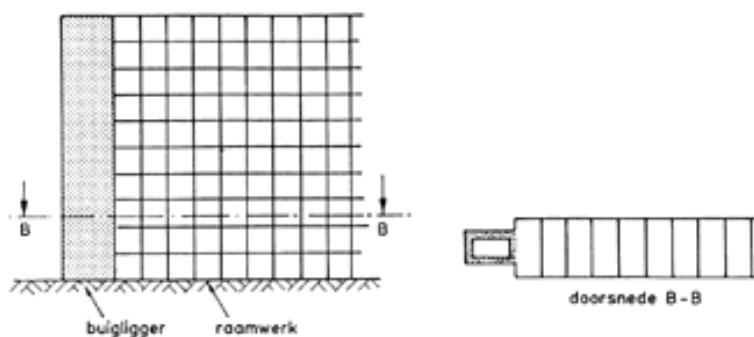


# 14

## De combinatie van een afschuifligger en een buigligger, een parallelsysteem

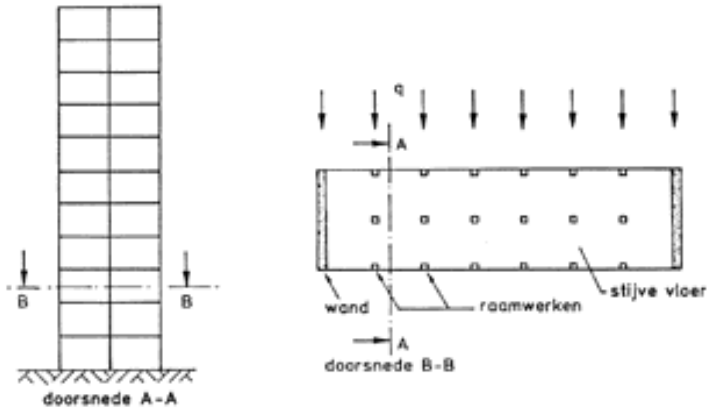
### 14.1. Inleiding

Eerder hebben we gezien dat een hoog raamwerk (skelet) zich gedraagt als een afschuifligger. Deze raamwerken komen veel voor bij gebouwen. Zij zijn evenwel vaak verbonden met buigstijve elementen in de vorm van trappenhuisen en liftkokers, zoals in figuur 14.1 is weergegeven. Een horizontale belasting wordt dan door de beide elementen, raamwerk dan wel afschuifligger en buigligger gezamenlijk opgenomen, waarbij beide dezelfde horizontale verplaatsingen ondergaan. Er is hier dus sprake van een parallelsysteem.



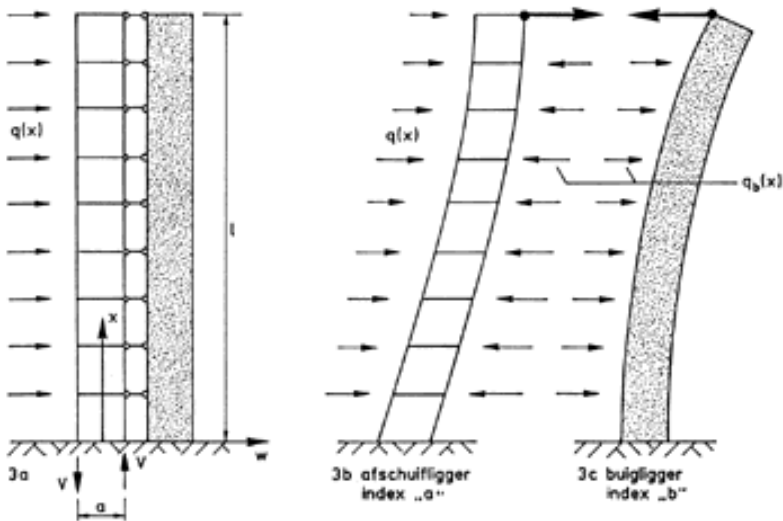
Figuur 14.1. Raamwerk met trappenhuis, dan wel liftkoker.

