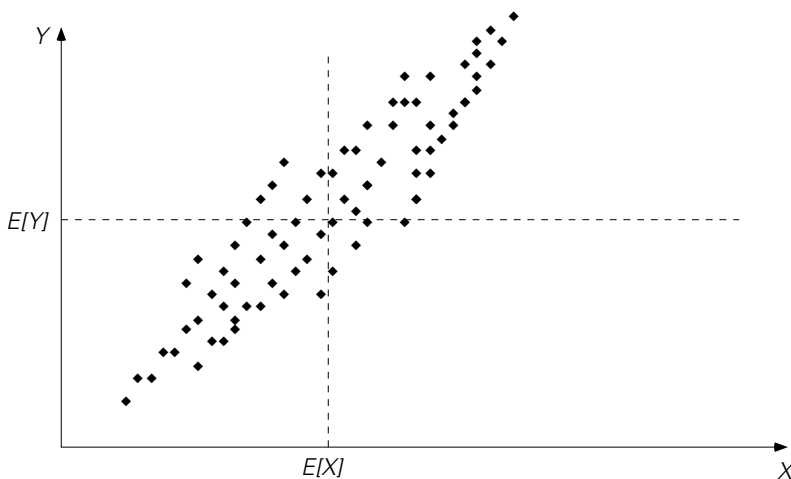
$$R_{xy} = E[XY]$$

$$C_{xy} = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = R_{xy} - E[X]E[Y] \quad (1.31)$$

$$\rho_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad |\rho_{xy}| \leq 1$$

Correlatie en covariantie zeggen iets over de onderlinge *lineaire afhankelijkheid* of *lineaire voorspelbaarheid* van de componenten van een vectoriële stochastische variabele. In figuur 1.5 is een voorbeeld gegeven van twee stochastische variabelen met een positieve covariantie. Dit is af te leiden uit de oriëntatie van de ‘wolk’ van uitkomsten: een toename in de waarde van  $X$  leidt gemiddeld gezien tot een grotere waarde van  $Y$ , en omgekeerd. Met name de lineaire afhankelijkheid (covariantie, correlatie) tussen stochastische variabelen is van cruciaal belang in de statistische signaalverwerking, zoals in latere hoofdstukken duidelijk zal worden.

Als de covariantie van  $X$  en  $Y$  gelijk is aan nul, dat wil zeggen  $C_{xy} = 0$ , dan heten  $X$  en  $Y$  *ongecorreleerd*. De stochastische variabelen vertonen dan geen *lineaire afhankelijkheid*, maar kunnen nog wel *stochastisch afhankelijk* zijn. Stochastische onafhankelijkheid impliceert echter wel ongecorreleerdheid. Als de correlatie tussen  $X$  en  $Y$  gelijk aan nul is, dat wil zeggen,  $R_{xy} = 0$ , dan zijn de stochastische variabelen



Figuur 1.5. Lineaire afhankelijkheid (covariantie) tussen de stochastische variabelen  $X$  en  $Y$ .

*orthogonaal*. Slechts indien tenminste óf  $E[X] = 0$  óf  $E[Y] = 0$  (of beide), dan zijn correlatie en covariantie identiek (zie vergelijking (1.31)), en zijn orthogonale stochastische variabelen ook ongecorrleerd.

Het werken met meer-dimensionale kansdichtheden is niet veel anders dan het één-dimensionale geval, behalve dat de complexiteit sterk toeneemt. Echter, meer-dimensionale kansdichtheden zijn vrijwel nooit volledig bekend in praktische problemen. Om deze reden zijn begrippen als verwachting, variantie en correlatie voor de beschrijving van vectoriële stochastische variabelen van groot belang. Een uitzondering op deze regel is de twee- of meer-dimensionale Gaussische kansdichtheidsfunctie, die een eenvoudige en doorzichtige structuur heeft. Voor het  $N$ -dimensionale geval is de Gaussische kansdichtheid gegeven door:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{|\mathbf{C}_{xx}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^t \mathbf{C}_{xx}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)\right)$$

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_N]^t$$

$$\mathbf{m}_x = [m_{x_1} \quad m_{x_2} \quad \dots \quad m_{x_N}]^t$$

$$\mathbf{C}_{xx} = \begin{bmatrix} C_{x_1x_1} & \dots & C_{x_1x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{x_Nx_1} & \dots & C_{x_Nx_N} \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Een matrix zoals  $\mathbf{C}_{xx}$  staat bekend als een *covariantiematrix*. Indien  $\mathbf{C}_{xx} = \mathbf{I}$ , zijn de stochastische variabelen  $x_i$  onderling ongecorrleerd. Echter in het geval van Gaussisch verdeelde stochastische variabelen zijn de variabelen nu ook stochastisch onafhankelijk, dat wil zeggen, ongecorrleerdheid impliceert onafhankelijkheid. Merk op dat deze bijzonderheid *alleen* geldt voor Gaussisch verdeelde stochastische variabelen.

Wederom kunnen via de transformatietechniek de gezamenlijke (meer-dimensionale) kansdichtheidsfunctie van een vectoriële stochastische variabele bepaald worden als deze als een functie van een andere vectoriële stochastische variabele wordt waargenomen. Een belangrijk speciaal geval is de lineaire transformatie van vectoriële stochastische variabele  $\mathbf{X}$ . Als

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b} \quad (1.33)$$

dan wordt de verwachting en covariantiematrix van  $\mathbf{Y}$  gegeven door

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_y &= \mathbf{A}\mathbf{m}_x + \mathbf{b} \\ \mathbf{C}_{yy} &= \mathbf{A}\mathbf{C}_{xx}\mathbf{A}^t\end{aligned}\tag{1.34}$$

Als  $\mathbf{X}$  een Gaussisch verdeelde vectoriële stochastische variabele is, dan is ook  $\mathbf{Y}$  Gaussisch verdeeld. Merk op dat alleen *Gaussische* kansdichtheidsfuncties via *lineaire* transformaties weer in *Gaussische* kansdichtheidsfuncties over gaan. Dit is niet langer waar voor willekeurige kansdichtheidsfuncties en/of niet-lineaire transformaties.

Bovengenoemde eigenschappen zijn onder meer de reden dat in veel praktische toepassingen de te beschouwen signalen Gaussisch verdeeld worden verondersteld. Een andere reden hiervoor is dat de centrale limietstelling aantoont dat de cumulatieve kansverdeling van een stochastische variabele die de som is van een groot aantal andere stochastische variabelen (met onbekende cumulatieve distributiefuncties), naar de cumulatieve verdeling van een Gaussische stochastische variabele tendeert. Aangezien bij het waarnemen van bijvoorbeeld elektrische signalen meestal grote hoeveelheden elektronen betrokken zijn die op additieve wijze leiden tot gemeten signalen, is het niet verwonderlijk dat de Gaussische verdeling een belangrijke plaats in neemt.

### 1.2.5. *Stochastische processen en signalen*

In de signaalverwerking worden symbolen, signalen, of meer algemeen *processen* gegenereerd, getransporteerd en verwerkt, die op een of andere wijze een ordening kennen van de individuele componenten (bijvoorbeeld ordening naar belangrijkheid of naar tijdsvolgorde). Indien deze processen of signalen niet precies voorspelbaar zijn spreken we van *stochastische processen* en *stochastische signalen*. Formeel gesproken koppelt een stochastisch proces (signaal) een reëelwaardige numerieke functie van geordende elementen (discreet of continu) aan de uitkomst van een experiment.

We spreken van stochastische *signalen* als de ordening tot stand wordt gebracht door een *tijdsaspect*. Alhoewel de klasse van de stochastische signalen een speciaal geval is van de meer algemene klasse van stochastische processen, beperken we ons in dit hoofdstuk tot de beschrijving en modellering van stochastische signalen. De reden hiervoor is dat veel concepten in de statistische signaalverwerking juist uitgaan van tijdsignalen en de hieraan gekoppelde beschrijvings- en bewerkingswijzen zoals frequentie-inhoud, spectrum, signaaltransformaties, causaliteit en filters.

Stochastische signalen worden in dit boek kortweg aangegeven met de *tijd-discrete* notatie  $x(k) = x_k$  of de *tijd-continue* notatie  $x(t)$ <sup>1</sup>. Merk op dat in deze notatie niet meer te zien is dat het hier om stochastische en niet om deterministische signalen gaat. In principe komen er vier type stochastische signalen voor, zoals aangegeven in tabel 1.1. We beperken ons tot de *amplitude-continue* stochastische signalen daar de beschrijving en bewerking van amplitude-discrete stochastische signalen te complex is om in de context van dit boek besproken te kunnen worden. Indien een amplitude-discreet signaal een voldoende groot aantal representatieniveaus heeft, is de amplitude-continue beschrijvingswijze een goede benadering.

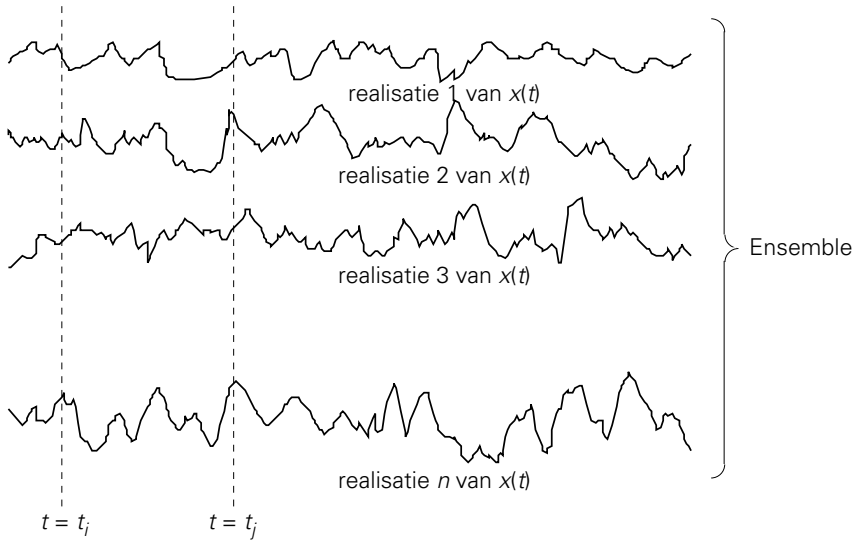
Tabel 1.1. Type stochastische signalen.

	Amplitude gedrag	
Gedrag in de tijd	tijd-discreet, amplitude-continu	tijd-discreet, amplitude-discreet
	tijd-continu, amplitude-continu	tijd-continu, amplitude-discreet

Bij stochastische signalen levert een herhaling van het onderliggende experiment (bijvoorbeeld het verrichten van een signaalmeting) uitkomsten op die tijdfuncties zijn. Deze tijdfuncties noemt men *realisaties* van het stochastische signaal. Een realisatie is dus een volledig bekende (deterministische) tijdfunctie. De verzameling van alle mogelijke realisaties heet een *ensemble van tijdfuncties*. Figuur 1.6 illustreert het principe van een dergelijk ensemble.

De waarschijnlijkheid van optreden van een realisatie (uitkomst van het experiment) wordt bepaald door de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie die het stochastische signaal beschrijft. Met andere woorden we moeten de kansdichtheidsfunctie vinden die het gezamenlijke gedrag van alle stochastische variabelen  $x_i$  voor  $t_i \in \mathbb{R}$  of  $x(k) = x_k$  voor  $k \in \mathbb{N}$  beschrijft. Wat complexiteit hiervan betreft, lijkt dit op het vinden van de kansdichtheidsfunctie van een hoog-dimensionale vectoriële stochastische variabele, waarvoor we reeds geconstateerd hadden dat meer globale beschrijvingswijze zoals verwachting, correlatie en covariantie geschikter zijn. In de volgende paragraaf bekijken we daarom enkele karakteriseringen van stochastische signalen die weliswaar minder precies maar wel veel meer bruikbaar zijn dan gezamenlijke kansdichtheidsfuncties.

<sup>1</sup> Merk op dat het notationeel consistent zou zijn om  $X(k)$  en  $X(t)$  te schrijven. Dit zou echter in volgende hoofdstukken verwarring opleveren omdat in de signaalverwerking hoofdletters veelal voor matrices en (Fourier en z-) transformaties gereserveerd zijn.



Figuur 1.6. Ensemble van realisaties van een stochastisch proces.

1.2.6. *Gemiddelde, correlatie en covariantie van stochastische signalen*  
 De (ensemble-) verwachting van een (stochastisch) signaal op tijdstip  $t_i$  (tijd-continu) of tijdstip  $k$  (tijd-discreet) wordt gedefinieerd door direct gebruik te maken van (1.12):

$$m(t_i) = E[x(t_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_i) p(x(t_i)) dx(t_i) \quad (1.35)$$

$$m(k) = E[x(k)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(k) p(x(k)) dx(k)$$

Hierbij zijn  $p(x(t_i))$  en  $p(x(k))$  de marginale kansdichtheidsfuncties van de respectievelijk tijd-continue en tijd-discrete stochastische variabelen  $x(t_i)$  en  $x(k)$ . Merk op dat de verwachting een functie van de tijd is. Evenzo is de (ensemble-) variantie gedefinieerd als:

$$\text{var}[x(t_i)] = E[(x(t_i) - m(t_i))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t_i) - m(t_i))^2 p(x(t_i)) dx(t_i) \quad (1.36)$$

$$\text{var}[x(k)] = E[(x(k) - m(k))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x(k) - m(k))^2 p(x(k)) dx(k)$$

Om inzicht te verkrijgen in de *lineaire afhankelijkheid* tussen de signaalwaarden (stochastische variabelen) op verschillende tijdstippen, wordt gebruikt gemaakt van de (ensemble-) *autocorrelatiefunctie*  $R_{xx}()$  en (ensemble-) *autocovariantiefunctie*  $C_{xx}()$ , gedefinieerd voor tijd-continue signalen als

$$R_{xx}(t_i, t_j) = E[x(t_i)x(t_j)] \quad (1.37)$$

$$C_{xx}(t_i, t_j) = E[(x(t_i) - m(t_i))(x(t_j) - m(t_j))] = R_{xx}(t_i, t_j) - m(t_i)m(t_j)$$

en voor tijd-discrete stochastische signalen als

$$R_{xx}(k, \ell) = E[x(k)x(\ell)] \quad (1.38)$$

$$C_{xx}(k, \ell) = E[(x(k) - m(k))(x(\ell) - m(\ell))] = R_{xx}(k, \ell) - m(k)m(\ell)$$

Bekijken we niet het onderlinge gedrag van het stochastische signaal op twee tijdstippen maar op meer tijdstippen, bijvoorbeeld  $N$  bemonsteringen  $x(1)$  tot en met  $x(N)$ , dan spreken we van de *autocorrelatiematrix*, gegeven door

$$\mathbf{R}_{xx} = \begin{bmatrix} R_{xx}(1,1) & \dots & R_{xx}(1,N) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{xx}(N,1) & \dots & R_{xx}(N,N) \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

Op vergelijkbare wijze is de *autocovariantiematrix* te definiëren. In het algemeen is er een grote overeenkomst tussen de beschrijvingswijze van tijd-discrete stochastische signalen en vectoriële variabelen. Bijvoorbeeld vergelijking (1.32) kan ook worden gebruikt om een tijd-discreet Gaussisch stochastisch signaal te beschrijven.

Als er geen verband tussen de signaalwaarden op de tijdstippen  $k$  en  $\ell$  (of  $t_i$  en  $t_j$  voor tijd-continue signalen) voor alle  $k$  en  $\ell$  (of  $t_i$  en  $t_j$ ), dan spreken we van een stochastisch onafhankelijk signaal:

$$p(x(1), x(2), \dots, x(N), \dots) = p(x(1))p(x(2))\dots p(x(N))\dots \quad (1.40)$$

⇕  
stochastisch onafhankelijk signaal

Analoog aan vectoriële stochastische variabelen heet een stochastisch signaal ongecorreleerd als

$$C_{xx}(k, \ell) = 0 \quad \forall k, \ell \quad (1.41)$$

en orthogonaal als

$$R_{xx}(k, \ell) = 0 \quad \forall k, \ell \quad (1.42)$$

De bovenstaande begrippen kunnen ook worden toegepast op twee *verschillende* stochastische signalen. Twee tijd-discrete stochastische signalen  $x(k)$  en  $y(k)$  zijn orthogonaal als hun *kruiscorrelatiefunctie* gelijk is aan nul:

$$R_{xy}(k, \ell) = E[x(k)y(\ell)] = 0 \quad \forall k, \ell \quad (1.43)$$

en zijn ongecorreleerd als hun *kruiscovariantiefunctie* gelijk is aan nul:

$$\begin{aligned} C_{xy}(k, \ell) &= E[(x(k) - E[x(k)])(y(\ell) - E[y(\ell)])] \\ &= R_{xy}(k, \ell) - E[x(k)]E[y(\ell)] \\ &= R_{xy}(k, \ell) - m_x(k)m_y(\ell) = 0 \quad \forall k, \ell \end{aligned} \quad (1.44)$$

Twee stochastische signalen  $x(k)$  en  $y(k)$  zijn onafhankelijk als de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie van  $x(k)$  en  $y(k)$  geschreven kan worden als het produkt van de marginale kansdichtheidsfuncties van  $x(k)$  en die van  $y(k)$ . Voor tijd-continue stochastische signalen kunnen kruiscorrelatie, kruiscovariantie en orthogonaliteit, ongecorreleerdheid en onafhankelijkheid op een zelfde manier gedefinieerd worden.

### 1.2.7. *Stationariteit en ergodiciteit*

De globale beschrijvingen van stochastische signalen aan de hand van vergelijkingen (1.35) tot (1.44) zijn alle een functie de tijd, en worden daarom *tijd-variant* genoemd. Dit betekent dat het signaal voor elk tijdstip  $k$  een andere verwachting, variantie, autocorrelatie-, covariantiefunctie en gezamenlijke kansdichtheid kan hebben. Soms blijkt echter dat deze eigenschappen van stochastische signalen niet veranderen, dat wil zeggen, het gedrag op tijdstip  $k$  (of  $t_i$ ) is niet anders dan op tijdstip  $\ell$  (of  $t_j$ ). We spreken dan van *stationariteit*.

Er zijn verschillende vormen van stationariteit. De meest uitgebreide vorm is die waarbij de eigenschappen van alle eindig-dimensionale gezamenlijke kansdichtheidsfuncties niet veranderen in de tijd. Deze vorm wordt vaak ‘strict-stationair’ of gewoon ‘stationair’ genoemd. Voor veel signaalverwerkingstoepassingen gaat deze vorm van stationariteit echter niet in voldoende mate op.

