

Stabiliteit voor ontwerpers

Prof.ir. D. Dicke

Delft University Press

Inhoud

1. INLEIDING	9
2. VOORBEELDEN IN DE PRAKTIJK	14
2.1. Voorbeelden van translatieveren in de praktijk	14
2.2. Voorbeelden van rotatieveren in de praktijk	18
3. INGEKLEMDE STAVEN	25
3.1. De verend ingeklemde staaf (ongeschoord)	25
3.2. Oneindig stijve staven, verend ingeklemd	27
3.3. Schijnbare stijfheid	29
3.4. Veel voorkomende gevallen	29
3.5. Enkele toepassingen	30
3.6. De buigzame staaf oneindig stijf ingeklemd	36
3.7. De buigzame staaf verend ingeklemd	38
4. VERDEELDE DRUKBELASTING OP DE INGEKLEMDE STAAF	49
4.1. Gelijkmatig verdeelde drukbelasting op staaf	49
4.2. Andere verdelingen van drukbelasting op de staaf	52
5. STAVEN	56
5.1. Staven met twee rotatieveren	56
5.2. Staven met twee stijfheden	61
6. GESCHOORDE STAVEN	70
6.1. Geschoorde staven	70
6.2. Verend ingeklemde staven, volledig gesteund	79
7. FICTIEVE STIJFHEID	83
8. PENDELSTAAF VEREND GESTEUND	86
9. ONDERLINGE STEUN VAN VEREND INGEKLEMDE STAVEN	98
10. PARTIËLE STABILITEIT	108
11. ROTATIESTABILITEIT	112

BIJLAGE A	115
BIJLAGE B	118
BIJLAGE C	126
C.1. Buigslappe staven	126
C.2. Stalen staven	129
C.3. Dwarsbelasting	136
BIJLAGE D	141
OVERDRUKKEN VAN ARTIKELEN UIT TIJDSCHRIFTEN	181
Toelichting op het artikel ‘Hoe oud is de kapitein?’	183
Hoe oud is de kapitein?	184
Vallen en opstaan bij kruipen en knikken	187
INDEX	206

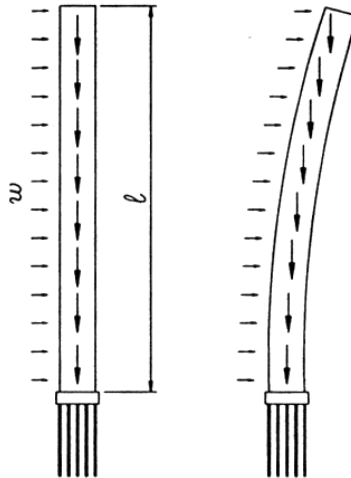
1

Inleiding

Op een bouwwerk werken uitwendige krachten zoals zwaartekracht, wind, gronddruk, waterdruk. Maar ook opgelegde vervormingen door temperatuur, zettingen, krimp en kruip. De draagconstructie van het bouwwerk moet dit alles opvangen en ervoor zorgen dat het bouwwerk gedurende z'n levensduur voldoende veilig, stijf en stabiel is. Het stabiliteitsverschijnsel kennen we al vanaf onze jeugd. Je kan niet alsmaar blokken op elkaar stapelen. De toren gaat bij het hoger stapelen steeds wankeler worden en wordt steeds gevoeliger voor stoten en trillingen. Onder invloed van belastingen vervormt een constructie. In tal van gevallen is de grootte van deze vervormingen van invloed op de grootte van de inwendige krachten in de constructie.

Enige voorbeelden

Op een wolkenkrabber werkt de zwaartekracht als een verticale belasting en de wind als een horizontale belasting. Zie figuur 1.1.



Figuur 1.1.

Door de wind buigt de wolkenkrabber. Door de uitbuiging verplaatst het zwaartepunt van de verticale belasting. Deze verplaatsing veroorzaakt extra buigende momenten, die op hun beurt de uitbuiging en dus de verplaatsing van het zwaartepunt van de verticale belasting vergroten, enzovoorts.

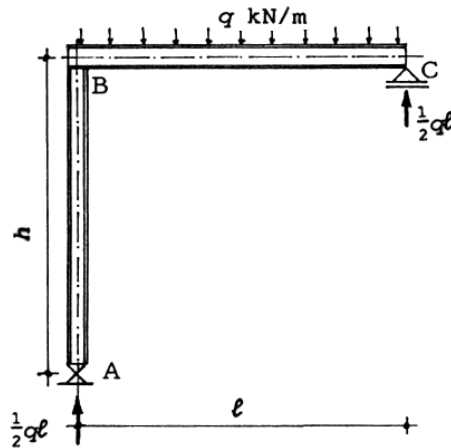
We moeten nu twee gevallen nagaan.