Vaak worden ook speciale verstijwingswanden aangebracht die meewerken bij het opnemen van horizontale krachten. In figuur 14.2 is hiervan een voorbeeld gegeven. Het gebouw, dat bestaat uit een aantal smalle, hoge, naast elkaar geplaatste raamwerken, wordt aan de zijkanten afgesloten door buigstijve wanden. Een horizontale belasting wordt nu ten dele door de raamwerken opgenomen, ten dele door de vloeren overgebracht naar deze kopwanden. Als deze vloeren in hun vlak oneindig stijf worden ondersteund, wat in het algemeen verantwoord is, krijgen raamwerken en wanden dezelfde verplaatsingen en is er wederom sprake van een parallelsysteem.



*Figuur 14.2. Raamwerken met verstijwingswanden.*

Voor een onderzoek naar de krachswerking in deze constructie beschouwen we het schema van figuur 14.3a waar een afschuifligger in de vorm van een raamwerk met behulp van horizontale pendelstaven verbonden is met een buigstijve ligger in de vorm van een hoge wand. De afschuifligger is aan de onderzijde plaatsvast verbonden aan een fundering, de buigligger is aan de voet ingeklemd. Op de afschuifligger grijpt een verdeelde horizontale belasting  $q(x)$  aan. De vervorming die elk van de liggers onder invloed van deze belasting zou ondergaan is respectievelijk in figuur 14.3b en 14.3c weergegeven. Deze vormen zijn niet compatibel en er ontstaan daarom verdeelde reactiekrachten tussen de beide liggers. Men ziet gemakkelijk in dat onderaan de afschuifligger wordt “geholpen” door de buigligger en dat bovenaan het omgekeerde het geval is.



*Figuur 14.3. Schema van afschuifligger met buigligger.*

## 14.2. De differentiaalvergelijking en oplossingen

Bij het afleiden van de differentiaalvergelijking wordt dezelfde gedachtengang gevolgd als in het vorige hoofdstuk. Voor het aandeel in de belasting dat door de afschuifligger wordt opgenomen geldt:

$$q_a(x) = -GA \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (14.1)$$

waarin  $GA$  de afschuifstijfheid van het raamwerk is.

Voor het aandeel in de belasting dat door de buigligger wordt opgenomen geldt:

$$q_b(x) = EI \frac{d^4 w}{dx^4} \quad (14.2)$$

waarin  $EI$  de buigstijfheid van de wand is.

Voor de totale belasting  $q(x)$  op het samenstel van buigligger en afschuifligger geldt dus:

$$q(x) = q_a(x) + q_b(x) = -GA \frac{d^2 w}{dx^2} + EI \frac{d^4 w}{dx^4} \quad (14.3)$$

en de differentiaalvergelijking die het gedrag van deze constructie beschrijft luidt:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - GA \frac{d^2 w}{dx^2} = q(x) \quad (14.4)$$

De gereduceerde vergelijking

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - GA \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (14.5)$$

heeft als oplossing:\*

$$w = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3 + C_4 x \quad (14.6)$$

waarin  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  en  $C_4$  integratieconstanten zijn en de parameter  $\alpha$  gedefinieerd is door  $\alpha^2 = GA/EI$ .

Bij een constante belasting  $q_0$  luidt de particuliere oplossing:

$$w = -\frac{1}{2} \frac{q_0}{GA} x^2 \quad (14.7)$$

De volledige oplossing van vergelijking (14.4) wordt dus voor een constante belasting  $q_0$ :

---

\* Differentiaalvergelijking en oplossing zijn analoog met die voor de combinatie van een rechte kabel met een buigligger (hoofdstuk 13).

$$w = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3 + C_4 x - \frac{1}{2} \frac{q_0}{GA} x^2 \quad (14.8)$$