Een zwakkere vorm van stationariteit is die waarbij slechts geëist wordt dat de verwachting en de autocorrelatiefunctie niet van de tijd afhangen. We spreken dan over een *zwak-stationair* (Engels: wide-sense stationary) stochastisch signaal:

$$\begin{aligned} m(k) &= E[x(k)] = m & \forall k \\ R_{xx}(k, \ell) &= E[x(k)x(\ell)] = R_{xx}(k - \ell) & \forall k, \ell \end{aligned} \quad (1.45)$$

Veelal wordt voor zwak-stationaire signalen de autocorrelatiefunctie eenvoudigweg gedefinieerd als

$$R_{xx}(\ell) = E[x(k)x(k - \ell)] \quad (1.46)$$

waaruit nog beter blijkt dat de autocorrelatiefunctie tijd-onafhankelijk is. Uit (1.45)

volgt verder dat ook de autocovariantiefunctie tijd-onafhankelijk is. Uiteraard bestaan voor bovenstaande uitdrukkingen ook weer de tijd-continue equivalenten.

Om de uitdrukkingen in vergelijkingen (1.45) en (1.46) te evalueren, zijn een groot aantal (of eigenlijk alle) realisaties van het stochastische signaal vereist, want de verwachting  $E[\ ]$  is een operatie over het ensemble van realisaties voor een *vast tijdstip*  $k$ . Om die reden worden de tot zover besproken karakteriseringingen ook wel ensemble-gemiddelden (ensemble-verwachting, ensemble-correlatie-, ensemble-covariantiefunctie) genoemd. Als de verwachting en autocorrelatiefunctie van een stochastisch signaal gemeten moeten worden, kan men echter vaak maar uitgaan van slechts één realisatie. Er wordt dan in plaats van ensemble-gemiddelden gewerkt met het zogenaamde *tijd-gemiddelde*  $\langle x(t) \rangle_T$  en de *autotijdcorrelatiefunctie*  $\langle x(t)x(t - \tau) \rangle_T$ . We krijgen dan de volgende definities:

$$\langle x(t) \rangle_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

$$\langle x(t)x(t - \tau) \rangle_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t - \tau) dt$$
(1.47)

Als nu een *zwak-stationair* stochastisch signaal *ergodisch in het gemiddelde* is, dan is in de limiet voor  $T \rightarrow \infty$  het tijd-gemiddelde gelijk aan de ensemble-verwachting. We noemen een zwak-stationair stochastisch signaal *zwak-ergodisch* als tevens geldt dat in de limiet voor  $T \rightarrow \infty$  de autotijdcorrelatiefunctie gelijk is aan de ensemble-autocorrelatiefunctie.

In veel toepassingen van de signaalverwerking zal aangenomen moeten worden dat het signaal zwak-stationair en zwak-ergodisch is, daar er anders geen mogelijkheid bestaat voldoende informatie over de statistische kenmerken van het signaal te verzamelen. Soms laat men de aanname van zwak-stationariteit en zwak-ergodiciteit gelden voor (aansluitende of overlappende) segmenten van het signaal om zo toch aan het veranderend karakter van het signaal (bijvoorbeeld gemiddelde) te kunnen adapteren.

### 1.2.8 Autocorrelatiefunctie en vermogensdichtheidsspectrum

Omdat de klasse van zwak-stationaire en zwak-ergodische stochastische signalen zo'n belangrijke is, en de eigenschappen van deze klasse van signalen voornamelijk (naast de verwachting) door de autocorrelatiefunctie gekarakteriseerd worden, gaan we in deze paragraaf verder in op het begrip autocorrelatiefunctie, en wel speciaal die van tijd-discrete signalen (zie vergelijking (1.46)). Een aantal belangrijke eigenschappen zijn:

$$\begin{aligned}
R_{xx}(0) &= E[x(k)^2] \\
R_{xx}(\ell) &= R_{xx}(-\ell) \\
P(|x(k) - x(k - \ell)| > \varepsilon) &\leq \frac{2(R_{xx}(0) - R_{xx}(\ell))}{\varepsilon^2} \\
|R_{xx}(\ell)| &\leq R_{xx}(0) \\
\lim_{\ell \rightarrow \infty} R_{xx}(\ell) &= E[x(k)]^2
\end{aligned} \tag{1.48}$$

De kruiscorrelatiefunctie voor gezamenlijk-zwak-stationaire signalen wordt gedefinieerd als

$$R_{xy}(\ell) = E[x(k)y(k - \ell)] \tag{1.49}$$

Deze kruiscorrelatiefunctie heeft de volgende twee belangrijke eigenschappen:

$$\begin{aligned}
R_{xy}(\ell) &= R_{yx}(-\ell) \\
R_{xy}^2(\ell) &\leq R_{xx}(0)R_{yy}(0) \quad \forall \ell
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Zoals de derde eigenschappen in (1.48) aangeeft, is de autocorrelatiefunctie een maat voor de veranderlijkheid van een stochastisch signaal. Uit de deterministische signaaltheorie is bekend dat veranderlijkheid goed tot uitdrukking komt in de Fourier getransformeerde van een signaal. In de stochastische signaalverwerking wordt de tegenhanger hiervan gebruikt, namelijk de Fourier getransformeerde van de autocorrelatiefunctie  $R_{xx}(\ell)$ , die bekend staat als het *vermogensdichtheidsspectrum*  $S_{xx}(e^{j\omega})$ . Zoals de naam reeds aangeeft, is dit een maat voor de hoeveelheid vermogen per bandbreedte van het stochastische signaal. De definitie van het vermogensdichtheidsspectrum staat bekend als het Einstein-Wiener-Khinchin theorema:

$$\begin{aligned}
S_{xx}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \\
R_{xx}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(e^{j\omega}) \exp(j\omega\tau) d\omega
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Voor tijd-discrete signalen wordt meestal de z-transformatie of tijd-discrete Fourier transformatie gebruikt om het vermogensdichtheidsspectrum in het z-domein ( $\Phi_{xx}(z)$ ) of in het frequentiedomein ( $S_{xx}(e^{j\omega})$ ) te definiëren:

$$\Phi_{xx}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xx}(k)z^{-k} \quad (1.52)$$

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xx}(k) \exp(-j\omega k) \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

Enkele eigenschappen van het vermogensdichtheidsspectrum van tijd-discrete stochastische signalen zijn:

$$\begin{aligned} \Phi_{xx}(z) &= E[X(z)X(z^{-1})] \\ S_{xx}(e^{j\omega}) &= E[X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})] \\ S_{xx}(e^{j\omega}) &= S_{xx}^*(e^{j\omega}) \\ S_{xx}(e^{j\omega}) &\geq 0 \end{aligned} \quad (1.53)$$

$$R_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(e^{j\omega}) d\omega$$

Uitgaande van de kruiscorrelatiefunctie kan de tevens het kruisvermogensdichtheids-spectrum gedefinieerd worden:

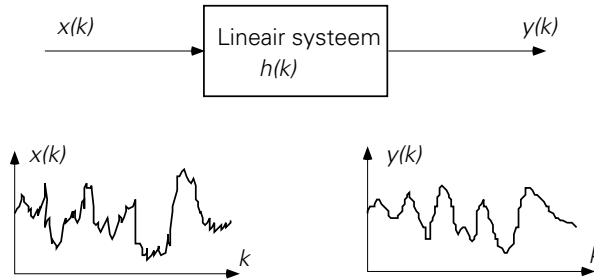
$$\Phi_{xy}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xy}(k)z^{-k} \quad (1.54)$$

$$S_{xy}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xy}(k) \exp(-j\omega k) \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

met de volgende eigenschappen:

$$\begin{aligned} \Phi_{xy}(z) &= E[X(z)Y(z^{-1})] \\ S_{xy}(e^{j\omega}) &= E[X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})] \\ S_{xy}(e^{j\omega}) &= S_{yx}^*(e^{j\omega}) \end{aligned} \quad (1.55)$$

Als een stochastisch signaal door een lineair systeem gaat, veranderen de eigenschappen van dit signaal (figuur 1.7). In de statistische signaalverwerking is het van belang om de veranderende eigenschappen van zwak-stationaire stochastische signalen te kunnen beschrijven. Als met  $h(k)$  de impulsresponsie van het lineaire systeem wordt aangegeven, en als  $H(e^{j\omega})$  en  $H(z)$  de Fourier getransformeerde, respectievelijk de z-getransformeerde van deze impulsresponsie zijn, dan kunnen de



Figuur 1.7. Stochastisch signaal dat door een lineair systeem gaat.

volgende relaties tussen de correlatiefuncties van hetingangssignaal  $x(k)$  en uitgangssignaal  $y(k)$  worden afgeleid:

$$R_{yy}(k) = h(-k) * h(k) * R_{xx}(k) \quad (1.56)$$

$$R_{xy}(k) = h(-k) * R_{xx}(k)$$

en voor de vermogensdichtheidsspectra:

$$\Phi_{yy}(z) = |H(z)|^2 \Phi_{xx}(z)$$

$$\Phi_{xy}(z) = H(z^{-1}) \Phi_{xx}(z)$$

$$S_{yy}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 S_{xx}(e^{j\omega})$$

$$S_{xy}(e^{j\omega}) = H^*(e^{j\omega}) S_{xx}(e^{j\omega})$$

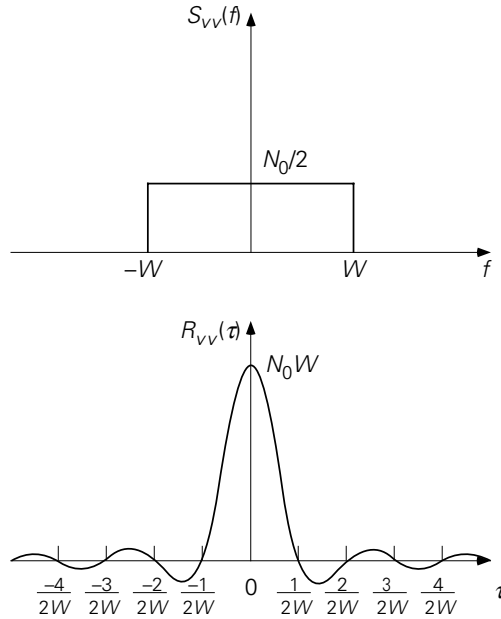
(1.57)

### 1.2.9. Witte ruis

Met het verschijnsel ruis worden over het algemeen signaalfuctuaties bedoeld die geen verband hebben met het informatiedragend signaal. Er zijn een aantal typen ruis, waarvan de belangrijkste klassen zijn:

- thermische ruis ten gevolge van willekeurige fluctuaties van elektronen in weerstanden, transistoren, etc.,
- partikel ruis, die wordt veroorzaakt door emissie van deeltjes zoals elektronen en fotonen,
- $1/f$  ruis die zich over het algemeen voordoet bij lage frequenties.

Door een stochastische modellering van de verschillende typen ruis kan rekening gehouden worden met de aanwezigheid van deze ruis in signaalverwerkingstoepassingen. We beperken ons hier tot de modellering van willekeurige signaalfuctuaties door zogenaamde witte ruis.



Figuur 1.8. Vermogensdichtheidsspectrum en autocorrelatiefunctie van bandbegrensde ruis.

Voor zowel partikel als thermische ruis  $v(t)$  blijkt dat voor een groot frequentiegebied het ruisvermogensdichtheidsspectrum geschreven kan worden als (zie figuur 1.8) :

$$S_{vv}(f) = \frac{N_0}{2} \quad -W \leq f \leq W \quad (1.58)$$

De autocorrelatiefunctie van dit tijd-continue bandbegrensde ruisproces wordt gevonden door de inverse Fourier transformatie van (1.58):

$$R_{vv}(\tau) = N_0W \frac{\sin(2\pi W\tau)}{2\pi W\tau} \quad (1.59)$$

Deze autocorrelatiefunctie is geschetst in figuur 1.8. Merk op dat als het ruisproces bemonsterd wordt op de tijdstippen  $\tau = k/2W$ , de bemonsteringen onderling orthogonaal zijn. Als bovendien  $E[v(t)] = 0$  (wat vaak gemakshalve impliciet wordt aangenomen), dan is het resulterende tijd-discrete ruisproces ongecorrleerd.

Wanneer we in (1.58)  $W \rightarrow \infty$  laten gaan, dat wil zeggen *alle* frequenties komen even sterk voor in het ruisproces, dan spreken we van *witte ruis*, naar analogie van wit licht waar alle frequenties in voorkomen (dacht men vroeger). De autocorrelatiefunctie van deze (tijd-continue) witte ruis wordt gevonden door in (1.58)  $W \rightarrow \infty$  te nemen, waaruit volgt:

$$R_{vv}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \quad (1.60)$$

Tijd-continue witte ruis heeft een oneindig vermogen, en is dus niet fysisch realiseerbaar.

Vaak wordt ook het *tijd-discrete* witte proces  $v(k)$  gebruikt. De autocorrelatiefunctie en het vermogensdichtheidsspectrum van een tijd-discreet wit proces worden gegeven door:

$$R_{vv}(k) = \begin{cases} \sigma_v^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{vv}(z) = \sigma_v^2 \quad (1.61)$$

Merk echter op dat het ‘wit zijn’ van het tijd-discrete proces het gevolg kan zijn van het op juiste wijze bemonsteren van een bandbegrensd (en daarom niet-wit) tijd-continu ruisproces.

## 1.3. AR, MA en ARMA signaalmodellen

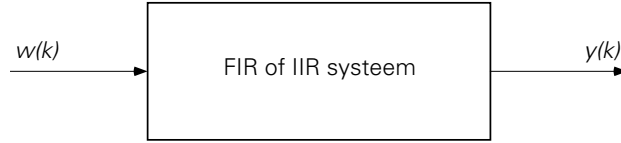
---

### 1.3.1. *Klassen van signaalmodellen*

Zoals we in Paragraaf 1.2.5 tot en met 1.2.9 hebben gezien, worden de eigenschappen van (zwak-stationaire) stochastische signalen bijna altijd beschreven door de autocorrelatiefunctie en het vermogensdichtheidsspectrum. Als de autocorrelatiefunctie of het vermogensdichtheidsspectrum van een fysisch signaal gegeven is, dan kunnen we ons afvragen hoe een systeem eruit zou zien dat een dergelijk signaal kan genereren. Met andere woorden, we willen uit de metingen van een signaal een *model* afleiden voor de bron, en wel op zo’n manier dat het model signalen kan synthetiseren die dezelfde eigenschappen hebben als het gemeten fysische signaal (dit is bijvoorbeeld het geval bij het modelleren van beeldinformatie). Soms ook is direct uit de fysische eigenschappen van een signaalbron een model te construeren (bijvoorbeeld bij het spraak-mechanisme). Met dit model kunnen dan eigenschappen voorspeld worden van signalen die door de bron gegenereerd worden en kunnen signaalverwerkingsalgoritmen ontworpen worden.

Modellen voor signaalbronnen worden over het algemeen *signaalmodellen* genoemd. Deze modellen zijn vereenvoudigingen van de werkelijkheid: een signaalmodel zal nooit een fysisch of andersoortig signaal precies kunnen voorspellen of nabootsen, maar slechts een benadering daarvan geven.

In de moderne signaalverwerking wordt meestal uitgegaan van digitale verwerking door causale lineaire systemen (lineaire filters). Daarom worden ook voor het modelleren van signalen causale lineaire tijd-discrete modellen gebruikt, dat wil zeggen, lineaire tijd-discrete systemen die realiseerbaar zijn. Het zal blijken dat de



Figuur 1.9. Algemeen schema voor een AR, MA of ARMA signaalmodel.

autocorrelatiefunctie voldoende informatie biedt om de parameters van zo'n lineair systeem te bepalen.

Omdat niet alleen het lineaire systeem zelf maar ook het ingangssignaal van dit systeem onbekend en dus vrij te kiezen is, wordt als tijd-discreet ingangssignaal altijd tijd-discrete *witte ruis*  $w(k)$  verondersteld (zie figuur 1.9). Afhankelijk van de eigenschappen van het lineaire systeem spreken we van:

- een autoregressief (AR) proces (signaal, signaalmodel). In dit geval wordt het verband tussen het witte ingangssignaal  $w(k)$  en uitgangssignaal  $y(k)$  van het lineaire (IIR) systeem gegeven door een  $p$ -de orde differentievergelijking van de vorm:

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_p y(k-p) + b w(k) = \sum_{m=1}^p a_m y(k-m) + b w(k) \quad (1.62)$$

- een moving-average (MA) proces. In dit geval wordt de ingangs-uitgangsrelatie van het lineaire (FIR) systeem gegeven door een  $q$ -de orde differentievergelijking van de vorm:

$$y(k) = b_0 w(k) + b_1 w(k-1) + \dots + b_q w(k-q) = \sum_{m=0}^q b_m w(k-m) \quad (1.63)$$

- een autoregressief moving-average (ARMA) proces. In dit geval wordt de ingangs-uitgangsrelatie van het lineaire systeem gegeven door een combinatie van bovenstaande differentievergelijkingen:

$$\begin{aligned} y(k) &= a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_p y(k-p) + b_0 w(k) + \dots + b_q w(k-q) = \\ &= \sum_{m=1}^p a_m y(k-m) + \sum_{m=0}^q b_m w(k-m) \end{aligned} \quad (1.64)$$

Merk op dat alle modellen causaal zijn, dat wil zeggen de uitgangssignalen hangen slechts van signaalwaarden in het verleden of heden af, maar niet van die in de toekomst. Tevens wordt er nogmaals op gewezen dat in het AR, MA en ARMA model het ingangssignaal  $w(k)$  *altijd* een *wit ruissignaal* is.

Deze paragraaf bespreekt enkele eigenschappen (met name de autocorrelatiefunctie) van bovengenoemde drie signaalmodellen. In Hoofdstuk 7 wordt hierop teruggeko- men bij de behandeling van moderne technieken voor het schatten van vermogens- dichtheidsspectra.

### 1.3.2. Autoregressief signaalmodel

Het autoregressieve (AR) signaalmodel van de  $p$ -de orde wordt gegeven door vergelijking (1.62). Het systeem dat een dergelijk model kan realiseren, is een IIR (infinite impulse response) filter. Afhankelijk van de keuze van de gewichtscöë- ficiënten  $a_m$ ,  $b$  en de orde  $p$  veranderen de eigenschappen van het uitgangssignaal  $y(k)$ . Eerst wordt de overdracht van het lineaire systeem bepaald met  $z$ -transforma- ties:

$$Y(z) = H(z)W(z) = \frac{b}{A(z)} W(z) = \frac{b}{1 - \sum_{m=1}^p a_m z^{-m}} W(z) \quad (1.65)$$

Het vermogensdichtheidsspectrum van  $y(k)$  volgt nu door gebruik te maken van (1.57) en (1.61):

$$\Phi_{yy}(z) = \frac{b^2}{|A(z)|^2} \Phi_{ww}(z) = \frac{b^2 \sigma_w^2}{\left| 1 - \sum_{m=1}^p a_m z^{-m} \right|^2} \quad (1.66)$$

Merk op dat in  $H(z)$  slechts  $A(z)$  gelijk aan nul kan worden, dat wil zeggen, het lineaire systeem heeft slechts polen. Daarom wordt een AR model ook wel een *all-pole model* genoemd. Deze polen moeten in het  $z$ -vlak binnen de eenheidscirkel  $|z| = 1$  liggen zodat  $H(z)$  een BIBO-stabiel systeem is.