Ten eerste moet dit proces tot rust komen, er moet een toestand van evenwicht ont-

staan, waarbij in de bruikbaarheidsgrenstoestand de totale uitbuiging binnen een vooraf bepaalde limiet blijft.

Ten tweede moet voor de sterkte rekening worden gehouden met die extra buigende momenten.

Het in figuur 1.2 getekende spant is belast door een gelijkmatig verdeelde verticale belasting groot q kN/m. Door de rol bij C zal bij A geen horizontale reactie optreden en zullen dus geen dwarskrachten en momenten in de kolom ontstaan, althans, indien we vergeten om te letten op de vervorming van dit spant.



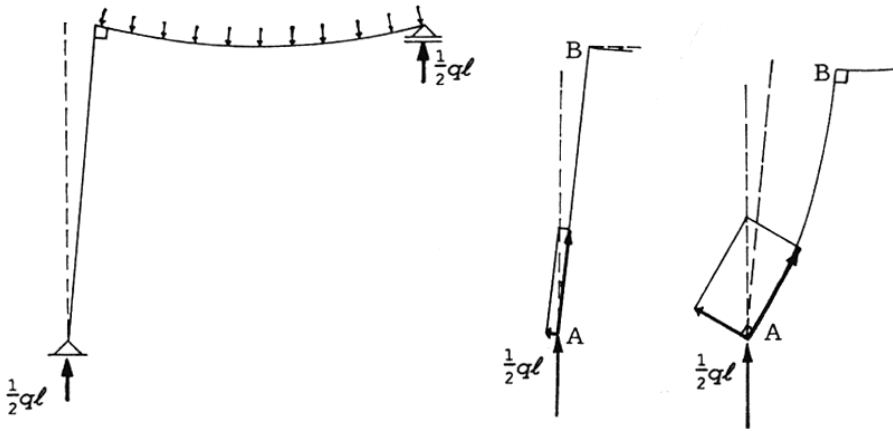
Figuur 1.2.

Doen we dit niet dan zien we dat de ligger doorbuigt en, als we uitgaan van een stijve hoek bij B, dat de rechte hoek bij B niet vervormt en dus de ligger horizontaal verplaatst. De oplegreactie bij A zal afnemen en bij C toenemen, maar dat kunnen we wel verwaarlozen.

Wat we niet kunnen verwaarlozen is de door de scheefstand van de kolom ontstane dwarskracht in de kolom, zie figuur 1.3. We kunnen de oplegreactie ontbinden in een dwarskracht en een normaalkracht. Er ontstaan nu momenten in de kolom die daardoor zal buigen waardoor de horizontale verplaatsing van de ligger groter wordt en dus ook de dwarskracht en de buiging, enzovoorts.

Ook hier een proces waarvan moet worden aangetoond dat het tot een evenwicht komt en waarvan de invloed op de grootte van de buigende momenten moet worden vastgesteld.

In figuur 1.4 is een ligger getekend met een gelijkmatig verdeelde belasting q die tevens een drukkracht moet opnemen door de wijze van ophanging van een belasting F . Deze drukkracht N vergroot de doorbuiging u_0 ,



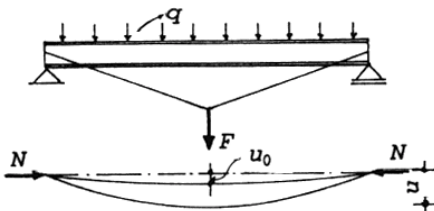
Figuur 1.3. Sterk overdreven getekende verplaatsing van punt B.

$$u_0 = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$$

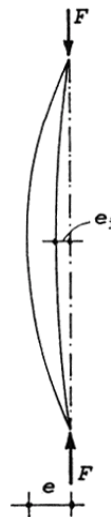
en introduceert tevens eigen momenten $N-u$ als de ligger bij een zakking u in een evenwichtstoestand is gekomen.

En zo zijn er meer voorbeelden te bedenken, zoals de niet rechte pendelkolom uit figuur 1.5, die wordt belast en daardoor buigende momenten moet opnemen die de uitbuiging vergroten waardoor de buigende momenten weer toenemen enzovoorts.

Het zijn steeds de drukkrachten die vervormingen vergroten en daarna tevens grotere buiging veroorzaken. Het evenwicht moet onder invloed van de belastingen stabiel zijn. We spreken kortweg van stabiliteitsproblemen.



Figuur 1.4.



Figuur 1.5.