Uit deze oplossing kunnen worden afgeleid:

$$\frac{dw}{dx} = \alpha C_1 e^{\alpha x} - \alpha C_2 e^{-\alpha x} + C_4 - \frac{q_0}{GA} x \quad (14.9)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \alpha^2 C_1 e^{\alpha x} + \alpha^2 C_2 e^{-\alpha x} - \frac{q_0}{GA} \quad (14.10)$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3} = \alpha^3 C_1 e^{\alpha x} - \alpha^3 C_2 e^{-\alpha x} \quad (14.11)$$

De integratieconstanten kunnen worden bepaald met behulp van de randvoorwaarden, die moeten worden uitgedrukt in de functie  $w(x)$  en zijn afgeleiden.

Zoals bekend is voor een afschuifligger één randvoorwaarde aan elk van de beide uiteinden noodzakelijk en voldoende, voor een buigligger zijn dit er twee. Van de in dit geval noodzakelijke vier randvoorwaarden zullen er dus slechts twee direct betrekking kunnen hebben op de afschuifligger.

Aan de onderzijde, dus voor  $x = 0$ , geldt voor afschuifligger en buigligger beide:

$$w = 0 \quad (14.12)$$

Omdat de buigligger aan de voet is ingeklemd geldt voor deze ook:

$$\frac{dw}{dx} = 0 \quad (14.13)$$

en omdat de afschuifligger dezelfde verplaatsingen  $w$  ondergaat als de buigligger wordt deze voorwaarde ook opgelegd aan de afschuifligger.

Aan de bovenzijde, dus voor  $x = l$ , is sprake van een vrij uiteinde en omdat op de buigligger geen moment aangrijpt geldt hier:

$$M_b = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (14.14)$$

Ook voor de afschuifligger geldt dat aan de bovenzijde geen moment aanwezig is. Maar het moment in de afschuifligger, dat wordt opgenomen door de normaalkrachten in de kolommen, heeft geen directe relatie met de verplaatsing  $w$ , zodat hieruit geen randvoorwaarde volgt. Voor de dwarskrachten ligt de zaak ingewikkelder.

Voor de dwarskracht in de afschuifligger geldt:

$$D_a = GA \frac{dw}{dx} \quad (14.15)$$

en voor de dwarskracht in de buigligger geldt:

$$D_b = -EI \frac{d^3w}{dx^3} \quad (14.16)$$

De dwarskracht D in een doorsnede van het systeem is de som van deze beide dwarskrachten:

$$D = D_a + D_b \quad (14.17)$$

Aan het vrije uiteinde aan de bovenzijde geldt nu dat deze som van dwarskrachten gelijk moet zijn aan nul:

$$D = D_a + D_b = 0 \quad (14.18)$$

ofwel:

$$GA \frac{dw}{dx} - EI \frac{d^3w}{dx^3} = 0 \quad (14.19)$$

We zien dat aan het bovineinde de buigligger en de afschuifligger een geconcentreerde kracht op elkaar uitoefenen, zoals in de figuren 3b en 3c is aangegeven, die voor elk de randwaarde is van de dwarskracht. Het verloop van de verdeelde interactie tussen buigligger en afschuifligger vertoont aan het bovineinde dus een singulariteit. Substitutie van de oplossing voor w en zijn afgeleiden in de vier randvoorwaarden leidt tot een stelsel algebraïsche vergelijkingen, waaruit de constanten kunnen worden opgelost. Gevonden wordt:

$$C_1 = \frac{1 - \alpha l e^{-\alpha l}}{\alpha^2(e^{\alpha l} + e^{-\alpha l})} \frac{q_0}{GA} \quad (14.20)$$

$$C_2 = \frac{1 + \alpha l e^{\alpha l}}{\alpha^2(e^{\alpha l} + e^{-\alpha l})} \frac{q_0}{GA} \quad (14.21)$$

$$C_3 = -\frac{2 + \alpha l (e^{\alpha l} - e^{-\alpha l})}{\alpha^2(e^{\alpha l} + e^{-\alpha l})} \frac{q_0}{GA} \quad (14.22)$$

$$C_4 = \frac{q_0 l}{GA} \quad (14.23)$$

Substitutie van deze uitkomsten in de uitdrukkingen (14.8) tot en met (14.11) leidt tot de gezochte oplossingen voor de functie w en zijn afgeleiden.