Vanuit de definitie (1.46) kan de autocorrelatiefunctie bepaald worden van een AR proces. Door substitutie van de recursieve uitdrukking voor  $y(k)$  volgt:

$$\begin{aligned} R_{yy}(\ell) &= E[y(k)y(k-\ell)] \\ &= E[a_1 y(k-1)y(k-\ell) + a_2 y(k-2)y(k-\ell) + \dots + a_p y(k-p)y(k-\ell) + b w(k)y(k-\ell)] \\ &= a_1 R_{yy}(\ell-1) + a_2 R_{yy}(\ell-2) + \dots + a_p R_{yy}(\ell-p) + b R_{wy}(\ell) \\ &= a_1 R_{yy}(\ell-1) + a_2 R_{yy}(\ell-2) + \dots + a_p R_{yy}(\ell-p) \quad \ell > 0 \end{aligned} \quad (1.67)$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de causaliteit van het model: de kruiscorrelatie  $R_{wy}(\ell) = E[w(k)y(k-\ell)] = 0$  voor  $\ell > 0$  omdat het uitgangssignaal op tijdstip  $k-\ell$  niet van het ingangssignaal op tijdstip  $k$  kan afhangen.

De autocorrelatie voor  $\ell = 0$  wordt gevonden door  $\ell = 0$  in (1.67) in te vullen:

$$R_{yy}(0) = E[y(k)y(k)] = a_1 R_{yy}(-1) + a_2 R_{yy}(-2) + \dots + a_p R_{yy}(-p) + bR_{wy}(0) \quad (1.68)$$

en vervolgens de laatste term uit te werken:

$$\begin{aligned} R_{wy}(0) &= E[w(k)y(k)] \\ &= E[a_1 w(k)y(k-1) + a_2 w(k)y(k-2) + \dots + a_p w(k)y(k-p) + bw(k)w(k)] \\ &= bE[w(k)w(k)] = b\sigma_w^2 \end{aligned} \quad (1.69)$$

waarbij de voorlaatste vereenvoudiging volgt uit de causaliteit van het systeem. Samenvattend leidt dit tot de volgende recursieve uitdrukkingen voor de autocorrelatiefunctie van een AR-model:

$$R_{yy}(\ell) = \begin{cases} \sum_{m=1}^p a_m R_{yy}(\ell - m) & \ell > 0 \\ \sum_{m=1}^p a_m R_{yy}(m) + b^2 \sigma_w^2 & \ell = 0 \end{cases} \quad (1.70)$$

Het is nu duidelijk te zien dat er een rechtstreeks verband bestaat tussen de autocorrelatiefunctie, het vermogensdichtheidsspectrum en de gewichtscoëfficiënten van een AR model. Hierop wordt in hoofdstuk 7 teruggekomen.

### 1.3.3. Moving-average signaalmodel

Het model voor een moving-average (MA) of glijdend-gemiddelde proces van de  $q$ -de orde is gegeven in (1.63). Het systeem dat een dergelijk model realiseert is een FIR (finite impulse response) filter met witte ruis als ingangssignaal. De gewichtscoëfficiënten  $b_m$  en de orde  $q$  bepalen de eigenschappen van het uitgangssignaal  $y(k)$ . De overdracht van het lineaire systeem wordt gegeven door:

$$Y(z) = B(z)W(z) = \sum_{m=0}^q b_m z^{-m} W(z) \quad (1.71)$$

Omdat  $B(z)$  nu alleen maar nulpunten heeft, wordt een MA-model ook wel een *all-zero model* genoemd. Voor het vermogensdichtheidsspectrum krijgen we:

$$\Phi_{yy}(z) = |B(z)|^2 \Phi_{ww}(z) = \left| \sum_{m=0}^q b_m z^{-m} \right|^2 \sigma_w^2 \quad (1.72)$$

De autocorrelatiefunctie van  $y(k)$  wordt berekend door in de definitie (1.46) zowel  $y(k)$  als  $y(k - \ell)$  te vervangen aan de hand van (1.63):

$$\begin{aligned} R_{yy}(\ell) &= E[y(k)y(k - \ell)] \\ &= E\left[\left(b_0w(k) + b_1w(k-1) + \dots + b_qw(k-q)\right)\left(b_0w(k-\ell) + b_1w(k-\ell-1) + \dots + b_qw(k-\ell-q)\right)\right] \end{aligned} \quad (1.73)$$

Voor  $0 \leq \ell \leq q$  is  $R_{yy}(\ell)$  ongelijk aan nul, terwijl voor  $\ell > q$  de autocorrelatiefunctie nul wordt:

$$R_{yy}(\ell) = \begin{cases} \sigma_w^2 \sum_{m=0}^{q-\ell} b_m b_{m+\ell} & 0 \leq \ell \leq q \\ 0 & \ell > q \end{cases} \quad (1.74)$$

Merk op dat een groot verschil tussen een AR en MA-model is, dat de eerste een oneindig groot aantal correlatiewaarden ongelijk aan nul heeft, terwijl bij een MA-model alle autocorrelatiewaarden vanaf  $\ell = q + 1$  gelijk aan nul zijn.

#### 1.3.4. Autoregressief moving-average signaalmodel

In het algemeen kan de overdrachtsfunctie van een signaalbron zowel polen als nulpunten hebben. In dit meest complexe geval wordt de differentievergelijking (1.64) gebruikt om een signaal te modelleren. Omdat de differentievergelijking een combinatie is van het AR en MA-model, spreken we nu van een ARMA model.

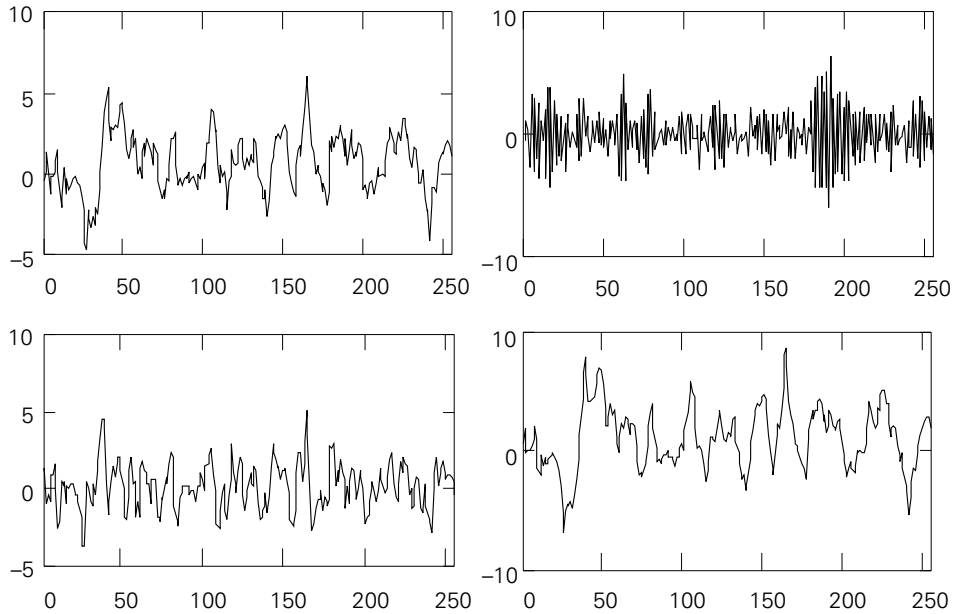
Analoog aan het AR en MA-model kunnen uitdrukkingen voor de overdracht van het lineaire systeem, het vermogensdichtheidsspectrum en de autocorrelatiefunctie worden afgeleid. Voor de volledigheid worden hier de resultaten van deze afleidingen gegeven:

$$\begin{aligned} Y(z) = H(z)W(z) &= \frac{B(z)}{A(z)}W(z) = \frac{\sum_{m=0}^q b_m z^{-m}}{1 - \sum_{m=1}^p a_m z^{-m}}W(z) \\ \Phi_{yy}(z) &= \frac{|B(z)|^2}{|A(z)|^2} \Phi_{ww}(z) = \frac{\sigma_w^2 \left| \sum_{m=0}^q b_m z^{-m} \right|^2}{\left| 1 - \sum_{m=1}^p a_m z^{-m} \right|^2} \end{aligned} \quad (1.75)$$

$$R_{yy}(\ell) = \begin{cases} \sum_{m=1}^p a_m R_{yy}(\ell - m) + \sum_{m=0}^q b_m R_{wy}(\ell - m) & 0 \leq \ell \leq q \\ \sum_{m=1}^p a_m R_{yy}(\ell - m) & \ell > q \end{cases} \quad (1.76)$$

$$R_{wy}(\ell) = \text{inverse z - transformatie} \left\{ \frac{b_0 \sigma_w^2}{1 - \sum_{m=1}^p a_m z^{-m}} \right\}$$

In figuur 1.10 wordt een aantal voorbeelden gegeven van signalen gegenereerd door AR, MA en ARMA modellen.



Figuur 1.10. Voorbeelden van AR, MA, en ARMA signalen.

### 1.3.5. Toestandsbeschrijving van ARMA modellen

In voorafgaande paragrafen is gebruik gemaakt van de klassieke *uitwendige* beschrijving van lineaire tijd-discrete systemen. Hierbij wordt een relatie gegeven tussen hetingangssignaal  $w(k)$  en uitgangssignaal  $y(k)$  met behulp van z-transformaties of Fourier transformaties. Een beperking hiervan is, dat deze beschrijfwijze alleen voor tijd-invariante systemen en (zwak) stationaire (ARMA) processen gebruikt kan worden.

Een alternatieve systeembeschrijving is de *inwendige* of *toestandsbeschrijving*. Hiermee is het mogelijk om tijd-variante systemen en niet (zwak-) stationaire signalen te

beschrijven. De toestandsbeschrijving van een tijd-discreet systeem is een *tijd-domeinbeschrijving* door de volgende eerste-orde vectordifferentievergelijkingen:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}(k)w(k) \\ y(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)w(k) \end{cases} \quad (1.77)$$

Hierbij is  $\mathbf{x}(k)$  de toestandsvector die de huidige toestand van het systeem ‘onthoudt’,  $\mathbf{A}(k)$  is de toestandsovergangsmatrix,  $\mathbf{B}(k)$  de ingangsmatrix,  $\mathbf{C}(k)$  de uitgangsmatrix en  $\mathbf{D}(k)$  de directe overdracht van ingang naar uitgang. De dynamiek van het systeem komt tot uiting door de mogelijke tijd-variantie van deze matrices. Zijn alle matrices tijd-invariant, dan is het totale systeem tijd-invariant en kan een equivalente uitwendige beschrijvingen gegeven worden door bijvoorbeeld de overdrachtsfunctie  $H(z)$ .

De Kalman schattingstheorie gaat uit van toestandsbeschrijvingen van ARMA modellen om optimale recursieve signaalschatters af te leiden. In deze paragraaf wordt kort beschreven hoe vanuit een uitwendige beschrijving van een ARMA model een toestandsbeschrijving in de vorm van een eerste-orde vectordifferentievergelijking gevonden kan worden. De AR en MA modellen worden niet apart behandeld omdat die als een speciale gevallen van het ARMA model beschouwd kunnen worden.

De uitwendige beschrijving van een ARMA model wordt meestal gegeven door een  $(p,q)$ -de orde differentievergelijking of door de  $z$ -getransformeerde of Fourier getransformeerde van deze differentievergelijking. Deze drie vormen zijn direct in elkaar om te zetten via  $z$ -transformaties of Fourier transformaties. We gaan daarom hier uit van een uitwendige beschrijving in het tijddomein, dat wil zeggen, de volgende  $(p,q)$ -de orde differentievergelijking:

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_p y(k-p) + b_0 w(k) + b_1 w(k-1) + \dots + b_q w(k-q) \quad (1.78)$$

Zonder verlies van algemeenheid stellen we nu als additionele voorwaarde dat  $p > q$ . We moeten nu *toestandsgrootheden*  $x_i(k)$  zo kiezen dat het gedrag van  $y(k)$  daarmee volledig voorspeld kan worden in de toekomst, gegeven alle voorgaande ingangs- en uitgangssignalen. Omdat de differentievergelijking (1.78) van de  $p$ -de orde is, is een geheugenwerking van  $p$  elementen nodig, dat wil zeggen, de toestandsvector van het systeem bevat  $p$  elementen.

De meest gebruikelijke wijze om de toestandsvector te definiëren, is om eerst het MA deel buiten beschouwing te laten. We verkrijgen dan de volgende hulpuitdrukking:

$$r(k) = a_1 r(k-1) + a_2 r(k-2) + \dots + a_p r(k-p) + w(k) \quad (1.79)$$

Nu definiëren we de toestandsgrootheden  $x_i(k)$  als volgt:

$$\begin{aligned}
 x_1(k) &= r(k) \\
 x_2(k) &= r(k-1) = x_1(k-1) \\
 x_3(k) &= r(k-2) = x_2(k-1) \\
 &\vdots \\
 x_p(k) &= r(k-p+1) = x_{p-1}(k-1)
 \end{aligned} \tag{1.80}$$

Gebruikmakend van (1.79) wordt de volgende differentievergelijking verkregen:

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_p(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ \vdots \\ x_p(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} w(k)$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}w(k) \tag{1.81}$$

Vervolgens wordt het MA-deel van het ARMA model opgenomen door de coëfficiënten van de uitgangsmatrix  $\mathbf{C}$  op de juiste wijze te kiezen:

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_p(k) \end{bmatrix} \tag{1.82}$$

Uitschrijven van  $y(k-\ell)$  voor  $\ell = 0, 1, \dots, p$ , vermenigvuldigen met  $-a_\ell$  ( $\ell = 1, 2, \dots, p$ ) en optellen van de resultaten levert:

$$\begin{aligned}
 y(k) &= c_1 x_1(k) + c_2 x_2(k) + \dots + c_p x_p(k) \\
 -a_1 y(k-1) &= -c_1 a_1 x_1(k-1) - c_2 a_1 x_2(k-1) - \dots - c_p a_1 x_p(k-1) \\
 &\vdots \\
 -a_p y(k-p) &= -c_1 a_p x_1(k-p) - c_2 a_p x_2(k-p) - \dots - c_p a_p x_p(k-p) + \\
 y(k) - a_1 y(k-1) - \dots - a_p y(k-p) &= \\
 c_1 [x_1(k) - a_1 x_1(k-1) - \dots - a_p x_1(k-p)] &+ c_2 [x_2(k) - a_1 x_2(k-1) - \dots - a_p x_2(k-p)] + \dots \\
 \dots + c_p [x_p(k) - a_1 x_p(k-1) - \dots - a_p x_p(k-p)] &
 \end{aligned} \tag{1.83}$$

Bekijken we de uitdrukkingen tussen haakjes aan de rechterzijde van deze vergelijking, dan blijkt de volgende herschrijving mogelijk aan de hand van (1.80) en (1.81):

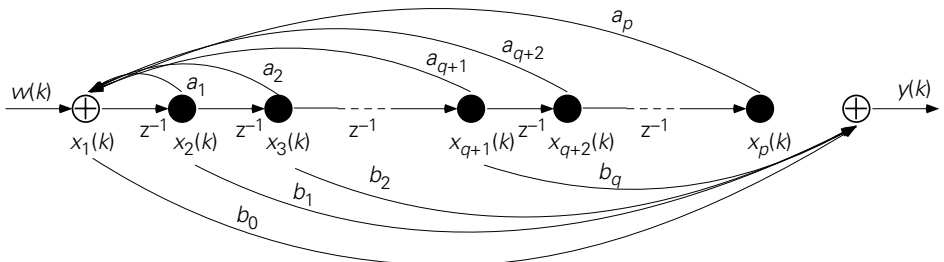
$$\begin{aligned}
 x_1(k) - a_1 x_1(k-1) - \dots - a_p x_1(k-p) &= x_1(k) - a_1 x_1(k-1) - \dots - a_p x_p(k-1) = w(k) \\
 x_2(k) - a_1 x_2(k-1) - \dots - a_p x_2(k-p) &= x_1(k-1) - a_1 x_1(k-2) - \dots - a_p x_p(k-2) = w(k-1) \\
 &\vdots \\
 x_p(k) - a_1 x_p(k-1) - \dots - a_p x_p(k-p) &= x_1(k-p+1) - a_1 x_1(k-p) - \dots - a_p x_p(k-p) \\
 &= w(k-p+1)
 \end{aligned}
 \tag{1.84}$$

Substitutie van dit resultaat in (1.83) levert

$$y(k) - a_1 y(k-1) - \dots - a_p y(k-p) = c_1 w(k) + c_2 w(k-1) + \dots + c_p w(k-p+1)
 \tag{1.85}$$

waaruit blijkt dat de coëfficiënten van de matrix  $\mathbf{C}$  niets anders zijn dan de coëfficiënten van het MA deel van (1.78), mits  $q \leq p - 1$ , wat al eerder als voorwaarde genoemd was. Dit levert uiteindelijk:

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_q & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{q+1}(k) \\ \vdots \\ x_p(k) \end{bmatrix}
 \tag{1.86}$$



Figuur 1.11. Stroomdiagram behorende bij de toestandsvergelijkingen (1.81) en (1.86).

Klaarblijkelijk is de matrix  $D$  in (1.77) een nul-matrix. Figuur 1.11 laat een mogelijke realisatie zien van het toestandsmodel voor het ARMA signaalmodel aan de hand van een stroomdiagram. Als laatste wordt opgemerkt dat de matrices  $A$ ,  $B$  en  $C$  *tijd-invariant* zijn voor een ARMA model van een zwak-stationair signaal. Zoals uit (1.81) en (1.86) blijkt, kan een ARMA model waarvan de coëfficiënten  $a_m$  en  $b_m$  van de tijd afhangen, beschreven worden door *tijd-variante* toestandsvergelijkingen.

## 1.4. Samenvatting en belangrijke termen

Dit hoofdstuk heeft een overzicht gegeven van een aantal concepten en definities die voor de statistische signaalverwerking van belang zijn. Speciaal van belang zijn de karakterisering van zwak-stationaire en (zwak-)ergodische signalen door hun verwachting, correlatie- en covariantiefuncties. Ook het vermogensdichtheidspectrum neemt een belangrijke plaats in.