Het aantonen dat een constructie stabiel is, is met de invoering van de computer eenvoudiger geworden, want met een handberekening een exacte analyse maken van een constructie die gevoelig is voor instabiliteit is vaak een zeer tijdrovende, zo niet onmogelijke zaak. In het ontwerpproces, waar vaak snel beslissingen moeten worden genomen over de vormgeving van een constructie, is het belangrijk om ten eerste inzicht te hebben of we te maken hebben met een reëel stabiliteitsprobleem, ten tweede om de mate van stabiliteit te kunnen vaststellen en ten derde tot een voldoende kwantitatieve benadering van vervormingen en inwendige krachten te komen om globale afmetingen van de constructie te kunnen vaststellen. Blijkt de mate van stabiliteit gering dan kan men de constructievorm wijzigen of de constructie stijver maken. Dit proces mag niet teveel tijd vergen maar moet wel betrouwbaar zijn. In dit boek zal voor lijnvormige constructies een methodiek worden ontwikkeld die inzicht geeft in de problematiek en snel tot betrouwbare kwantitatieve informatie leidt.

Als vormgeving en dimensionering zijn vastgelegd kan eventueel met de computer een meer exacte analyse worden uitgevoerd.

Dat wordt niet in dit boek behandeld.

Tenzij anders vermeld wordt in dit boek uitgegaan van de elasticiteitstheorie. De indeling van dit boek in grote lijnen is als volgt

- Randvoorwaarden van staven
- Verend ingeklemde staven
- Geschoorde staven
- Rotatiestabiliteit
- Imperfecties
- Praktijkvoorbeelden

Randvoorwaarden

Een constructie-element zweeft niet vrij in de lucht. Het is verbonden aan andere elementen, aan vaste punten, gedeeltelijk vaste punten, aan een fundering.

Bekend zijn de rol, het scharnier, de oneindig stijve* inklemming en de pendelstaaf.

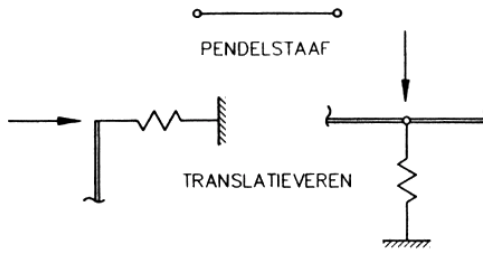
Minder bekend zijn de translatieveer en de rotatieveer.

Zoals ze in figuur 1.6 zijn getekend zijn het schematiseringen van de werkelijkheid.

De translatieveer wordt gekarakteriseerd door de veerconstante k .

k is de kracht die nodig is om de veer een eenheid van lengte te verkorten of te verlengen. De dimensie van k is dus N/mm, kN/m, kN/mm, al naar gelang de dimensies waarmee we in de berekening werken.

* Als in dit boek wordt gesproken over oneindig stijf dan betekent dit dat een inklemming of staaf zó stijf is dat hij als oneindig stijf mag worden geschematiseerd.



		Rotatie		
		VRIJ	BEPERKT	ONMOGELIJK
Translatie ↔	vrij			
	onmogelijk			

Voor deze veren beperkte translatie

Figuur 1.6.

Vallen en opstaan bij kruipen en knikken

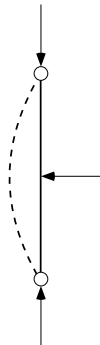
prof.ir. D. Dicke

Kruipknik

In het maartnummer van Cement schreef ir. A.W. de Jongh een interessant artikel over kruipinvloeden in op druk belaste constructiedelen [5]. Hierbij maakte hij gebruik van eenvoudige modellen die de vervormingen nabootsen, zogenaamde reologische modellen. Zijn artikel is een uittreksel uit twee door hem geschreven onderzoeksrapporten, getiteld 'De kruipknik van staal-betonkolommen'. Voor ieder die zich wil verdiepen in deze, voor beton zo belangrijke materie, zeer aan te bevelen literatuur.

Persoonlijk heb ik wel bezwaar tegen de term 'kruipknik', al drukt hij duidelijk uit wat wordt bedoeld. Knik is een zuiver theoretisch begrip. Gegeven een zuiver rechte kolom van een zuiver homogeen en lineair elastisch materiaal, die in al zijn doorsneden zuiver centrisc wordt belast. Door één of andere oorzaak krijgt deze kolom een kleine uitbuiging. Deze kolom is stabiel indien hij na verdwijnen van de oorzaak van de uitbuiging weer in zijn rechte stand terugkeert.