Hiermee zijn ook het buigend moment  $M_b$  en de dwarskrachten  $D_a$  en  $D_b$  bekend. Het is duidelijk dat het gecompliceerde formules betreft en er wordt daarom van afgezien deze hier weer te geven. Overgang op hyperbolische functies maakt de formules iets eenvoudiger. Gevonden wordt onder meer:

$$w = \frac{q_0 l^2}{GA} \left( -\frac{1 + \alpha l \sinh \alpha l}{(\alpha l)^2 \cosh \alpha l} + \frac{\cosh \alpha x + \alpha l \sinh \alpha(l-x)}{(\alpha l)^2 \cosh \alpha l} + \frac{x}{l} - \frac{x^2}{2l^2} \right) \quad (14.24)$$

$$M_b = -EI \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{EI}{GA} q_0 \left( -\frac{\cosh \alpha x + \alpha l \sinh \alpha(l-x)}{\cosh \alpha l} + 1 \right) \quad (14.25)$$

De uitdrukkingen voor  $D_a$  en  $D_b$  kunnen hieruit gemakkelijk worden afgeleid door (14.24), respectievelijk (14.25) één maal te differentiëren.

In de oplossingen zijn de limietgevallen van de enkele afschuiflijger ( $\alpha \rightarrow \infty$ , dat wil zeggen  $EI = 0$ ) en de enkele buiglijger ( $\alpha \rightarrow 0$ , dat wil zeggen  $GA = 0$ ) besloten. Gevonden wordt (soms na lange uitwerking):

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} w = \frac{q_0 x}{2GA} (2l - x)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} w = \frac{q_0}{24 EI} (x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2)$$

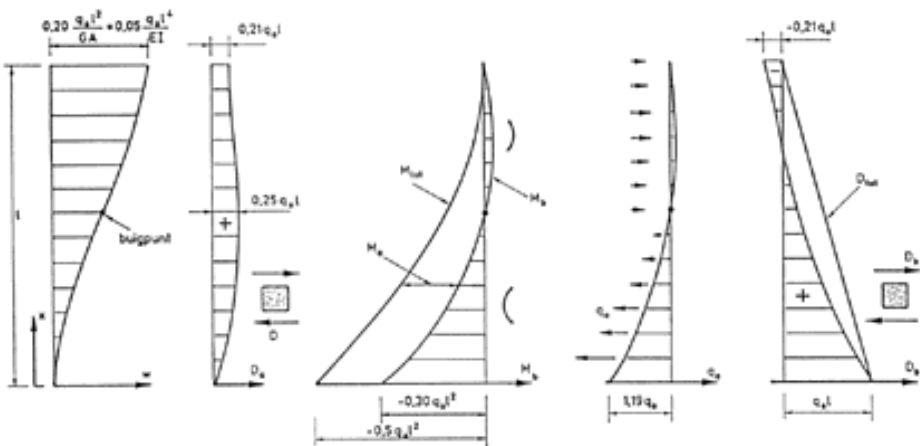
$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} M_b = -\frac{1}{2} q_0 (l - x)^2$$

De aard van de oplossingen hangt uiteraard af van de grootte van de parameter  $\alpha$ . Voor een waarde  $\alpha l = 2$ , dat wil zeggen  $GA l^2 = 4 EI$  zijn in figuur 14.4 de belangrijkste uitkomsten grafisch weergegeven.