Stochastische signalen worden vaak gemodelleerd door AR, MA, of ARMA processen. Van essentieel belang is dat deze modellen gebaseerd zijn op lineaire causale systemen waarvan het ingangssignaal een tijd-discreet wit ruisproces is. Van elk van de modellen is de overdrachtsfunctie, het vermogensdichtheidspectrum, en de autocorrelatiefunctie besproken. Tevens is getoond hoe de uitwendige beschrijving van een ARMA model aan de hand van een differentievergelijking omgevormd kan worden tot een inwendige beschrijving door toestandsvergelijkingen.

### *Lijst van belangrijke termen*

AR model	marginale kansdichtheid
ARMA model	ongecorreleerd
autocorrelatiefunctie	orthogonaal
autocovariantiefunctie	realisatie
Bayes, regel van	stochastisch onafhankelijk
conditionele kansdichtheid	stochastisch signaal
correlatie	stochastische variabele
covariantie	variantie
ensemble	vectoriële stochastische variabele
ergodiciteit	vermogensdichtheidspectrum
gezamenlijke kansdichtheid	verwachting
kruiscorrelatiefunctie	witte ruis
kruiscovariantiefunctie	zwak-ergodisch
kruisvermogensdichtheidspectrum	zwak-stationair
MA model	

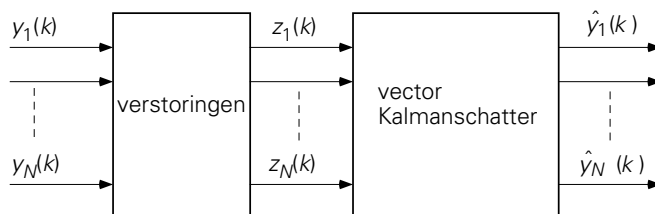
# 5 Kalman filters

## 5.1. Inleiding

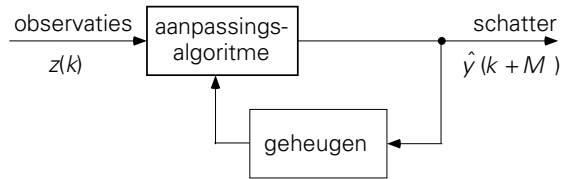
De Wiener schatters uit voorgaand hoofdstuk lossen de Wiener-Hopf vergelijking (4.9) op voor het geval dat hetingangssignaal  $y(k)$  en de observaties  $z(k)$  gezamenlijk zwak-stationair zijn. Deze aanname beperkt uiteraard de toepassingsmogelijkheden van Wiener schatters. Een ander nadeel van Wiener schatters is dat het aantal filtercoëfficiënten van de optimale schatter zeer groot kan zijn. Hierdoor is de feitelijke signaalschatting rekenintensief, zelfs al wordt de gegeneraliseerde Wiener filterstructuur uit paragraaf 4.6 gehanteerd.

Wiener schatters worden meestal geformuleerd voor het geval van scalaire observaties, dat wil zeggen we doen één waarneming op tijdstip  $k$  zodat de observatie  $z(k)$  een scalaire grootheid is. In veel toepassingen wordt echter een aantal waarnemingen  $z_1(k), z_2(k), \dots, z_M(k)$  gedaan op één tijdstip (figuur 5.1). Denk hierbij aan metingen aan bijvoorbeeld chemische processen waarbij op één tijdstip sensoren een aantal grootheden meten (temperatuur, concentratie chemicaliën, etc.) of aan het meten van een electrocardiogram (ECG) met behulp van vaak meer dan vijf elektroden. Omdat op één tijdstip een verzameling (onderling afhankelijke) observaties tegelijkertijd beschikbaar komt, spreken we van vectorobservaties. Als de vectorobservaties onderling gecorreleerd zijn, dat wil zeggen  $z_i(k)$  is gecorreleerd met  $z_j(k)$ , is het verstandig gebruik te maken van deze correlatie om tot betere schattingsresultaten te komen. De Wiener theorie voor causale schatters laat een dergelijke uitbreiding echter slechts moeizaam toe.

De bovenstaande nadelen van Wiener schatters kunnen omzeild worden door gebruik te maken van de klasse van Kalman schatters, ontwikkeld door R.E. Kalman omstreeks 1960. Deze klasse van schatters lost de tijdvariante Wiener-Hopf vergelijking (4.9) op *recursieve* wijze op, wat inhoudt dat voorgaande schattingswaarde



Figuur 5.1. Vectorobservaties en vector schatter.



Figuur 5.2. Structuur van een recursieve (Kalman) schatter.

eenvoudigweg wordt aangepast wanneer nieuwe observaties beschikbaar komen (zie illustratie in figuur 5.2). Kalman schatters laten op eenvoudige wijze de uitbreiding naar vectorobservaties en niet-lineaire modellen toe en zijn rekentechnisch veel efficiënter dan Wiener schatters.

In de Kalman theorie wordt uitgebreid gebruik gemaakt van toestandsvergelijkingen. In tegenstelling tot de Wiener theorie wordt het oorspronkelijke signaal  $y(k)$  nu niet beschreven aan de hand van zijn vermogensdichtheidspectrum of autocorrelatiefunctie, maar wordt gemodelleerd als het uitgangssignaal van een dynamisch systeem. Dit systeem wordt vervolgens inwendig beschreven door toestandsvariabelen en toestandsvergelijkingen die aangeven hoe de toestand van het dynamische systeem in de tijd verandert.

Zoals besproken in hoofdstuk 1 kan een belangrijke klasse van signaalmodellen beschreven worden door de volgende eerste-orde (vector-)differentievergelijkingen:

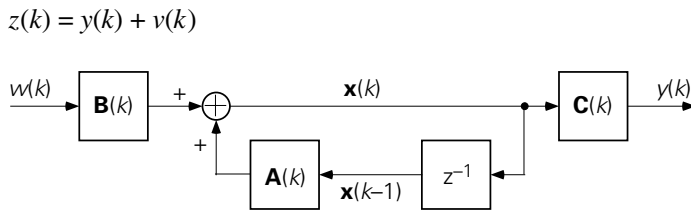
$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}(k)w(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Hierbij is  $\mathbf{x}(k)$  de toestandsvector van het systeem,  $\mathbf{A}(k)$  de toestands-overgangsmatrix behorende bij de toestandsovergang van tijdstip  $k-1$  naar  $k$ ,  $\mathbf{B}(k)$  de ingangsmatrix en  $\mathbf{C}(k)$  de uitgangsmatrix. Het ingangssignaal  $w(k)$  is een wit ruisproces met verwachting nul. In (5.1) zijn de matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  en  $\mathbf{C}$  afhankelijk van de tijdindex  $k$  en kunnen dus veranderen in de tijd. Op deze wijze kunnen niet-stationariteiten in het signaal gemodelleerd worden. Als  $y(k)$  zwak-stationair is, kunnen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  en  $\mathbf{C}$  tijdonafhankelijk genomen worden:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B} w(k) \\ y(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Als een signaal  $y(k)$  zwak-stationair is, kunnen de toestandsvergelijkingen van het dynamische systeem dat  $y(k)$  als uitgangssignaal heeft via spectrale factorisatie van het vermogensdichtheidspectrum van  $y(k)$  bepaald worden. Omgekeerd kan uit de toestandsbeschrijving van een stationair dynamische systeem het vermogensdichtheidspectrum van het uitgangssignaal  $y(k)$  berekend worden (zie voorbeeld 5.1).

In dit hoofdstuk zullen we ons bezighouden met het oplossen van de Wiener-Hopf vergelijking (4.9) voor niet-stationaire processen. Daarbij wordt gebruik gemaakt van de hierboven besproken methode voor het modelleren van signalen. Omdat algemene resultaten voor Kalman schatters lastig en weinig betekenisvol zijn, worden in dit hoofdstuk slechts de twee meest belangrijke Kalman schatters besproken, namelijk de Kalman 1-staps predictor (gerelateerd aan de Wiener schatter met  $M = 1$ ) en het Kalman filter (gerelateerd aan de Wiener schatter met  $M = 0$ ). Bovendien beperken we ons in beide gevallen tot de situatie waarbij de waarnemingen  $z(k)$  verstoord zijn door additieve witte ruis met verwachting nul en die ongecorrleerd is met het oorspronkelijke signaal  $y(k)$ :



Figuur 5.3. Model van  $y(k)$  als uitgangssignaal van een dynamisch systeem met witte ruis  $w(k)$  als ingangssignaal.

### Voorbeeld 5.1. Relatie vermogensdichtheidsspectrum en toestandsbeschrijving

#### Vermogensdichtheidsspectrum naar toestandsbeschrijving

Een signaal met een negatief exponentiële autocorrelatiefunctie

$$R_{yy}(k) = \rho^{|k|} \quad (0 \leq \rho < 1)$$

heeft het volgende vermogensdichtheidsspectrum:

$$\Phi_{yy}(z) = \frac{1 - \rho^2}{(1 - \rho z)(1 - \rho z^{-1})}$$

Het shaping filter  $H(z)$  dat een signaal met dit vermogensdichtheidsspectrum genereert, kan worden gevonden via spectrale factorisatie:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \Phi_{yy}^+(z) = \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{1 - \rho z^{-1}}$$

met  $W(z)$  witte ruis met variantie 1. Als ingangs-uitgangsrelatie geschreven geeft dit:

$$Y(z) = \rho Y(z)z^{-1} + \sqrt{1 - \rho^2} W(z)$$

Na inverse z-transformatie levert dit de differentievergelijking

$$y(k) = \rho y(k-1) + \sqrt{1-\rho^2} w(k)$$

Dit kan ook in de vorm van een toestandsvergelijking van een tijdinvariant dynamisch systeem geschreven worden:

$$x(k) = \rho x(k-1) + w(k)$$

$$y(k) = \sqrt{1-\rho^2} x(k)$$

met  $\mathbf{x}(k) = x(k)$ ,  $\mathbf{A} = \rho$ ,  $\mathbf{B} = 1$ , en  $\mathbf{C} = \sqrt{1-\rho^2}$ .

#### *Toestandsbeschrijving naar vermogensdichtheidsspectrum*

Een dynamisch systeem wordt beschreven door de volgende toestandsvergelijkingen:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k-1) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w(k)$$

$$y(k) = [3, 1] \mathbf{x}(k)$$

Uitschrijven van het eerste deel van de toestandsvergelijkingen met  $\mathbf{x}(k) = [\mathbf{x}_0(k), \mathbf{x}_1(k)]$ , en z-transformeren van het resultaat levert:

$$\mathbf{X}_0(z) = 0,8\mathbf{X}_0(z)z^{-1} + 0,3\mathbf{X}_1(z)z^{-1} + W(z)$$

$$\mathbf{X}_1(z) = \mathbf{X}_0(z)z^{-1}$$

Door eliminatie van  $\mathbf{X}_1(z)$  volgt na herrangschikking

$$(1 - 0,8z^{-1} - 0,3z^{-2}) \mathbf{X}_0(z) = W(z)$$

Omdat

$$Y(z) = 3\mathbf{X}_0(z) + \mathbf{X}_1(z) = \mathbf{X}_0(z) (3 + z^{-1})$$

volgt dat  $Y(z)$  gegeven wordt door:

$$Y(z) = \frac{3 + z^{-1}}{(1 - 0,8z^{-1} - 0,3z^{-2})} W(z).$$

Uit deze overdrachtsfunctie zijn nu het vermogensdichtheidsspectrum en de autocorrelatiefunctie van  $y(k)$  te bepalen. □

## 5.2. Wold-decompositie

Het doel van de Kalman schatters is het vinden van een causale lineaire kleinste kwadraten schatter  $\hat{y}(k + M/k)$  van  $y(k + M)$ <sup>1</sup> op basis van een oneindig aantal observaties  $z(n)$ :

$$\hat{y}(k + M/k) = \sum_{n=-\infty}^k h(k,n) z(n) \quad (5.3)$$

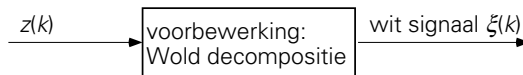
De coëfficiënten  $h(k,n)$  worden nu zo gekozen dat het kwadratische verschil

$$\bar{C} = E[\varepsilon(k + M/k)^2] = E[(y(k + M) - \hat{y}(k + M/k))^2] \quad (5.4)$$

geminimaliseerd wordt. De optimale filtercoëfficiënten  $h(k,n)$  worden bepaald door de afgeleide van  $\bar{C}$  naar  $h(k,m)$  gelijk aan nul te stellen, wat resulteert in de tijdvariante Wiener-Hopf vergelijking:

$$R_{yz}(k+M,m) = \sum_{n=-\infty}^k h(k,n) R_{zz}(n,m) \quad m \in [-\infty, k], \quad \forall k \quad (5.5)$$

Hierbij zijn zowel de autocorrelatiefunctie  $R_{zz}(k,\ell)$  als de kruiscorrelatiefunctie  $R_{yz}(k,\ell)$  afhankelijk van het tijdstip  $k$  waarop de betreffende functie bekeken wordt. Bij het afleiden van het causale Wiener filter met oneindig geheugen werd eerst aangenomen dat de signalen zwak-stationair zijn, en werd vervolgens gebruik gemaakt van de whitening benadering om (5.5) op te lossen. Ook voor niet-stationaire signalen is (5.5) eenvoudig op te lossen als  $z(k)$  een ongecorrleerd proces is. Om deze reden willen we ook nu een wit makende voorbewerking op de observaties  $z(k)$  uitvoeren (zie figuur 5.4). Deze voorbewerking is nu echter niet te bepalen via spectrale factorisatie, omdat de autocorrelatiefunctie  $R_{zz}(k,\ell)$  tijdvariant is en daarom het vermogensdichtheidspectrum  $\Phi_{zz}(z)$  niet gedefinieerd is.



Figuur 5.4. Voorbewerking op  $z(k)$  resulterende in een ongecorrleerd innovatieproces  $\xi(k)$  waarvoor (5.5) eenvoudig op te lossen is.

Voor het niet-stationaire geval maken we gebruik van het feit dat elk signaal te ontbinden is in twee componenten: één component die volledig bepaald is door waarden voorafgaand aan  $z(k)$ , dat wil zeggen, in het verleden, en een andere die het karakter draagt van een ongecorrleerd (wit) ruis proces  $\xi(k)$  en de ‘nieuwe’ informatie in  $z(k)$  bevat. Deze scheiding van een signaal in twee componenten staat

<sup>1</sup> In tegenstelling tot hoofdstuk 4 wordt de notatie  $\hat{y}(k/\ell)$  voor de geschatte waarde van  $y$  op het tijdstip  $k$  gebruik makend van waarden tot en met het tijdstip  $\ell$ , overal in dit hoofdstuk gebruikt.

bekend als de *Wold-decompositie*, en wordt hier niet in zijn algemeenheid bewezen. Het signaal  $\xi(k)$  wordt het *innovatieproces* genoemd en kan worden verkregen door een *causale lineaire* transformatie op  $z(k)$  toe te passen. Bij de afleiding van het causale Wiener filter is aangetoond dat voor zwak-stationaire signalen deze transformatie gegeven wordt door het causale *whitening* filter  $H_1(z) = 1/\Phi_z(z)$ . Voor het algemene geval van het schatten van niet-stationaire signalen werd door Kalman de volgende *recursieve* signaaldecompositie voorgesteld die het gezochte innovatieproces  $\xi(k)$  oplevert:

$$\xi(k) = z(k) - \hat{y}(k/k-1) \quad (5.6)$$

Hierbij is  $\hat{y}(k/k-1)$  een voorspelling van  $y(k)$  op basis van de observaties  $z(m)$  in het verleden, dat wil zeggen,  $m \leq k-1$ . De autocorrelatiefunctie van de innovaties  $\xi(k)$  wordt gegeven door

$$R_{\xi\xi}(k, \ell) = \sigma_{\xi}^2(k) \delta(k - \ell) \quad (5.7)$$

wat aangeeft dat

- (i)  $\xi(k)$  ongecorrleerd is voor alle tijdstippen  $k$ , want  $R_{\xi\xi}(k, \ell)$  is alleen ongelijk aan nul voor  $\ell = k$ ,
- (ii) de variantie  $\sigma_{\xi}^2(k)$  van het innovatieproces tijdafhankelijk kan zijn.

Het innovatieproces is dus een niet-stationair wit (ruis)proces.

Als een uitdrukking voor  $\hat{y}(k/k-1)$  bepaald kan worden, is daarmee de Wold-decompositie volledig bekend. Met dit resultaat zijn dan vervolgens de coëfficiënten van de schatter (5.3) eenvoudig te bepalen (zie hierna). Echter, het bepalen van de Wold-decompositie op zich vereist het berekenen van de lineaire schatter  $\hat{y}(k/k-1)$ . Dit is een predictiefilter met  $M = 1$ , die op zijn beurt pas bepaald kan worden als de Wold-decompositie bekend is. Om deze reden neemt de predictor  $\hat{y}(k/k-1)$  de belangrijkste plaats in binnen de Kalman schattingstheorie en zal in paragraaf 5.3 als eerste bestudeerd worden. Tevens moet dan nog wel aangetoond te worden dat voor de gegeven decompositie (5.6) het innovatieproces  $\xi(k)$  inderdaad ongecorrleerd is.

Het resultaat van de Wold-decompositie van de observaties  $z(k)$  is dat het resulterende innovatieproces een ongecorrleerd proces is. De lineaire kleinste kwadraten schatter gebaseerd op dit innovatieproces wordt gegeven door

$$\hat{y}(k + M/k) = \sum_{n=-\infty}^k h(k, n) \xi(n) \quad (5.8)$$

De optimale filtercoëfficiënten  $h(k, m)$  volgen door toepassing van het orthogonaliteitsprincipe. De in de schatting gebruikte observaties, wat hier de innovaties  $\xi(m)$  zijn, moeten orthogonaal zijn met de schattingsfout  $\varepsilon(k + M/k)$ :

$$E[ \varepsilon(k + M/k)\xi(m) ] = 0 \quad m \in [-\infty, k], \forall k \quad (5.9)$$

Dit leidt tot de volgende tijdvariante Wiener-Hopf vergelijking (zie ook vergelijking (5.5) met  $z(k)$  vervangen door  $\xi(k)$ ):

$$\begin{aligned} R_{y\xi}(k + M, m) &= \sum_{n=-\infty}^k h(k, n) R_{\xi\xi}(n, m) \\ &= \sum_{n=-\infty}^k h(k, n) \sigma_{\xi}^2(n) \delta(n - m) \\ &= h(k, m) \sigma_{\xi}^2(m) \quad m \in [-\infty, k], \forall k \end{aligned} \quad (5.10)$$

waarbij gebruik is gemaakt van (5.7). Hieruit volgt dat de filtercoëfficiënten gegeven worden door de genormeerde en over  $M$  bemonsteringen verschoven kruiscorrelatiewaarden tussen  $y(k)$  en  $\xi(k)$ :

$$h(k, m) = \begin{cases} R_{y\xi}(k + M, m) / \sigma_{\xi}^2(m) & m \leq k \\ 0 & m > k \end{cases} \quad \forall k \quad (5.11)$$

Merk op dat deze afleiding een sterke overeenkomst vertoont met de afleiding van het optimale filterdeel in het causale Wiener filter (paragraaf 4.4.1, vergelijking (4.24a)). Nu volgt voor de algemene uitdrukking van de schatter:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k + M/k) &= \sum_{n=-\infty}^k \{ R_{y\xi}(k + M, n) / \sigma_{\xi}^2(n) \} \xi(n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^k E[y(k + M)\xi(n)] \sigma_{\xi}^{-2}(n) \xi(n) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Deze uitdrukking is de oplossing van de Wiener-Hopf vergelijking voor niet-stationaire witte signalen (dat wil zeggen: de tijdvariante Wiener-Hopf vergelijking). Hiermee hebben we eigenlijk het kleinste-kwadraten schattingsprobleem voor niet-stationaire signalen opgelost.