Er is echter een belasting van de kolom, waarbij de uitbuiging niet verdwijnt na wegvallen van de oorzaak van uitbuigen. Behalve de zuiver rechte toestand van de kolom zijn er meer toestanden van evenwicht mogelijk. De belasting waarbij meer toestanden dan alleen de rechte uitgangstoestand mogelijk zijn, noemt men de kritische belasting. Men spreekt ook van de knikkracht F_k of van de Eulerse kracht F_E . Geen enkele kolom voldoet aan de hier gestelde uitgangspunten. Een kolom is nooit zuiver recht, zuiver homogeen, zuiver lineair elastisch, zuiver centrisc belast. Afwijkingen tussen de kolom-as en de werklijn van de drukkracht zullen door deze laatste worden vergroot. Voordat de knikkracht is bereikt is de kolom al òf instabiel geworden, òf bezwaken door overschrijding van bezwijkspanningen van het materiaal.



Figuur 1. Mogelijke oorzaak van kortstondige uitbuiging.

Is het materiaal van de kolom onderhevig aan kruipvervormingen, dan zal de uitbuiging van de kolom met de tijd toenemen zonder belastingverhoging. Bij een

gegeven initiële uitbuiging behoort dan een belasting waarbij de kolom op den duur instabiel wordt, of bezwijkt door overschrijding van de bezwijkspanning van het materiaal. We kunnen deze belasting toch bezwaarlijk de kruipknikkracht van de kolom noemen.

Knik is een theoretisch plotseling gebeuren. We zouden eigenlijk beter het woord knik helemaal kunnen schrappen, evenals het ervan afgeleide begrip kniklengte en voortaan uitgaan van de werkelijke toestand van de kolom, zijn initiële uitbuiging, zijn werkelijke materiaaleigenschappen, de mogelijke excentriciteit van een centrische belasting. Knik en kniklengte behoren tot de, overigens wel handige, rekentrucs die het werkelijke gebeuren versluieren. De Eulerse knikkracht, een zuiver theoretische waarde, blijkt echter nog steeds onmisbaar en speelt een belangrijke rol in stabiliteitsbeschouwingen.

Dit alles naar aanleiding van het woord kruipknik.

Model voor het berekenen van de kruipvervorming

Intussen had voornoemd artikel mij weer herinnerd aan mijn eerste publikatie over stabiliteitsproblemen [2], waarin ik uit een publikatie [1] een formule overnam om de grote invloed van kruip bij stabiliteitsproblemen te benadrukken. Het was vooral prof.ir. H.J. Kist, die tijdens een voordracht voor de STUVO over de invloed van kruip op de momentenverdeling in voorgespannen betonconstructies, een aantal STUVO-leden aan het bestuderen van kruipproblemen heeft gezet. Men spreekt nog steeds van het 'Kist-effect'.

Zelf heb ik in die periode diverse studies gemaakt waarvan ik de aantekeningen bij elkaar heb gezocht en er enkele heb bewerkt voor dit artikel, zodat lezers dit kunnen vergelijken met het artikel van ir. A.W. de Jongh. Ik heb daarbij ook gebruik gemaakt van een model. Het is niet beter of slechter dan het door ir. De Jongh gehanteerde model. Het is geen origineel model; het is al vele jaren in gebruik geweest [1].

Het model ziet er als volgt uit.

Een drukspanning σ_b in beton heeft een ogenblikkelijke elastische vervorming $\epsilon_0 = \sigma_b/E_b$ tot gevolg. Ten gevolge van de kruip zal deze vervorming met de tijd toenemen. De kruipvervorming bedraagt per definitie: $\epsilon'_{kr} = \varphi_t \epsilon_0$. Voor $t \rightarrow \infty$ zal φ_t naderen tot een limietwaarde φ_∞ .

Deze waarde is afhankelijk van veel factoren — zie het artikel van ir. A.W. de Jongh — en zal liggen tussen een kleine waarde ca. 0,4 (beton zal altijd wel iets kruipen, ook oud beton) en een maximum waarde van 4.

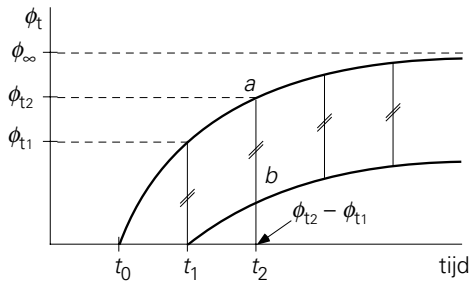
De VB'74 doet een poging om φ_t in orde van grootte vast te stellen.

Het verloop van de kruip met de tijd zou er kunnen uitzien zoals in tabel 1 is weergegeven, indien bijvoorbeeld na 28 dagen verharding wordt belast [6].