De lijn voor de zijdelingse verplaatsingen vertoont van beneden naar boven een toenemende helling tot even boven halverhoogte, waar zich een buigpunt bevindt. Daarboven neemt de helling geleidelijk af. Hier trekt de afschuiflijger de buiglijger als het ware terug. De zijdelingse verplaatsing aan de bovenzijde ( $x = l$ ) bedraagt

$$w = 0,2015 \frac{q_0 l^2}{GA} = 0,0504 \frac{q_0 l^4}{EI}$$

Men vergelijkte deze uitkomsten met die voor de enkele afschuiflijger



Figuur 14.4. Uitkomsten voor het schema van figuur 14.3, met  $\alpha l = 2$ .

$$w = 0,5 \frac{q_0 l^2}{GA}$$

en die voor de enkele buigligger

$$w = 0,125 \frac{q_0 l^4}{EI}.$$

De dwarskracht  $D_a$  in de afschuifligger is evenredig met de helling van de verplaatsingslijn. Het verloop is in figuur 14.4 gegeven. Bovenaan is dus nog een dwarskracht aanwezig ter grootte van  $0,2162 q_0 l$ .

Het buigend moment  $M_b$  in de buigligger, dat evenredig is met de tweede afgeleide van de verplaatsingsfunctie is in de middelste figuur weergegeven. In deze figuur is eveneens het totale moment dat door opvolgende doorsneden van de constructie moet worden opgenomen en dat in dit geval een parabolisch verloop heeft volgens

$$M_{\text{tot}} = -\frac{1}{2} q_0 (l-x)^2 \text{ gegeven.}$$

Het verschil tussen deze beide is het moment  $M_a$  dat door de afschuifligger wordt opgenomen middels de normaalkrachten in de kolommen van het raamwerk. Van het totale moment aan de voet wordt dus 60% door de buigligger opgenomen en 40% door de afschuifligger.

Ook de belasting  $q_a$  op de afschuifligger is evenredig met de tweede afgeleide van de verplaatsingsfunctie. Het verloop is apart weergegeven in de vierde figuur van links. Deze belasting is boven naar rechts en onder naar links gericht. De belasting op de buigligger volgt uit:  $q_b = q - q_a$ . Deze is dus overall naar rechts gericht. In het bovengedeelte is de belasting  $q_b$  iets minder dan de belasting  $q$ . In het onderste deel neemt deze belasting naar beneden toe tot meer dan twee maal  $q$ . De reactie van de buigligger op de afschuifligger is hieraan tegengesteld.

In de laatste figuur is de dwarskracht  $D_b$  in de buigligger, die evenredig is met de derde afgeleide van de verplaatsingsfunctie, weergegeven. Aan de voet van de buigligger is deze gelijk aan de totale belasting op de constructie, met andere woorden, de horizontale belasting op de fundering wordt door de buigligger geleverd. Aan de bovenzijde bedraagt de dwarskracht  $-0,2162 q_0 l$ . Zoals het behoort geldt hier

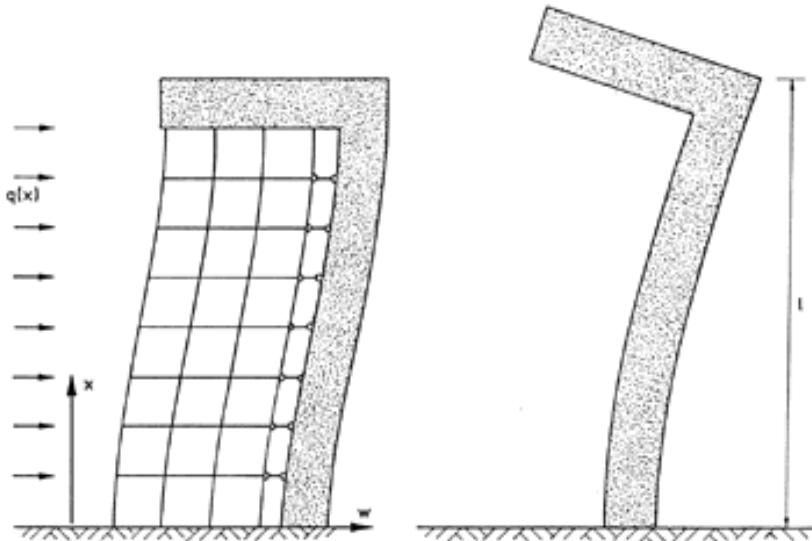
$$D_a + D_b = 0.$$

In het krachtenspel zijn de beide geconcentreerde krachten aan de bovenzijde van groot belang. De ontlasting van de buigligger over het bovenste deel (het terugbuigen) wordt voornamelijk door de geconcentreerde kracht aan de bovenzijde (zie figuur 14.3c) bewerkstelligd.