De coëfficiënten  $h(k, m)$  in (5.11) kunnen geïnterpreteerd worden als een tijdvariante impulsresponsie. De implementatie van zo'n tijdvariant systeem is echter reken technisch vrijwel onuitvoerbaar. In de volgende paragraaf zullen we daarom een aantal manipulaties uitvoeren waardoor (5.12) opeens rekentechnisch veel eenvoudiger wordt. Tevens zullen we ons richten op het meer algemene geval van het schatten van de toestandsvector  $\mathbf{x}(k)$  in plaats van het signaal  $y(k)$  zelf.

### **Voorbeeld 5.2.** *Wold-decompositie voor een zwak-stationair signaal*

In deze paragraaf is aangegeven dat de Wold-decompositie op elk signaal kan

worden toegepast. Reeds bekend was dat voor zwak-stationaire signalen deze decompositie bepaald kan worden met de whitening benadering. In dit voorbeeld worden beide methoden toegepast op een zwak-stationair signaal.

We beschouwen de situatie als beschreven in voorbeeld 4.3 en 4.5. Uit de uitdrukking voor  $\Phi_{zz}(z)$  in voorbeeld 4.5 volgt dat het whitening filter  $H_1(z)$  gegeven wordt door:

$$H_1(z) = \frac{\Xi(z)}{Z(z)} = \frac{1}{\Phi_{zz}^+(z)} = \frac{1}{1,1708} \frac{1 - 0,2z^{-1}}{1 - 0,146z^{-1}}$$

Door bovenstaand filter op de observaties  $z(k)$  toe te passen, wordt een wit signaal verkregen.

Het witte innovatieproces wordt verkregen uit

$$\xi(k) = z(k) - \hat{y}(k/k - 1)$$

waarbij  $\hat{y}(k/k - 1)$  een 1-staps predictie van  $y(k)$  is. We kunnen deze predictie bepalen onder gebruik making van een Wiener schatter. De filtercoëfficiënten voor de Wiener 1-staps predictor  $\hat{y}(k + 1/k)$  kunnen berekend worden als (zie ook vraagstuk 4.6):

$$H(z) = \frac{\hat{Y}(z)}{Z(z)} = \frac{0,054}{1 - 0,146z^{-1}}$$

Omdat  $\hat{y}(k/k - 1) = \delta(k - 1) * \hat{y}(k + 1/k)$  kan daarmee de z-getransformeerde van  $\hat{y}(k/k - 1)$  bepaald worden als

$$z\text{-transformatie}[\hat{y}(k/k - 1)] = z^{-1} \hat{Y}(z) = z^{-1} H(z)Z(z).$$

Hiermee kan de z-getransformeerde van het innovatieproces als volgt berekend worden:

$$\begin{aligned} \xi(k) &= z(k) - \hat{y}(k/k - 1) \\ \Rightarrow \Xi(z) &= Z(z) - z^{-1} \frac{0,054}{1 - 0,146z^{-1}} Z(z) \\ &= \frac{1 - 0,2z^{-1}}{1 - 0,146z^{-1}} Z(z) \end{aligned}$$

Afgezien van een schalingsconstante is het resultaat van de Wold-decompositie inderdaad identiek aan de whitening benadering. Opgemerkt wordt nogmaals dat dit alleen voor zwak-stationaire signalen geldig is.  $\square$

## 5.3. Kalman 1-steps predictor

### 5.3.1. Afleiding

De Wold-decompositie heeft aangegeven dat het berekenen van de 1-steps predictor  $\hat{y}(k/k-1)$  van essentieel belang is. Omdat voor elke Kalman schatter (predictor, filter, interpolator) eerst het innovatieproces  $\xi(k)$  bepaald moet worden, kan de 1-steps predictor als de meest fundamentele Kalman schatter gezien worden. Om die reden staan we uitgebreid stil bij de afleiding van deze schatter. Andere vormen van Kalman schatters komen slechts kort aan de orde omdat ze relatief eenvoudig uit de Kalman 1-steps predictor afgeleid kunnen worden.

We observeren een signaal  $z(k)$  dat verstoord is door additieve witte signaal-onafhankelijke ruis  $v(k)$  met verwachting nul en variantie  $\sigma_v^2(k)$ :

$$z(k) = y(k) + v(k) \quad (5.13)$$

Het oorspronkelijke signaal  $y(k)$  modelleren we als de uitgang van een dynamisch systeem beschreven door de volgende toestandsvergelijkingen:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}(k)w(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Hierbij is  $w(k)$  witte ruis met verwachting nul en variantie  $\sigma_w^2(k)$  die onafhankelijk verondersteld wordt van  $v(k)$ . De dimensie van de toestandsvector  $\mathbf{x}(k)$  is  $p \times 1$ , die van  $\mathbf{A}(k)$   $p \times p$ ,  $\mathbf{B}(k)$  is  $p \times 1$ , en  $\mathbf{C}(k)$  is  $1 \times p$ . De 1-steps predictor van  $y(k)$  is gebaseerd op de innovaties  $\xi(m)$  met  $m \leq k-1$  en wordt gegeven door:

$$\hat{y}(k/k-1) = \sum_{n=-\infty}^{k-1} \mathbf{h}(k,n) \xi(n) \quad (5.15)$$

De innovaties worden beschreven door

$$\begin{aligned} \xi(k) &= z(k) - \hat{y}(k/k-1) \\ &= z(k) - \mathbf{C}(k) \hat{\mathbf{x}}(k/k-1) \end{aligned} \quad (5.16)$$

waarbij  $\hat{\mathbf{x}}(k/k-1)$  de 1-steps predictie is voor de toestandsvector  $\mathbf{x}(k)$ . Omdat tussen het signaal  $y(k)$  en de toestand  $\mathbf{x}(k)$  een eenduidige relatie bestaat via de matrix  $\mathbf{C}(k)$ , concentreren we ons op de schatting van  $\mathbf{x}(k)$  in plaats van  $y(k)$ . De 1-steps predictor voor de toestandsvector wordt gegeven door:

$$\hat{\mathbf{x}}(k/k-1) = \sum_{n=-\infty}^{k-1} \mathbf{h}(k,n) \xi(n)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{k-1} [h_0(k,n), h_1(k,n), \dots, h_{p-1}(k,n)]' \xi(n) \quad (5.17)$$

Merk op dat  $\mathbf{h}(k,n)$  een  $p \times 1$  vector van filtercoëfficiënten is. Voor deze schatter kunnen de optimale filtercoëfficiënten worden berekend uit de Wiener-Hopf vergelijking:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{x\xi}(k,m) &= E[\mathbf{x}(k)\xi(m)] = \sum_{n=-\infty}^{k-1} \mathbf{h}(k,n) R_{\xi\xi}(n,m) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{k-1} \mathbf{h}(k,n) \sigma_{\xi}^2(n) \delta(n-m) \\ &= \mathbf{h}(k,m) \sigma_{\xi}^2(m) \quad m \in [-\infty, k-1], \forall k \end{aligned} \quad (5.18)$$

Merk op dat voor elke  $k$  en  $m$  de kruiscorrelatie  $\mathbf{r}_{x\xi}(k,m) = E[\mathbf{x}(k)\xi(m)]$  een vector is. De vector van filtercoëfficiënten wordt gegeven door

$$\mathbf{h}(k,m) = \begin{cases} E[\mathbf{x}(k)\xi(m)] \sigma_{\xi}^{-2}(m) & m \leq k-1 \\ 0 & m > k-1 \end{cases} \quad (5.19)$$

en de toestandsvector-predictor door:

$$\hat{\mathbf{x}}(k/k-1) = \sum_{n=-\infty}^{k-1} E[\mathbf{x}(k)\xi(n)] \sigma_{\xi}^{-2}(n) \xi(n) \quad (5.20)$$

Dit resultaat, dat gebruik maakt van de tijdvariante vector-impulsresponsie  $\mathbf{h}(k,m)$ , vertoont uiteraard veel overeenkomsten met de uitdrukking voor  $\hat{y}(k+M/k)$  in (5.12).

We gaan nu via enkele manipulaties (5.20) op een efficiëntere manier schrijven door gebruik te maken van de toestandsvergelijkingen (5.14). We verhogen eerst de index  $k$  in (5.20) met 1 en vullen vervolgens  $\mathbf{x}(k+1)$  in met behulp van (5.14):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1/k) &= \sum_{n=-\infty}^k E[\mathbf{x}(k+1)\xi(n)] \sigma_{\xi}^{-2}(n) \xi(n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^k E[\{\mathbf{A}(k+1)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k+1)w(k+1)\} \xi(n)] \sigma_{\xi}^{-2}(n) \xi(n) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Omdat vanwege causaliteit  $\xi(n)$  niet kan afhangen van  $w(k+1)$  voor  $n < k+1$ , geldt

$$E[w(k+1)\xi(n)] = 0 \quad n < k+1 \quad (5.22)$$

Hiervan gebruik makend kan (5.21) herschreven worden als een recursieve uitdrukking in  $\hat{\mathbf{x}}(k/k - 1)$ . Eerst wordt (5.22) gebruikt om (5.21) te vereenvoudigen. Vervolgens wordt de sommatie gesplitst in twee delen, die daarna vereenvoudigd kunnen worden:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}(k + 1/k) &= \sum_{n=-\infty}^k E\{[\mathbf{A}(k + 1)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k + 1)w(k + 1)]\xi(n)\} \sigma_{\xi}^{-2}(n) \xi(n) \\
 &= \mathbf{A}(k + 1) \sum_{n=-\infty}^k E[\mathbf{x}(k)\xi(n)] \sigma_{\xi}^{-2}(n) \xi(n) \\
 &= \mathbf{A}(k + 1) \sum_{n=-\infty}^{k-1} E[\mathbf{x}(k)\xi(n)] \sigma_{\xi}^{-2}(n) \xi(n) + \mathbf{A}(k + 1) E[\mathbf{x}(k)\xi(k)] \sigma_{\xi}^{-2}(k) \xi(k) \\
 &= \mathbf{A}(k + 1) \hat{\mathbf{x}}(k/k - 1) + \mathbf{K}(k + 1, k) \xi(k)
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Hierin noemt men

$$\mathbf{K}(k + 1, k) = \mathbf{A}(k + 1) E[\mathbf{x}(k)\xi(k)] \sigma_{\xi}^{-2}(k) \tag{5.24}$$

de Kalman versterking (ook wel Kalman versterkingsvector of -matrix) voor het tijdstip  $k + 1$  gebaseerd op informatie tot en met tijdstip  $k$ .

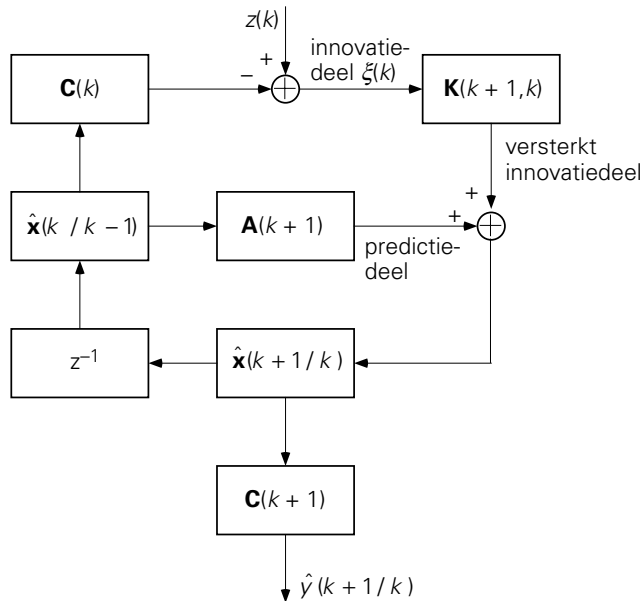
Samengevat wordt het recursieve *1-steps predictie algoritme* nu gegeven door:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}(k + 1/k) &= \mathbf{A}(k + 1) \hat{\mathbf{x}}(k/k - 1) + \mathbf{K}(k + 1, k) \xi(k) \\
 &= \underbrace{\mathbf{A}(k + 1) \hat{\mathbf{x}}(k/k - 1)}_{\text{predictie}} + \mathbf{K}(k + 1, k) \underbrace{[z(k) - \mathbf{C}(k) \hat{\mathbf{x}}(k/k - 1)]}_{\text{innovatie}}
 \end{aligned} \tag{5.25a}$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k + 1/k) = \mathbf{C}(k + 1) \hat{\mathbf{x}}(k + 1/k) \tag{5.25b}$$

Vanuit implementatie oogpunt is (5.25) een aantrekkelijke uitdrukking omdat een nieuwe schatting wordt gevormd als een predictie vanuit het voorgaande resultaat (predictie-deel) gecorrigeerd met de versterkte innovaties die de nieuwe informatie in de observaties bevat. Figuur 5.5 illustreert de structuur van de Kalman 1-steps predictor. Alhoewel de schatter in (5.25a) zelf slechts gebruik maakt van één waarneming  $z(k)$ , worden door de recursieve wijze van implementatie alle voorgaande observaties ook gebruikt (de sommatieondergrens in (5.17) loopt vanaf min-oneindig).

Bovenstaande afleiding geeft de essentie weer van de één-steps predictor en daarmee van alle Kalman schatters. Er dient echter nog wel aangetoond te worden dat het innovatieproces  $\xi(k)$  dat nu verkregen is, inderdaad wit is (paragraaf 5.3.2). Om te komen tot een implementatie van de predictor moeten verder uitdrukkingen



Figuur 5.5. Structuur van de Kalman 1-stap predictor.

gevonden te worden voor de versterking  $\mathbf{K}(k+1, k)$  (paragraaf 5.3.3) en de variantie van de schattingsfout (paragraaf 5.3.4). Het zal blijken dat voor alle benodigde vergelijkingen ook recursieve uitdrukkingen te vinden zijn, zodat de Kalman predictor volledig recursief geïmplementeerd kan worden.

### 5.3.2. Eigenschappen van het innovatieproces

Bij de afleiding van de Kalman 1-staps predictor hebben we aangenomen dat de innovaties  $\xi(k)$  wit zijn, zodat de Wiener-Hopf vergelijking eenvoudig op te lossen was. Er wordt nu aangetoond dat deze aanname juist is, en tevens wordt een uitdrukking bepaald voor de variantie  $\sigma_{\xi}^2(k)$  van de innovaties die nodig is voor de berekening van de Kalman versterking in (5.24). De innovaties  $\xi(k)$  worden eerst geschreven als

$$\begin{aligned}
 \xi(k) &= z(k) - \mathbf{C}(k) \hat{\mathbf{x}}(k/k-1) \\
 &= z(k) - \hat{y}(k/k-1) \\
 &= y(k) + v(k) - \hat{y}(k/k-1) \\
 &= \varepsilon(k/k-1) + v(k)
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

waarbij  $\varepsilon(k/k-1)$  de schattings- of predictiefout is tussen het oorspronkelijke signaal  $y(k)$  en de 1-staps predictie  $\hat{y}(k/k-1)$ . We berekenen nu de autocorrelatiefunctie  $R_{\xi\xi}(k, \ell)$  van de innovaties voor 3 gevallen:

1. Voor  $k > \ell$  geldt:

$$\begin{aligned}
 R_{\xi\varepsilon}(k, \ell) &= E[\xi(k)\xi(\ell)] = E[\{\varepsilon(k/k-1) + v(k)\} \xi(\ell)] \\
 &= E[\varepsilon(k/k-1)\xi(\ell)] + E[v(k)\xi(\ell)] \quad (\text{orthogonaliteitsprincipe}) \\
 &= E[v(k)\xi(\ell)] = E[v(k) \{\varepsilon(\ell/\ell-1) + v(\ell)\}] \quad (\text{causaliteit}) \\
 &= 0 \quad (5.27a)
 \end{aligned}$$

2. Voor  $k < \ell$  geldt:

$$\begin{aligned}
 R_{\xi\varepsilon}(k, \ell) &= E[\xi(k)\xi(\ell)] = E[\xi(k) \{\varepsilon(\ell/\ell-1) + v(\ell)\}] \\
 &= E[\xi(k)\varepsilon(\ell/\ell-1)] + E[\xi(k)v(\ell)] \quad (\text{orthogonaliteitsprincipe}) \\
 &= E[\xi(k)v(\ell)] = E[\{\varepsilon(k/k-1) + v(k)\} v(\ell)] \quad (\text{causaliteit}) \\
 &= 0 \quad (5.27b)
 \end{aligned}$$

3. Voor  $k = \ell$  geldt:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\xi}^2(k) &= R_{\xi\xi}(k, k) = E[\xi(k)\xi(k)] \\
 &= E[\{\varepsilon(k/k-1) + v(k)\} \{\varepsilon(k/k-1) + v(k)\}] \quad (\text{causaliteit}) \\
 &= E[\varepsilon(k/k-1)\varepsilon(k/k-1)] + E[v(k)v(k)] \\
 &= \sigma_{\varepsilon}^2(k/k-1) + \sigma_v^2(k) \quad (5.28)
 \end{aligned}$$

In (5.28) is gebruik gemaakt van het feit dat  $\varepsilon(k/k-1)$  slechts van observaties  $z(m)$  met  $m < k$  afhangt zodat vanwege causaliteit  $\varepsilon(k/k-1)$  en  $v(k)$  ongecorrleerd zijn. Met (5.27) en (5.28) is aangetoond dat de innovaties inderdaad wit zijn met een variantie gegeven door (5.28).

Omdat de Kalman predictor (5.25) niet  $\hat{y}(k/k-1)$  direct oplevert, maar de predictie van de toestandsvector  $\hat{\mathbf{x}}(k/k-1)$ , is het wenselijk om ook (5.28) uit te drukken in de schattingsfout in  $\hat{\mathbf{x}}(k/k-1)$  in plaats van in de schattingsfout in  $\hat{y}(k/k-1)$ . Wanneer we de toestands-predictiefout aangeven met de vector  $\mathbf{e}(k/k-1) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k/k-1)$ , dan kan  $\varepsilon(k/k-1)$  geschreven worden als  $\varepsilon(k/k-1) = \mathbf{C}(k)\mathbf{e}(k/k-1)$ . Vergelijking(5.28) kan dan als volgt herschreven worden:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\xi}^2(k) &= R_{\xi\xi}(k, k) = \sigma_{\varepsilon}^2(k/k-1) + \sigma_v^2(k) \\
 &= E[\varepsilon(k/k-1)\varepsilon^t(k/k-1)] + \sigma_v^2(k) \\
 &= \mathbf{C}(k) E[\mathbf{e}(k/k-1) \mathbf{e}^t(k/k-1)] \mathbf{C}^t(k) + \sigma_v^2(k) \\
 &= \mathbf{C}(k) \mathbf{R}_{ee}(k/k-1) \mathbf{C}^t(k) + \sigma_v^2(k) \quad (5.29)
 \end{aligned}$$

De correlatiematrix  $\mathbf{R}_{ee}(k/k-1)$  geeft de *inwendige* correlaties van de toestand-predictiefout  $\mathbf{e}(k/k-1)$  weer, dat wil zeggen, hoe de elementen van deze vector op tijdstip  $k$  onderling gecorreleerd zijn. Gezien de naam van  $\mathbf{e}(k/k-1)$  wordt deze matrix de (toestands-)predictiefout correlatiematrix genoemd. In (5.29) zijn nu alle elementen bekend behalve de matrix  $\mathbf{R}_{ee}(k/k-1)$ . Paragraaf 5.3.4 gaat in op de bepaling hiervan.

### 5.3.3. Kalmanversterking

Om de Kalman 1-steps predictor te kunnen implementeren, moet ook de Kalmanversterking  $\mathbf{K}(k+1, k)$  bepaald worden. De versterking van de predictor is in (5.24) gedefinieerd als:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(k+1, k) &= \mathbf{A}(k+1) E[\mathbf{x}(k)\xi(k)]\sigma_{\xi}^{-2}(k) \\ &= \mathbf{A}(k+1) E[\mathbf{x}(k)\xi(k)] [\mathbf{C}(k) \mathbf{R}_{ee}(k/k-1) \mathbf{C}^t(k) + \sigma_v^2(k)]^{-1}\end{aligned}\quad (5.30)$$

waarbij de variantie van de innovaties  $\sigma_{\xi}^2(k)$  vervangen is door de uitdrukking afgeleid in (5.29). Om  $\mathbf{K}(k+1, k)$  te kunnen berekenen, worden zowel  $E[\mathbf{x}(k)\xi(k)]$  als  $\mathbf{R}_{ee}(k/k-1)$  bepaald.

Bij de berekening van  $E[\mathbf{x}(k)\xi(k)]$  wordt gebruik gemaakt van de uitdrukking (5.26) voor  $\xi(k)$ :

$$\begin{aligned}E[\mathbf{x}(k)\xi(k)] &= E[\mathbf{x}(k) \{ \mathbf{e}(k/k-1) + v(k) \}^t] \\ &= E[\mathbf{x}(k) \{ \mathbf{C}(k)\mathbf{e}(k/k-1) + v(k) \}^t] \\ &= E[\mathbf{x}(k)\mathbf{e}^t(k/k-1)\mathbf{C}^t(k) + \mathbf{x}(k)v(k)]\end{aligned}$$

Met

$$\mathbf{x}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k/k-1) + \mathbf{e}(k/k-1)$$

en

$$E[\mathbf{x}(k)v(k)] = 0$$

volgt:

$$\begin{aligned}E[\mathbf{x}(k)\xi(k)] &= E[\{ \hat{\mathbf{x}}(k/k-1) + \mathbf{e}(k/k-1) \} \mathbf{e}^t(k/k-1)\mathbf{C}^t(k)] \\ &\quad \text{(orthogonaliteitsprincipe)} \\ &= E[\mathbf{e}(k/k-1)\mathbf{e}^t(k/k-1)] \mathbf{C}^t(k) \\ &= \mathbf{R}_{ee}(k/k-1)\mathbf{C}^t(k)\end{aligned}\quad (5.31)$$

Substitutie van dit resultaat in (5.30) levert

$$\mathbf{K}(k+1, k) = \mathbf{A}(k+1) \mathbf{R}_{ee}(k/k-1)\mathbf{C}^t(k) [\mathbf{C}(k) \mathbf{R}_{ee}(k/k-1)\mathbf{C}^t(k) + \sigma_v^2(k)]^{-1}\quad (5.32)$$

De berekening van deze uitdrukking is nog niet mogelijk omdat er nog geen

uitdrukking voor  $\mathbf{R}_{ee}(k/k-1)$  bepaald is.

### 5.3.4. Ricatti differentievergelijking

Bij de berekening van de Kalman versterking is de correlatiematrix  $\mathbf{R}_{ee}(k/k-1)$  van de fout in de voorspelde toestandsvector vereist. Daartoe wordt eerst een recursieve uitdrukking voor de schattingsfout  $\mathbf{e}(k/k-1)$  bepaald:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}(k+1/k) &= \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1/k) \\
 &= [\mathbf{A}(k+1)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k+1)\mathbf{w}(k+1)] - [\mathbf{A}(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k/k-1) + \mathbf{K}(k+1,k)\xi(k)] \\
 &= \mathbf{A}(k+1)[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k/k-1)] + \mathbf{B}(k+1)\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{K}(k+1,k)\xi(k) \\
 &= \mathbf{A}(k+1)\mathbf{e}(k/k-1) + \mathbf{B}(k+1)\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{K}(k+1,k)[\mathbf{e}(k/k-1) + \mathbf{v}(k)] \\
 &= \mathbf{A}(k+1)\mathbf{e}(k/k-1) + \mathbf{B}(k+1)\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{K}(k+1,k)[\mathbf{C}(k)\mathbf{e}(k/k-1) + \mathbf{v}(k)] \\
 &= [\mathbf{A}(k+1) - \mathbf{K}(k+1,k)\mathbf{C}(k)]\mathbf{e}(k/k-1) + \mathbf{B}(k+1)\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{K}(k+1,k)\mathbf{v}(k)
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Omdat  $\mathbf{w}(k+1)$  en  $\mathbf{v}(k)$  onderling ongecorrleerd zijn, en  $\mathbf{e}(k/k-1)$  onafhankelijk is van  $\mathbf{v}(k)$  en  $\mathbf{w}(k+1)$  vanwege causaliteit, volgt voor de gezochte correlatiematrix:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{ee}(k+1/k) &= E[\mathbf{e}(k+1/k)\mathbf{e}^t(k+1/k)] \\
 &= [\mathbf{A}(k+1) - \mathbf{K}(k+1,k)\mathbf{C}(k)]\mathbf{R}_{ee}(k/k-1)[\mathbf{A}(k+1) - \mathbf{K}(k+1,k)\mathbf{C}(k)]^t \\
 &\quad + \sigma_w^2(k+1)\mathbf{B}(k+1)\mathbf{B}^t(k+1) + \sigma_v^2(k)\mathbf{K}(k+1,k)\mathbf{K}^t(k+1,k) \\
 &= [\mathbf{A}(k+1) - \mathbf{K}(k+1,k)\mathbf{C}(k)]\mathbf{R}_{ee}(k/k-1)\mathbf{A}^t(k+1) \\
 &\quad + \sigma_w^2(k+1)\mathbf{B}(k+1)\mathbf{B}^t(k+1)
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Bij de vereenvoudiging in de tamelijk bewerkelijke laatste stap is gebruik gemaakt van vergelijking (5.32). De recursieve vergelijking (5.34) om de correlatiematrix van de predictiefout te berekenen, staat bekend als de *Ricatti (differentie) vergelijking*. Naast deze vorm zijn ook andere (soms efficiëntere of rekentechnisch aantrekkelijkere) uitdrukkingen bekend voor de Ricatti vergelijking. Deze leveren echter precies hetzelfde resultaat op als verkregen met (5.34). Nu een recursieve uitdrukking bekend is voor  $\mathbf{R}_{ee}(k/k-1)$ , kan de Kalman 1-staps predictor volledig recursief worden geïmplementeerd.

Uit (5.34) blijkt dat de correlatiematrix van de fout in de voorspelde toestand niet afhangt van de observaties  $z(k)$  zelf, maar slechts van de gebruikte modellen. Ook de Kalman versterking (5.32) hangt daarom niet van de observaties af. Beide kunnen zodoende vooraf berekend worden, wat aantrekkelijk kan zijn om de prestaties van een ontworpen Kalman predictor vooraf te bepalen of om de steady-state te berekenen van een Kalman predictor voor een zwak-stationair signaal (zie paragraaf

5.3.6). Voor niet-stationaire signalen kunnen de toestandsvergelijkingen dynamisch veranderen waardoor opslag van de Kalman versterking vooraf niet erg praktisch is.

### 5.3.5. *Begincondities en stabiliteit*

De recursieve relaties die we in de vorige paragrafen hebben afgeleid voor de Kalman 1-steps predictor zijn geldig voor elke waarde van  $k$ . Echter tot nu toe is de vraag onbeantwoord gebleven wat te doen bij het opstarten van het predictieproces. Wanneer de eerste observatie beschikbaar komt, dat wil zeggen  $z(1)$ , dan is de predictie  $\hat{y}(2/1)$  (of equivalent hieraan  $\hat{\mathbf{x}}(2/1)$ ) afhankelijk van deze eerste observatie maar tevens van de onbekende voorspelde toestandsvector  $\hat{\mathbf{x}}(1/0)$  en de toestands-predictiefout correlatiematrix  $\mathbf{R}_{ee}(1/0)$ . De waarden  $\hat{\mathbf{x}}(1/0)$  en  $\mathbf{R}_{ee}(1/0)$  noemt men de *begincondities* van de Kalman predictor.

Aangezien de echte toestandsvector uiteraard niet bekend is op het tijdstip  $k = 0$ , wordt over het algemeen de verwachte waarde van de toestand en de hiervoor geldende correlatiematrix gekozen als acceptabele begincondities. Een vergaande vereenvoudiging, die wel vaak wordt toegepast maar niet noodzakelijk is, is de aanname dat het dynamische systeem dat het signaal modelleert, in rust verkeert op het tijdstip  $k = 0$ :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(1/0) &= E[\mathbf{x}(1)] = \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{ee}(1/0) &= E[\mathbf{x}(1)\mathbf{x}'(1)] = c \mathbf{I}\end{aligned}\tag{5.35}$$

Hierbij is  $c$  groter of gelijk aan de varianties van de toestandselementen. Afhankelijk van de toepassing kunnen echter andere begincondities meer geschikt zijn. In het algemeen geldt dat welke waarden ook gekozen worden als begincondities, deze altijd zullen leiden tot een ‘overgangsverschijnsel’ of ‘opstarteffect’ in de voorspelde waarden  $\hat{y}(k/k - 1)$ . Dit effect zal uitdempen naarmate  $k$  toeneemt. De snelheid waarmee het overgangsverschijnsel uitdempt, hangt sterk af van de gebruikte dynamische modellen en de ‘correctheid’ van de gebruikte begincondities.

Theoretisch levert de Kalman predictor betere resultaten (dat wil zeggen, met een kleinere predictiefout) naarmate er meer en meer observaties beschikbaar komen. Men zegt dat de schatter convergeert en de overgangsverschijnselen uitdempent. In dit opzicht is de Kalman predictor (en daarmee alle Kalman schatters) vergelijkbaar met de Wiener predictor.

Op het gebied van de stabiliteit is er echter een groot verschil tussen de Wiener en Kalman schatters omdat Kalman schatters recursief geïmplementeerd worden en Wiener schatters niet. Alhoewel dit theoretisch geen enkel verschil maakt, is de praktijk toch anders. Van recursieve schatters is namelijk bekend dat zij regelmatig instabiel blijken te zijn terwijl Wiener schatters dit probleem vrijwel niet kennen. Instabiliteit bij een Kalman schatter betekent dat bij een toenemend aantal

observaties de overgangsverschijnselen in plaats van afnemen juist toenemen, waarbij uiteindelijk betekenisloze resultaten verkregen worden. Dit onstabiele gedrag noemt men ook *divergentie* van de schatter.

Vanuit theoretisch oogpunt zou de Kalman predictor altijd stabiel moeten zijn wanneer de toestandsvergelijkingen een fysisch signaal modelleren. Er zijn twee redenen waarom een praktische Kalman predictor toch instabiel kan blijken te zijn:

- (i) Het dynamische systeem dat het signaal modelleert is slechts een benadering van de werkelijkheid. Het gebruik van onvolledige of onjuiste modellen leidt tot *modelfouten*. Deze modelfouten hebben geen enkel effect op de afleiding van de Kalman schatter maar komen pas bij het gebruik van de schatter in de praktijk tot uiting in de vorm van divergerend gedrag. Bij elke toepassing van Kalman schatters is daarom het modelleren van de te schatten signalen van cruciale betekenis.
- (ii) Omdat Kalman schatters recursief zijn en slechts weinig geheugen vergen, kunnen ze zeer goed gebruikt worden in situaties waar snelheid van groot belang is (real-time schattingen). Vervolgens hangt de snelheid van de schatter sterk af van de datarepresentatie en rekenwijze, dat wil zeggen, de manier waarop de observaties, toestandsvectoren en -matrices in een computer of microprocessor opgeslagen worden (bijvoorbeeld fixed point of floating point en het aantal bits dat daarvoor gereserveerd wordt) en de nauwkeurigheid waarmee berekeningen worden uitgevoerd. Afhankelijk hiervan zullen er zekere *afrondingsfouten* optreden, die kunnen cumuleren in de tijd en vervolgens kunnen leiden tot divergentie van de schatter. Dit komt vooral voor in on-line situaties omdat de daarbij vereiste snelheid vaak een relatief onnauwkeurige datarepresentaties vergt.

### 5.3.6. Steady-state gedrag

In dit hoofdstuk zijn we er vanuit gegaan dat de te schatten signalen niet-stationair zijn. Door middel van de tijdvariante toestandsvergelijkingen (5.1) was het mogelijk de optimale tijdvariante lineaire kleinste kwadraten 1-staps predictor af te leiden, namelijk de Kalman 1-stap predictor. Deze schatter kan ook gebruikt worden voor zwak-stationaire signalen waarbij de matrices van het dynamische systeem tijd-onafhankelijk zijn. We krijgen de volgende toestands- en observatievergelijkingen:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(k) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B} w(k) \\
 y(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k) \\
 z(k) &= y(k) + v(k)
 \end{aligned}
 \tag{5.36}$$

Hierbij zijn  $w(k)$  en  $v(k)$  witte ruisprocessen met een verwachting 0 en variantie van respectievelijk  $\sigma_w^2$  en  $\sigma_v^2$ . De Kalman 1-staps predictor voor zwak-stationaire

signalen wordt nu gevonden als:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k+1/k) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k/k-1) + \mathbf{K}(k+1,k)[z(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k/k-1)] \\ \hat{\mathbf{y}}(k+1/k) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k+1/k) \\ \mathbf{K}(k+1,k) &= \mathbf{A}\mathbf{R}_{ee}(k/k-1)\mathbf{C}' [\mathbf{C}\mathbf{R}_{ee}(k/k-1)\mathbf{C}' + \sigma_v^2]^{-1} \\ \mathbf{R}_{ee}(k+1/k) &= [\mathbf{A} - \mathbf{K}(k+1,k)\mathbf{C}] \mathbf{R}_{ee}(k/k-1) \mathbf{A}' + \sigma_w^2 \mathbf{B}\mathbf{B}'\end{aligned}\quad (5.37)$$

Wanneer het gedrag van de Kalman versterking  $\mathbf{K}(k+1,k)$  en de correlatiematrix  $\mathbf{R}_{ee}(k/k-1)$  in de tijd gevolgd wordt, zal blijken dat deze naar *vaste waarden* convergeren, de zogenaamde *steady-state waarden*  $\mathbf{K}^{ss}$  en  $\mathbf{R}_{ee}^{ss}$ . Uit (5.37) volgt dan onmiddellijk dat de steady-state waarden moeten voldoen aan de volgende vergelijkingen:

$$\mathbf{K}^{ss} = \mathbf{A} \mathbf{R}_{ee}^{ss} \mathbf{C}' [\mathbf{C} \mathbf{R}_{ee}^{ss} \mathbf{C}' + \sigma_v^2]^{-1} \quad (5.38a)$$

$$\mathbf{R}_{ee}^{ss} = [\mathbf{A} - \mathbf{K}^{ss} \mathbf{C}] \mathbf{R}_{ee}^{ss} \mathbf{A}' + \sigma_w^2 \mathbf{B} \mathbf{B}' \quad (5.38b)$$

Om rekenwerk te besparen tijdens het schattingsproces kunnen de steady state waarden vooraf bepaald worden door  $\mathbf{K}^{ss}$  uit (5.38) op te lossen. Dit kan echter meestal niet analytisch gebeuren zodat in de praktijk men afwisselend  $\mathbf{R}_{ee}^{ss}$  en  $\mathbf{K}^{ss}$  in (5.38a) en (5.38b) substitueert. Uitgaande van bijvoorbeeld een initiële waarde voor  $\mathbf{R}_{ee}^{ss}$  levert (5.38a) een waarde voor  $\mathbf{K}^{ss}$ . Deze twee samen leveren in (5.38b) een nieuwe waarde voor  $\mathbf{R}_{ee}^{ss}$ , die op zijn beurt weer een nieuwe waarde voor  $\mathbf{K}^{ss}$  oplevert aan de hand van (5.38a). Deze herhaalde substituties of *iteraties* leiden uiteindelijk tot de gezochte steady-state waarde  $\mathbf{K}^{ss}$ , die vervolgens in de Kalman 1-steps predictor (5.37) gebruikt kan worden.