### 14.3. Extra verstijvingen en verende ondersteuning

Een extra verstijving van de constructie kan worden verkregen door het aanbrengen van een stijve horizontale ligger boven op de wand en het raamwerk (figuur 14.5a).

Om het effect hiervan duidelijk te maken verbinden we deze ligger eerst alleen met de wand (figuur 14.5b). Bij een horizontale belasting van de wand roteert het uiteinde en zal de ligger “opwippen”. Indien de ligger echter aan het raamwerk is bevestigd, zullen de kolommen van het raamwerk dit tegengaan. Wordt weer aangenomen dat de rekstijfheid van deze kolommen oneindig groot is, dan blijft de ligger horizontaal. Het gevolg hiervan is dat de wand bovenaan zover teruggebogen wordt dat hij bij de inklemming in de horizontale ligger verticaal is. De constructie is dus stijver en de horizontale verplaatsingen van wand en raamwerk zullen kleiner zijn dan in het voorafgaande geval, wat is bereikt door gebruik te maken van de axiale stijfheid van de kolommen van het raamwerk.



Figuur 14.5. Verstijving met een zogenaamde “hat”.

Voor het bepalen van de verplaatsingen, buigende momenten, en dwarskrachten kan weer worden uitgegaan van oplossing (14.8). Er gelden nu de volgende randvoorwaarden waarmee de integratieconstanten kunnen worden bepaald.

Aan de onderzijde voor  $x = 0$ :

$$w = 0 \quad (14.26)$$

en

$$\frac{dw}{dx} = 0 \quad (14.27)$$

Aan de bovenzijde voor  $x = l$ :

$$\frac{dw}{dx} = 0 \quad (14.28)$$

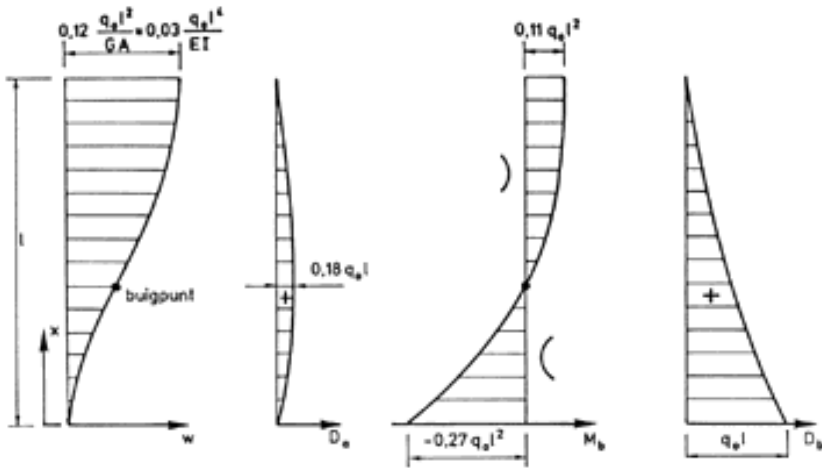
en

$$D_a + D_b = 0 \quad (14.29)$$

Uit (14.28) volgt echter dat  $D_a = 0$ , dus kan in plaats van (14.29) worden gesteld:

$$D_b = 0 \quad \text{of ook:} \quad \frac{d^3 w}{dx^3} = 0 \quad (14.30)$$

De verdere uitwerking wordt hier niet gegeven, evenmin als de gecompliceerde uitdrukkingen voor de verplaatsing en de daaruit af te leiden grootheden. We geven in figuur 14.6 wel enkele uitkomsten voor een waarde  $\alpha l = 2$ , waaruit de vermindering van de verplaatsingen ten opzichte van figuur 14.4 blijkt. Ook de waarde van het buigend moment in de wand bij de inklemming aan de onderzijde wordt gereduceerd, zij het veel minder.