### Voorbeeld 5.3. Steady-state Kalman predictor

We beschouwen dezelfde situatie als waarop de voorbeelden 4.3 en 4.5 gebaseerd zijn. Een zwak-stationaire signaal  $y(k)$  wordt gemodelleerd door middel van de volgende toestandsvergelijkingen:

$$x(k) = 0,2x(k-1) + w(k)$$

$$y(k) = 0,6x(k)$$

met  $\sigma_w^2 = 1$ . Het signaal  $y(k)$  wordt waargenomen in de aanwezigheid van additieve signaal-onafhankelijke ruis met variantie 1:

$$z(k) = y(k) + v(k)$$

Uit vergelijking (5.37) volgt de 1-steps Kalman predictor:

$$\hat{x}(k+1/k) = 0,2 \hat{x}(k/k-1) + \mathbf{K}(k+1,k) [z(k) - 0,6 \hat{x}(k/k-1)]$$

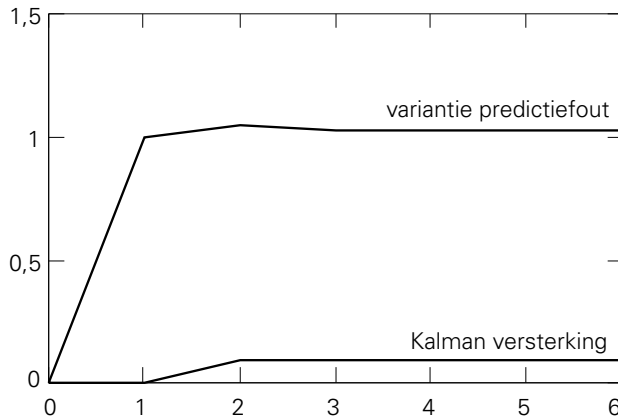
$$\hat{y}(k+1/k) = 0,6 \hat{x}(k+1/k)$$

We berekenen nu de steady-state waarde van de Kalman versterking  $\mathbf{K}(k+1, k)$  aan de hand van vergelijking (5.38):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}^{ss} &= 0,12\mathbf{R}_{ee}^{ss}(0,36\mathbf{R}_{ee}^{ss} + 1)^{-1} \\ \mathbf{R}_{ee}^{ss} &= 0,2\mathbf{R}_{ee}^{ss}(0,2 - 0,6\mathbf{K}^{ss}) + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{R}_{ee}^{ss} = 1,03, \quad \mathbf{K}^{ss} = 0,09$$

Merk op dat  $\mathbf{R}_{ee}$  in dit voorbeeld scalair is. Bij het oplossen van bovenstaand stelsel van vergelijkingen is de negatieve waarde voor  $\mathbf{R}_{ee}^{ss}$  genegeerd, omdat varianties altijd niet-negatief zijn.

Een andere manier om de steady-state waarde voor de Kalman versterking te vinden is om (5.38) iteratief toe te passen. In figuur 5.6 is het convergentiegedrag van de Kalman versterking  $\mathbf{K}(k+1, k)$  en van de variantie van de predictiefout  $\mathbf{R}_{ee}(k/k-1)$  getoond. De waarden waarop de iteraties stabiliseren komen overeen met de oplossing  $\mathbf{R}_{ee}^{ss} = 1.03$  en  $\mathbf{K}^{ss} = 0,09$ .



Figuur 5.6. Convergentiegedrag van de Kalman versterking en variantie van de predictiefout.

Na substitutie verkrijgen we de volgende eenvoudige recursieve 1-staps predictor:

$$\hat{y}(k+1/k) = 0,2 \hat{y}(k/k-1) + 0,54 [z(k) - \hat{y}(k/k-1)]$$

We berekenen de overdracht van de recursieve schatter door middel van z-transformaties. Dit levert:

$$\hat{Y}(z) = 0,2 \hat{Y}(z)z^{-1} + 0,054 [Z(z) - \hat{Y}(z)z^{-1}]$$

$$H(z) = \frac{\hat{Y}(z)}{Z(z)} = \frac{0,054}{1 - 0,146z^{-1}}$$

Deze overdracht is gelijk aan de overeenkomstige Wiener 1-staps predictor uit

voorbeeld 5.2. Hiermee is geïllustreerd dat wanneer bij de afleiding van een Wiener en Kalman schatter van dezelfde modellen wordt uitgegaan, twee verschillende vormen van dezelfde schatter worden verkregen. De afgeleide Kalman schatter is echter rekentechnisch veel aantrekkelijker.  $\square$

## 5.4. Kalman filter

### 5.4.1. Afleiding

De Kalman 1-staps predictor biedt de mogelijkheid elk willekeurig signaal  $z(k)$  te ontbinden in een te voorspellen deel en een wit innovatie deel  $\xi(k)$  (Wold-decompositie):

$$\xi(k) = z(k) - \hat{y}(k/k - 1) \quad (5.39)$$

Uitgaande van deze decompositie zijn nu alle andere Kalman schatters af te leiden. We beperken ons hier tot een korte bespreking van het Kalman filter, dat wil zeggen, de schatter  $\hat{y}(k/k)$  die een schatting maakt van  $y(k)$  op basis van observaties tot en met het tijdstip  $k$ .

We gaan weer uit van de volgende toestandsvergelijkingen:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}(k)w(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (5.40)$$

en we veronderstellen dat  $y(k)$  waargenomen wordt in de aanwezigheid van ruis:

$$z(k) = y(k) + v(k) \quad (5.41)$$

Hierbij zijn  $w(k)$  en  $v(k)$  ongecorreleerde witte ruisprocessen met variantie  $\sigma_w^2(k)$  en  $\sigma_v^2(k)$ . In plaats van  $\hat{y}(k/k)$  te berekenen, kijken we naar de schatting van de toestandsvector  $\hat{\mathbf{x}}(k/k)$ , waaruit vervolgens  $\hat{y}(k/k)$  volgt. De schatter wordt gedefinieerd als een lineaire causale combinatie van het innovatieproces:

$$\hat{\mathbf{x}}(k/k) = \sum_{n=-\infty}^k \mathbf{h}(k,n) \xi(n) \quad (5.42)$$

Omdat we de aan de hand van (5.40) de 1-staps predictie  $\hat{\mathbf{x}}(k/k - 1)$  kunnen herschrijven als

$$\hat{\mathbf{x}}(k/k - 1) = \mathbf{A}(k) \hat{\mathbf{x}}(k-1/k - 1) \quad (5.43)$$

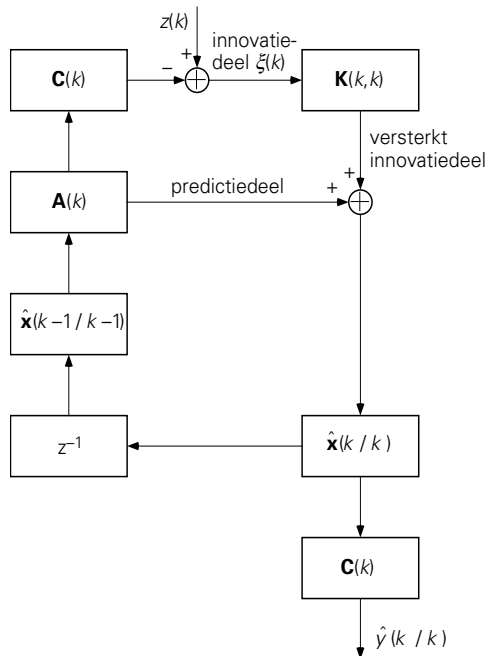
volgt voor het innovatieproces<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned}
 \xi(k) &= z(k) - \hat{y}(k/k-1) \\
 &= z(k) - \mathbf{C}(k) \hat{\mathbf{x}}(k/k-1) \\
 &= z(k) - \mathbf{C}(k)\mathbf{A}(k) \hat{\mathbf{x}}(k-1/k-1)
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

Gebruikmakend van deze innovaties kunnen nu de filtercoëfficiënten  $h(k,n)$  worden berekend en kan de schatter (5.40) worden herschreven op dezelfde wijze als in Paragraaf 5.3.1. In de vraagstukken 5.1 en 5.2 wordt naar deze herschrijving gevraagd. Dit leidt dan tot de volgende uitdrukking voor het Kalman filter:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}(k/k) &= \mathbf{A}(k) \hat{\mathbf{x}}(k-1/k-1) + \mathbf{K}(k,k)\xi(k) \\
 &= \mathbf{A}(k) \hat{\mathbf{x}}(k-1/k-1) + \mathbf{K}(k,k) [z(k) - \mathbf{C}(k)\mathbf{A}(k) \hat{\mathbf{x}}(k-1/k-1)]
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

De vector  $\mathbf{K}(k,k)$  is de Kalman versterking voor tijdstip  $k$  gebaseerd op informatie tot en met tijdstip  $k$ . De analogie tussen het Kalman filter en de Kalman 1-staps predictor spreekt voor zich. In figuur 5.7 wordt de structuur van het Kalman filter geïllustreerd.



Figuur 5.7. Structuur van het Kalman filter.

<sup>2</sup> Het bewijs dat deze keuze tot een wit innovatieproces leidt, wordt hier niet gegeven, maar verloopt zoals het bewijs in paragraaf 5.3.2.

#### 5.4.2. Kalmanversterking en Ricatti differentievergelijking

Om het Kalman filter in vergelijking (5.45) te implementeren, moet de Kalman versterking  $\mathbf{K}(k,k)$  nog gespecificeerd worden samen met de correlatiematrix van de predictiefout  $\mathbf{R}_{ee}(k/k-1)$ . De afleiding hiervan verloopt op de zelfde manier als in paragraaf 5.3.3 en 5.3.4. Daarom worden hier slechts de resultaten gegeven:

$$\mathbf{K}(k,k) = \mathbf{R}_{ee}(k/k-1) \mathbf{C}'(k) [\mathbf{C}(k) \mathbf{R}_{ee}(k/k-1) \mathbf{C}'(k) + \sigma_v^2(k)]^{-1} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ee}(k+1/k) &= E[(\mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1/k))(\mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1/k))'] \\ &= \mathbf{A}(k+1) [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k,k) \mathbf{C}(k)] \mathbf{R}_{ee}(k/k-1) \mathbf{A}'(k+1) \\ &\quad + \sigma_w^2(k+1) \mathbf{B}(k+1) \mathbf{B}'(k+1) \end{aligned} \quad (5.47)$$

Tevens zijn nu de fout in de *toestandsvector*  $\hat{\mathbf{x}}(k/k)$  zelf, meestal de *filterfout* genoemd, en diens correlatiestructuur van belang, omdat deze de kwaliteit aangeven van het uiteindelijk resultaat. Dit in tegenstelling tot de predictiefout correlatiematrix  $\mathbf{R}_{ee}(k/k-1)$  die alleen de fout in de predictie  $\hat{\mathbf{x}}(k/k-1)$  aanduidt maar daarmee nog niets zegt over het uiteindelijke resultaat  $\hat{\mathbf{x}}(k/k)$ . De correlatiematrix van de filterfout, aangegeven door  $\mathbf{R}_{ee}(k/k)$ , is gedefinieerd als

$$\mathbf{R}_{ee}(k/k) = E[(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k/k))(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k/k))'] \quad (5.48)$$

Na substitutie van (5.45) en gebruik van (5.46), is de correlatiematrix van de filterfout (5.48) uit te drukken in de correlatiematrix van de predictiefout  $\mathbf{R}_{ee}(k/k-1)$ :

$$\mathbf{R}_{ee}(k/k) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k,k) \mathbf{C}(k)) \mathbf{R}_{ee}(k/k-1). \quad (5.49)$$

Tevens is aan de hand van deze uitdrukking de variantie van de fout in het gefilterde signaal  $\hat{y}(k/k)$  te bepalen. Het mag duidelijk zijn dat de variantie van de predictiefout altijd groter zal zijn dan de variantie van de filterfout.

#### 5.4.3. Steady-state gedrag

Als het te schatten signaal  $y(k)$  en de additieve ruis  $v(k)$  zwak-stationair zijn, zullen de Kalman filter vergelijkingen convergeren naar een stabiele toestand, de steady-state. In deze situatie wordt het Kalman filter gegeven door:

$$\hat{\mathbf{x}}(k/k) = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(k-1/k-1) + \mathbf{K}^{ss} [z(k) - \mathbf{C} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(k-1/k-1)] \quad (5.50)$$

$$\hat{y}(k/k) = \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(k/k)$$

waarbij  $\mathbf{K}^{ss}$  de vaste steady-state waarde van de Kalman versterking is. Deze waarde moet tegelijkertijd voldoen aan vergelijking (5.46) en (5.47), zodat  $\mathbf{K}^{ss}$  een oplossing is van:

$$\mathbf{K}^{ss} = \mathbf{R}_{ee}^{ss} \mathbf{C}' [\mathbf{C} \mathbf{R}_{ee}^{ss} \mathbf{C}' + \sigma_v^2]^{-1} \quad (5.51a)$$

$$\mathbf{R}_{ee}^{ss} = \mathbf{A} [\mathbf{I} - \mathbf{K}^{ss}\mathbf{C}] \mathbf{R}_{ee}^{ss} \mathbf{A}^t + \sigma_w^2 \mathbf{B} \mathbf{B}^t \quad (5.51b)$$

In situaties waar (5.50) gebruikt wordt, zal meestal de steady-state Kalman versterking vooraf berekend worden in plaats van gedurende het schattingsproces. Dit brengt een aanzienlijke reductie in het vereiste (on-line) rekenwerk met zich mee.

**Voorbeeld 5.4.** *Steady state Kalman filter*

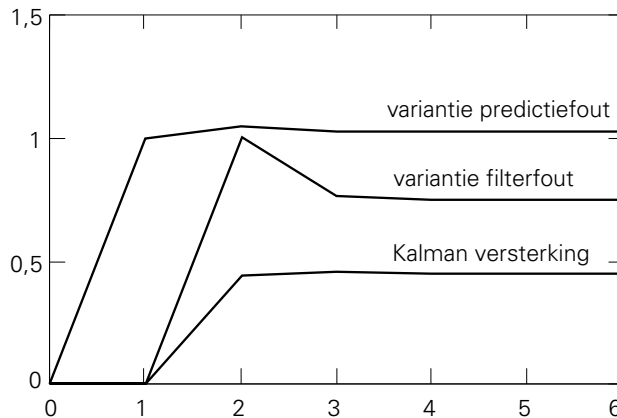
We beschouwen dezelfde situatie als voorbeeld 5.3, maar bepalen nu het steady-state gedrag van het Kalman filter. Uit vergelijking (5.50) volgen de Kalman vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k/k) &= 0,2 \hat{x}(k-1/k-1) + \mathbf{K}(k,k) [z(k) - 0,12 \hat{x}(k-1/k-1)] \\ \hat{y}(k/k) &= 0,6 \hat{x}(k/k) \end{aligned}$$

We berekenen nu de steady state waarde van de Kalman versterking  $\mathbf{K}(k,k)$  aan de hand van vergelijking (5.51):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}^{ss} &= 0,6 \mathbf{R}_{ee}^{ss} (0,36 \mathbf{R}_{ee}^{ss} + 1)^{-1} \\ \mathbf{R}_{ee}^{ss} &= 0,04 \mathbf{R}_{ee}^{ss} (1 - 0,6 \mathbf{K}^{ss}) + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{R}_{ee}^{ss} = 1,03, \mathbf{K}^{ss} = 0,451$$

Tevens volgt uit (5.49) voor de variantie van de filterfout de waarde 0,751. Figuur 5.8 toont het convergentiegedrag van de Kalman versterking  $\mathbf{K}(k,k)$  en van de variantie van de predictiefout en de filterfout. Inderdaad blijkt de filterfout kleiner te zijn dan de predictiefout.  $\square$



Figuur 5.8. Convergentiegedrag van de Kalman versterking en variantie van de predictie- en filterfout.

## 5.5. Uitbreidingen op de standaard Kalman schatters

De in dit hoofdstuk beschreven Kalman predictor en filter kunnen op vele wijzen worden uitgebreid naar meer complexe situaties. In deze paragraaf zal kort worden ingegaan op het geval van vectorobservaties. Andere uitbreidingen liggen op het gebied van speciale recursieve interpolatiemethoden (zogenaamd fixed-interval, fixed-point en fixed-lag smoothing), meer-staps predictiemethoden, niet-witte observatieruis, Kalman filters en predictors voor niet-lineaire signaalmodellen (de zogenaamde extended Kalman filters), en gekoppelde schattings- en identificatiemethoden. In elk van deze uitbreidingen spelen de behandelde Kalman schatters een centrale rol.

Een veelvuldig voorkomende situatie is die van *vectorobservaties*. In plaats van één enkele observatie  $z(k)$  verkrijgen we op tijdstip  $k$  een aantal onderling gecorreleerde observaties  $\mathbf{z}(k) = [z_1(k), \dots, z_M(k)]^t$ . Op basis van deze observaties moet soms één enkel geschat resultaat  $\hat{y}(k/k-1)$  of  $\hat{y}(k/k)$  berekend worden, of dient een vectorresultaat  $\hat{\mathbf{y}}(k/k-1)$  of  $\hat{\mathbf{y}}(k/k)$  bepaald te worden. De toestands- en observatievergelijking wordt nu gegeven door:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}(k) \mathbf{w}(k) \quad (5.52a)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k) \mathbf{x}(k)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{y}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (5.52b)$$

Merk op dat  $\mathbf{B}(k)$  en  $\mathbf{C}(k)$  nu matrices zijn. De ruisvectorprocessen  $\mathbf{v}(k)$  en  $\mathbf{w}(k)$  zijn wit en onderling ongecorreleerd. De inwendige correlatiestructuur van  $\mathbf{v}(k)$  en  $\mathbf{w}(k)$  wordt beschreven door tijdafhankelijke correlatiematrices:

$$\mathbf{R}_{vv}(k) = E[\mathbf{v}(k) \mathbf{v}^t(k)] \quad (5.53)$$

$$\mathbf{R}_{ww}(k) = E[\mathbf{w}(k) \mathbf{w}^t(k)]$$

De afleiding van de Kalman 1-staps predictor en het Kalman filter verloopt in dit geval geheel op de zelfde manier als in het geval van scalaire observaties. Als voorbeeld wordt hier de Kalman 1-staps predictor voor vectorobservaties gegeven:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1/k) = \mathbf{A}(k+1) \hat{\mathbf{x}}(k/k-1) + \mathbf{K}(k+1,k) [\mathbf{z}(k) - \mathbf{C}(k) \hat{\mathbf{x}}(k/k-1)]$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k+1/k) = \mathbf{C}(k+1) \hat{\mathbf{x}}(k+1/k)$$

$$\mathbf{K}(k+1,k) = \mathbf{A}(k+1) \mathbf{R}_{ee}(k/k-1) \mathbf{C}^t(k) [\mathbf{C}(k) \mathbf{R}_{ee}(k/k-1) \mathbf{C}^t(k) + \mathbf{R}_{vv}(k)]^{-1} \quad (5.54)$$

$$\mathbf{R}_{ee}(k+1/k) = [\mathbf{A}(k+1) - \mathbf{K}(k+1,k) \mathbf{C}(k)] \mathbf{R}_{ee}(k/k-1) \mathbf{A}^t(k+1) + \mathbf{B}(k+1) \mathbf{R}_{ww}(k+1) \mathbf{B}^t(k+1)$$

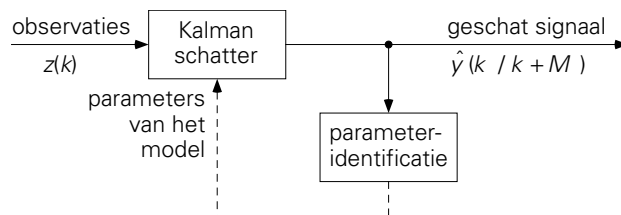
In vergelijking met de 1-steps predictor in paragraaf 5.3 zijn de *scalaire* varianties  $\sigma_w^2(k)$  en  $\sigma_v^2(k)$  hier vervangen door *correlatiematrixes* en zijn  $\mathbf{B}(k)$  en  $\mathbf{C}(k)$  matrixes in plaats van vectoren.

## 5.6. Beperkingen en voorbeelden

### 5.6.1. Beperkingen

Kalman schatters maken het mogelijk de tijdvariante Wiener-Hopf vergelijking (5.5) op efficiënte wijze op te lossen. De algoritmen die voortvloeien uit de Kalman benadering vergen voorinformatie over het te schatten signaal en de ruis in de vorm van de een dynamische model en de varianties van de ruisprocessen. Voor zwak-stationaire signalen hoeft deze informatie slechts éénmaal bepaald te worden, bijvoorbeeld aan de hand van de te verwachten signaalkarakteristieken en de fysische eigenschappen van signaal en ruis. Hierna kunnen de vergelijkingen van de Kalman schatter bepaald kunnen worden. Hoofdstuk 7 (Spectrum Schatten) gaat in op methoden om van een (kortdurend) signaal het vermogensdichtheidsspectrum of de autocorrelatiefunctie te bepalen.

Als echter een signaal niet-stationair is, veranderen de stochastische eigenschappen van het signaal in de tijd. Met andere woorden, voor elk tijdstip zal een ander dynamisch signaalmodel bepaald moeten worden. De wijze waarop de parameters van dit model veranderen in de tijd is vrijwel nooit bekend voorafgaand aan het schattingsproces. Tijdvariante schatters als (5.25) en (5.45) zijn op zich dus niet praktisch bruikbaar, maar zullen vergezeld moeten gaan van een *identificatiemethode* die gedurende het filteren de stochastische eigenschappen van het signaal en de ruis bepaalt. Op grond van de identificatieresultaten op tijdstip  $k$  wordt vervolgens het dynamische signaalmodel voor tijdstip  $k + 1$  bepaald waarmee tevens de Kalman schatter voor dit tijdstip vastligt. Een verdergaande behandeling van deze gecombineerde schattings-identificatiemethoden valt buiten het bestek van dit boek.



Figuur 5.9. Gecombineerde schattings- en identificatiemethode voor tijdvariante signalen.

### 5.6.2. Filteren van beelden

Een bekend probleem uit de digitale beeldreconstructie is het onderdrukken of zo goed mogelijk verwijderen van additief en wit veronderstelde ruis uit een beeld. Een mogelijkheid om hierbij een Kalman filter toe te passen is de twee-dimensionale beeldinformatie om te zetten in een discreet tijdsignaal via een lijnscanningsprocedure. De eenvoudigste methode die hiervoor gekozen kan worden is alle lijnen van het beeld achter elkaar te plaatsen, waarbij niet-stationariteiten aan het eind en begin van een lijn verwaarloosd worden. Met andere woorden, geven we een digitaal beeld aan met  $y_b(m,n)$ ,  $1 \leq m \leq M$ ,  $1 \leq n \leq N$ , dan is het daarbij behorende 1-dimensionale signaal  $y(k) = \{y_b(1,1), y_b(2,1) \dots, y_b(M,1), y_b(1,2), \dots, y_b(1,N), \dots, y_b(M,N)\}$ .

We veronderstellen nu dat de achter elkaar geplaatste beeldlijnen een realisatie is van een zwak-stationair proces  $y(k)$  met verwachting nul (meestal wordt hiertoe het gemiddelde van het signaal afgetrokken) en een exponentieel dalende autocorrelatiefunctie:

$$R_{yy}(k) = \sigma_y^2 \rho^{|k|} \quad (5.55)$$

Hierbij is  $\rho$  ( $0 \leq \rho < 1$ ) de horizontale correlatiecoëfficiënt. Door de lijnscanningsprocedure wordt de verticale correlatie verwaarloosd. De toestandsbeschrijving van het dynamische model dat een signaal met dergelijke stochastische eigenschappen genereert, wordt gegeven door (zie voorbeeld 5.1):

$$x(k) = \rho x(k-1) + w(k) \quad (5.56)$$

$$y(k) = c x(k)$$

met  $c = \sigma_y \sqrt{1 - \rho^2}$  en  $\sigma_w^2 = 1$ . De observatievergelijking wordt gegeven door

$$z(k) = y(k) + v(k) \quad (5.57)$$

Hiermee volgt voor het Kalman filter:

$$\hat{x}(k/k) = \rho \hat{x}(k-1/k-1) + \mathbf{K}^{ss} [z(k) - c\rho \hat{x}(k-1/k-1)] \quad (5.58)$$

Voor de Kalman versterking kan aan de hand van (5.51) geen expliciete uitdrukking bepaald worden. Wel valt af te leiden dat de oplossing voor  $\mathbf{K}^{ss}$  moet voldoen aan:

$$\mathbf{K}^{ss} = \frac{1}{c} \frac{1}{1 + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_y^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{1 - \rho^2} c \mathbf{K}^{ss}\right)} \quad (5.59)$$

Deze uitdrukking laat zien dat wanneer er erg veel ruis aanwezig is in het beeld ( $\sigma_v^2$  is dan erg groot) de Kalman versterking de waarde 0 aanneemt. In dit geval negeert het Kalman filter (5.58) de observaties. Aan de andere kant als er nauwelijks ruis in het signaal aanwezig is ( $\sigma_v^2 = 0$ ), dan wordt  $\mathbf{K}^{ss}$  gelijk aan  $1/c$ . Het Kalman filter levert dan als resultaat

$$\hat{x}(k/k) = \frac{1}{c} z(k)$$

$$\hat{y}(k/k) = c \hat{x}(k/k) = z(k)$$

met andere woorden, de gefilterde waarden zijn identiek aan de observaties.

### 5.6.3. Filteren van niet-stationaire ruis

In dit voorbeeld bekijken we een Kalman filter waarbij het originele signaal  $y(k)$  wel zwak-stationair is, maar de additieve ruis niet. We veronderstellen dat het signaal  $y(k)$  gemodelleerd kan worden als het volgende tweede-orde AR-proces  $y(k)$ :

$$y(k) = y(k-1) + y(k-2) + w(k)$$

met  $\sigma_w^2 = 1$ . Dit signaal wordt waargenomen in de aanwezigheid van additieve signaal-onafhankelijke ruis  $v(k)$  met een tijdvariante variantie

$$\sigma_v^2(k) = 2 + (-1)^k$$

We herschrijven eerst het tweede-orde AR proces in de vorm van een toestands-model:

$$\mathbf{x}(k+1) = [x_1(k+1), x_2(k+1)]^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w(k)$$

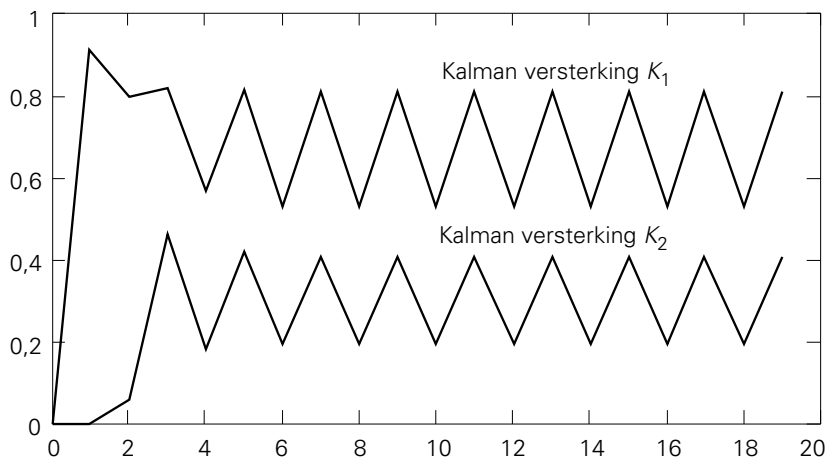
$$y(k) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(k)$$

Op grond van deze vergelijkingen kan het Kalman filter (5.50) worden gebruikt omdat de matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  en  $\mathbf{C}$  niet in de tijd variëren. Echter, de Kalman versterking  $\mathbf{K}(k,k) = [K_1(k,k), K_2(k,k)]^t$  varieert wel in de tijd omdat  $\sigma_v^2(k)$  tijdvariant is. Uit (5.46) en (5.47) zijn uitdrukkingen voor  $\mathbf{K}(k,k)$  en  $\mathbf{R}_{ee}(k+1/k)$  te vinden. Voor de eenvoud van notatie laten we de tijdafhankelijk van de Kalman versterking en de predictiefout correlatiematrix weg:

$$\mathbf{K}(k,k) = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}/(r_{11} + \sigma_v^2(k)) \\ r_{21}/(r_{11} + \sigma_v^2(k)) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{ee}(k+1/k) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(1-K_1-K_2)(r_{11}+r_{12})+(r_{21}+r_{22}) & r_{11}(1-K_1-K_2)+r_{21} \\ (1-K_1)(r_{11}+r_{12}) & r_{11}(1-K_1) \end{bmatrix}$$

Uitgaande van een initiële schatting van  $\mathbf{R}_{ee}(1/0)$  kan het gedrag van  $\mathbf{K}(k,k)$  bepaald worden door middel van successievelijke substituties van  $\mathbf{R}_{ee}(k+1/k)$  en  $\mathbf{K}(k,k)$ . Het resultaat is grafisch weergegeven in figuur 5.10, waarbij als beginconditie gekozen is  $\mathbf{R}_{ee}(1/0) = 10\mathbf{I}$ . Uit figuur 5.10 wordt duidelijk dat reeds na een aantal recursiestappen beide componenten in de Kalman versterkingsvector bij benadering een



Figuur 5.10. Convergentie van de Kalman versterkingsvector ( $K_1, K_2$ ) met als beginconditie  $\mathbf{R}_{ee}(1/0) = 10\mathbf{I}$ .

periodieke steady-state bereiken. Voor oneven tijdstippen is de Kalman versterking groter dan voor even tijdstippen omdat op oneven tijdstippen minder observatieruis aanwezig is.

## 5.7. Samenvatting en belangrijke termen

De Kalman theorie is ontwikkeld om de tijdvariante Wiener-Hopf vergelijking op efficiënte wijze op te lossen, en vindt tegenwoordig toepassing binnen een wijde klasse van schattingsproblemen. Twee essentiële ingrediënten binnen de Kalman theorie zijn:

- Het te schatten signaal dient eerst gemodelleerd te worden door middel van een dynamisch systeem,
- Elk signaal kan worden ontbonden in een te voorspellen deel en een (wit) innovatie deel (Wold-decompositie) volgens:

$$\xi(k) = z(k) - \hat{y}(k/k-1)$$

De recursieve 1-steps predictor speelt een belangrijke rol en vormt de basis voor alle andere Kalman schatters:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1/k) = \mathbf{A}(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k/k-1) + \mathbf{K}(k+1,k)[z(k) - \mathbf{C}(k)\hat{\mathbf{x}}(k/k-1)]$$

$$\hat{y}(k+1/k) = \mathbf{C}(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k+1/k)$$

De Ricatti vergelijking geeft een recursieve uitdrukking voor de correlatiestructuur van de predictiefout. Hieruit is vervolgens ook op recursieve wijze de Kalman versterking te bepalen. Voor zwak-stationaire signalen convergeren deze naar hun

steady-state waarden, waarmee de vergelijkingen van de Kalman 1-staps predictor van de tijd onafhankelijk worden.

Het Kalman filter is af te leiden uit de Kalman 1-staps predictor. De filtervergelijkingen zijn

$$\hat{\mathbf{x}}(k/k) = \mathbf{A}(k) \hat{\mathbf{x}}(k-1/k-1) + \mathbf{K}(k,k)[z(k) - \mathbf{C}(k)\mathbf{A}(k) \hat{\mathbf{x}}(k-1/k-1)]$$

$$\hat{y}(k/k) = \mathbf{C}(k) \hat{\mathbf{x}}(k/k)$$

Ook voor dit Kalman filter zijn recursieve uitdrukkingen bekend voor de predictiefout- en filterfout-correlatiematrix en Kalman versterking.

### *Lijst van belangrijke termen*

begincondities	Kalman schatter
causale lineaire schatter	Kalman versterking
convergentie van een Kalman schatter	predictie-deel van een Kalman schatter
divergentie van een Kalman schatter	predictiefout
dynamisch systeem	recursieve schatter
filterfout	Ricatti vergelijking
gemiddelde kwadratische fout	schatter voor de toestand
innovatieproces	steady-state
innovatie-deel van een Kalman schatter	toestandsvergelijkingen
instabiliteit	vectorobservaties
Kalman één-stap predictor	Wiener-Hopf vergelijking
Kalman filter	Wold decompositie

## Vraagstukken

- 5.1.** Bewijs uitgaande van vergelijking (5.42) en het orthogonaliteitsprincipe, dat de coëfficiënten  $h(k,m)$  van het Kalman filter worden gegeven door:

$$\mathbf{h}(k,m) = \begin{cases} E[\mathbf{x}(k)\xi(m)]/\sigma_{\xi}^2(m) & m \leq k \\ 0 & m > k \end{cases}$$

- 5.2.** Bewijs uitgaande van het resultaat in vraagstuk 5.1 en vergelijking (5.44), dat het filter in vergelijking (5.42) om te schrijven is tot het recursieve filter gegeven in (5.45).

Vraagstuk 5.1 en 5.2 vormen samen in essentie de afleiding van het Kalman filter.

- 5.3.** Vergelijking (5.34) geeft de correlatiematrix van de predictiefout  $\mathbf{R}_{ee}(k/k-1)$ . Bepaal aan de hand hiervan een uitdrukking voor de variantie

van de predictiefout in  $\hat{y}(k/k-1)$ .

- 5.4.** Vergelijking (5.49) geeft de correlatiematrix van de filterfout  $\mathbf{R}_{ee}(k/k)$ . Bepaal aan de hand hiervan een uitdrukking voor de variantie van de filterfout in het signaal  $\hat{y}(k/k)$ .
- 5.5.** Een radar signaal  $y(k)$  wordt gemodelleerd als het volgende ARMA proces:

$$y(k) = a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + a_3y(k-3) + b_0w(k) + b_1w(k-1)$$

Het ruisproces  $w(k)$  heeft verwachte waarde nul en een variantie  $\sigma_w^2$ . Het waargenomen signaal  $z(k)$  bestaat uit een middeling van  $y(k)$  en  $y(k-1)$ , en tevens is er een additieve (ongecorreleerde signaal-onafhankelijke) ruiscomponent  $v(k)$  aanwezig met variantie  $\sigma_v^2$  en gemiddelde waarde nul.

- Geef een toestandsbeschrijving voor het signaal  $y(k)$ .
  - Geef een uitdrukking voor de observatievergelijking.
  - Geef een uitdrukking voor de Kalman 1-steps predictor (NIET de Kalman versterking en predictiefout-correlatiematrix).
  - Idem voor het Kalman filter.
  - Welke van de twee schatters (c) en (d) zal de kleinste gemiddelde kwadratische fout hebben en waarom?
- 5.6.** Van een discreet zwak-stationair stochastisch signaal  $y(k)$  is de verwachte waarde gelijk aan nul en wordt de autocorrelatiefunctie gegeven door

$$R_{yy}(k) = \rho^{|k|}$$

met  $\rho$  de correlatiecoëfficiënt van het signaal.

- Ontwerp een lineair systeem dat aan de uitgang een stochastisch signaal genereert met dezelfde statistische eigenschappen als bovengenoemd signaal (shaping filter).
- Geef een inwendige beschrijving van dit systeem met behulp van een differentievergelijking.

Stel dat het signaal  $y(k)$  wordt waargenomen in de aanwezigheid van witte ruis  $v(k)$ , ongecorreleerd met  $y(k)$  en met gemiddelde waarde nul.

- Geef een uitdrukking voor het Kalmanfilter-algoritme dat een schatting geeft van  $y(k)$  op basis van observaties  $z(k) = y(k) + v(k)$ .
- 5.7.** In de lineaire filter theorie is de Wiener-Hopf vergelijking één van de meest essentiële vergelijkingen die tot de ontwikkeling van zowel de Wiener als Kalman theorie heeft geleid. Geef de definitie van de volgende termen, en leg tevens uit wat deze termen met de Wiener-Hopf vergelijking te maken hebben:

- a. Lineaire schatter;
- b. Kwadratisch criterium;
- c. Orthogonaliteitsprincipe;

Bij de afleiding van de causale Wiener schatter wordt gebruik gemaakt van een whitening filter.

- d. Bespreek (geen berekeningen!) de signaaldecompositie door middel van een whitening filter.

Bij de afleiding van de Kalman schatters wordt de Wold-decompositie toegepast.

- e. Bespreek (geen berekeningen!) de Wold-decompositie.
- f. Voor welk type signaal is de signaaldecompositie onder (d) en (e) identiek (afgezien van een schalingsconstante).

Aan welk type schatter (Wiener/Kalman, predictor/filter/interpolator, causaal/ niet-causaal) geeft u de voorkeur in de volgende twee gevallen. Motiveer uw antwoord en geef een korte omschrijving (blokschema, vergelijking) van de door u gekozen schatter.

- g. Het off-line filteren van grote hoeveelheden data (batch-processing).
- h. Het on-line meten van de afstand tussen een robot en obstakels om botsingen te voorkomen (collision avoidance).

**5.8.** Bij de afleiding van de causale Wiener schatter wordt gebruik gemaakt van een whitening filter.

- a. Bespreek (geen berekeningen!) deze signaaldecompositie.

Bij de afleiding van de Kalman 1-staps predictor wordt de Wold-decompositie toegepast.

- b. Bespreek tevens deze signaaldecompositie.
- c. Voor welk type signaal is de signaaldecompositie onder (a) en (b) identiek (afgezien van een schalingsconstante).
- d. Wat kunt u zeggen over de schatters in (a) en (b) als uitgegaan wordt van dezelfde modelkennis en van de onder (c) gevraagde signaaleigenschap.
- e. Welk type schatter verdient echter meestal de voorkeur en waarom?