Figuur 14.6. Uitkomsten voor het schema van figuur 14.5 met  $\alpha l = 2$ .

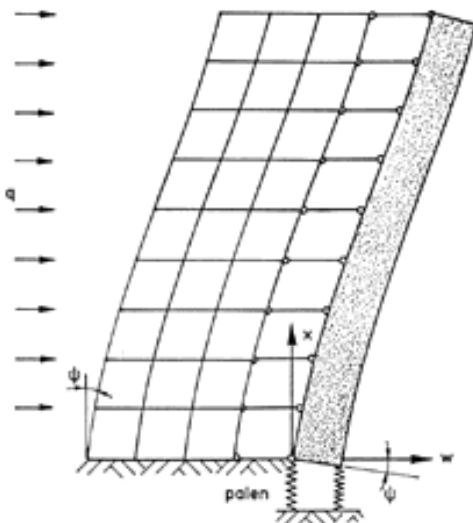
### Verende inklemming

In de beide hier behandelde voorbeelden was de buigligger aan de voet ingeklemd. Het kan echter ook voorkomen dat hier een verende inklemming aanwezig is. Is bijvoorbeeld het gebouw van figuur 14.2 op palen gefundeerd, dan zal meestal het aantal palen onder de groep raamwerken vele malen groter zijn dan het aantal palen onder de beide kopwanden. In dit geval worden bij een horizontale belasting van het gebouw de palen onder de kopwanden veel zwaarder belast dan die onder de groep raamwerken en kan aan de voet van de wanden een niet te verwaarlozen rotatie  $\psi$ , optreden, die een grote invloed heeft op de krachtsverdeling in de constructie (figuur 14.7). De verende ondersteuning kan in belangrijke mate afbreuk doen aan het steunend effect van de buigligger. Als randvoorwaarde geldt nu aan de voet van de wanden (buigligger) (zie ook § 4.2):

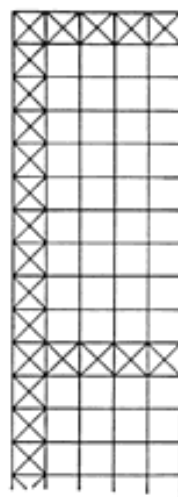
$$M_b = -k_f \psi \quad (14.31)$$

De constante  $k_f$  moet uit de gegeven fundering worden afgeleid. Hiermee gaat de randvoorwaarde over in:

$$-EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -k_f \frac{dw}{dx} \quad (14.32)$$



Figuur 14.7. Verende inklemming van de buigligger.

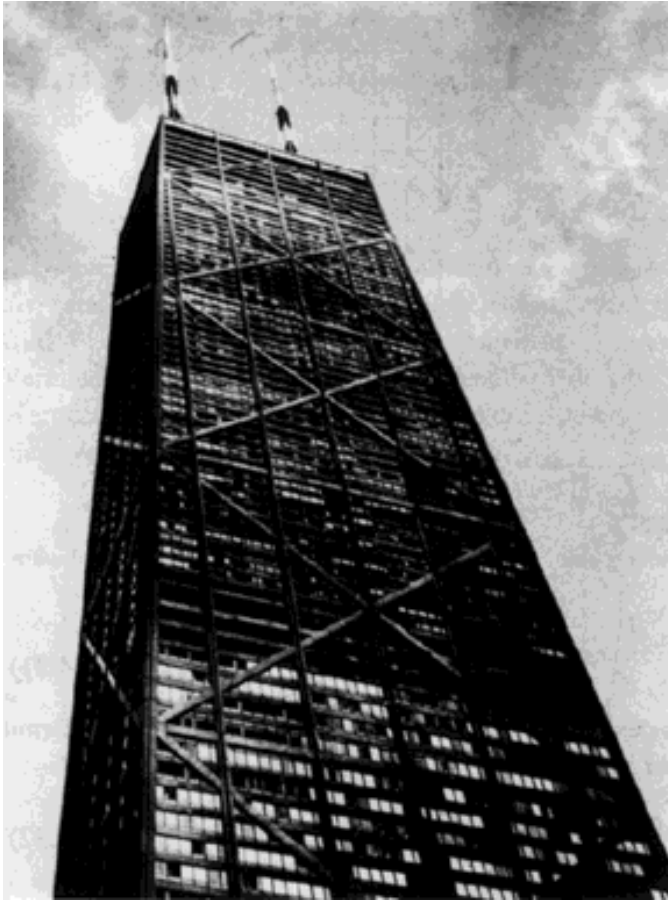


Figuur 14.8. Verstijwingsligger uitgevoerd als vakwerkligger.

Vergeleken met de rotatie aan de voet van de wanden zal de rotatie aan de voet van het raamwerk meestal verwaarloosbaar zijn. Het raamwerk vertoont hier dan een afschuifhoek  $\gamma$ , die gelijk is aan de rotatie  $\psi$ . In dit geval treedt dus aan de voet van het raamwerk een dwarskracht op die gelijk is aan  $D_a = GA \psi$  en wordt een deel van de belasting via het raamwerk naar de fundering overgebracht, waardoor dit raamwerk zwaarder wordt belast.

#### *Gecomplieerdere verstijvingen*

Bij staalskeletten kan de verstijwingswand ook worden uitgevoerd als een vakwerk, zoals bijvoorbeeld in figuur 14.8 is weergegeven. Strikt genomen is een vakwerk niet alleen een buigligger omdat hij naast buiging ook afschuiving vertoont. Het vakwerk is dus iets minder stijf dan uit de buiging alleen zou worden afgeleid. De buigstijfheid wordt bepaald door beide randstaven; de afschuifstijfheid wordt bepaald door de wandstaven. De combinatie van dit systeem met het raamwerk leidt dus tot een ingewikkelder verband dan in de beide voorafgaande gevallen. Een praktische benadering is om de buigstijfheid met bijvoorbeeld 10% te verlagen.



*Afbeelding 14.1. John Hancock Building, Chicago, 1969, hoogte 338 m (Skidmore, Owings en Merrill). Hier is het verstijvende vakwerk in de gevel opgenomen.*

Ook de horizontale verstijvingsligger aan de bovenzijde kan natuurlijk als een vakwerkligger worden uitgevoerd en zo'n horizontale verstijvingsligger kan ook in een verdieping van het raamwerk worden opgenomen. Bij zeer hoge gebouwen brengt men dan ook op verschillende hoogten, bijvoorbeeld om de 20 verdiepingen, een dergelijke horizontale verstijvingsligger aan (figuur 14.8).

#### *Rekstijfheid van de kolommen*

Een complicatie bij zeer hoge gebouwen is dat de samendrukking van de kolommen van het raamwerk niet meer verwaarloosd mag worden. Het raamwerk vertoont dan niet alleen afschuiving maar daarnaast ook buiging, zoals reeds in paragraaf 4.3 is beschreven (blz. 81). Een correcte formulering van het gedrag van het totale systeem van afschuifligger met buiging en buigligger met afschuiving is wel mogelijk. De uitwerking van de opgestelde vergelijkingen is evenwel zeer bewerkelijk en leidt tot gecompliceerde uitdrukkingen. Men moet wel oppassen dat men met zo'n procedure

zijn doel niet voorbij schiet. Analytische methoden dienen tegenwoordig vooral voor het verwerven van een globaal inzicht. Voor de precieze berekening van de krachtwerking zal men bij deze constructies computerprogramma's gebruiken.