Tabel 1.

tijd na belasten	kruiptvervorming in % van totale krimp
1 uur	4
1 dag	10
1 week	20
1 maand	32
1 kwartaal	46
1 halfjaar	60
1 jaar	75
2 jaar	90
5 jaar	100

Deze tabel geeft niet meer dan een indicatie over het verloop van de krimp! Zouden we de tabel in een grafiek uitzetten, dan vinden we zoiets als lijn a in figuur 2. Er is belast op tijdstip t_0 (= 28 dagen verharding). Zouden we nu niet belasten op tijdstip t_0 maar op tijdstip t_1 dan zal het verloop van de krimpfactor φ door lijn b worden weergegeven. Lijn b loopt evenwijdig aan lijn a, dus op elk ogenblik t hebben de lijnen a en b dezelfde waarde $d\varphi/dt$!



Figuur 2. Evenwijdige krimpcurven van Whitney.

Met de tijd neemt ook de elasticiteitsmodulus toe. De krimpfactor φ is zodanig bepaald dat de krimpvervorming, onverschillig op welk moment wordt belast, altijd wordt betrokken op de elastische vervorming die zou zijn opgetreden indien werd belast op het moment t_0 . Indien dus wordt belast op het tijdstip t_1 , dan is op het tijdstip t_2 de krimpvervorming gelijk aan $(\varphi_{t_2} - \varphi_{t_1})\sigma'_b/E_{t_0}$, waarbij σ'_b de betonspanning is ten gevolge van de op het moment t_1 aangebrachte belasting, indien deze spanning tussen t_1 en t_2 niet is toegenomen. De toename (gedurende een tijdje dt) van de krimp op het ogenblik t_2 bedraagt:

$$\frac{\sigma'_b}{E_{t_0}} d(\varphi_{t_2} - \varphi_{t_1}) = \frac{\sigma'_b}{E_{t_0}} d\varphi_{t_2}$$

Omdat a en b evenwijdig lopen is immers $d(\varphi_{t_2} - \varphi_{t_1})$, gelijk aan $d\varphi_{t_2}$.

Stel we belasten eerst op tijdstip t_0 met spanning σ'_{b0} en later nog eens op tijdstip t_1 met spanning σ'_{b1} dan is de kruipvervorming op tijdstip t_2 gelijk aan:

$$\frac{\sigma'_{b0}}{E_{t0}} \varphi_{t2} + \frac{\sigma'_{b1}}{E_{t0}} (\varphi_{t2} - \varphi_{t1})$$

De toename (gedurende een tijdje dt) van de kruipvervorming op tijdstip t_2 bedraagt dan:

$$\frac{\sigma'_{b0}}{E_{t0}} d\varphi_{t2} + \frac{\sigma'_{b1}}{E_{t0}} d(\varphi_{t2} - \varphi_{t1}) = \frac{\sigma'_{b0} + \sigma'_{b1}}{E_{t0}} d\varphi_{t2}$$

Dus om op een willekeurig tijdstip t de toename van de kruipvervorming te bepalen moeten we doen alsof alle belasting, al is die over nog zoveel tijdstippen verdeeld aangebracht, is aangebracht op het tijdstip t_0 . De op deze wijze op het tijdstip t_0 berekende vervorming vermenigvuldigen we dan met $d\varphi$.

Zolang het beton niet is gescheurd nemen we aan dat de kruipvervorming bij ontlasten hetzelfde verloop heeft als bij belasten! Dus indien op tijdstip t_0 wordt belast met spanning σ'_{b0} en op tijdstip t_1 wordt ontlast met spanning σ'_{b1} , dan is de kruipvervorming op tijdstip t_2 gelijk aan:

$$\frac{\sigma'_{b0}}{E_{t0}} \varphi_{t2} - \frac{\sigma'_{b1}}{E_{t0}} (\varphi_{t2} - \varphi_{t1})$$

Indien $\sigma'_{b1} = \sigma'_{b0}$, dus volledige ontlasting van het beton, is de kruipvervorming op tijdstip t_2 gelijk aan:

$$\frac{\sigma'_{b1}}{E_{t0}} \varphi_{t1} = \frac{\sigma'_{b0}}{E_{t0}} \varphi_{t1}$$

Dit is een blijvende vervorming, afhankelijk van het tijdstip van ontlasten.

We werken volgens het 2-parametermodel van Dischinger (figuur 5a van het artikel van ir. De Jongh). De totale blijvende vervorming is gelijk aan

$$\frac{\sigma'_{b0}}{E_{t0}} - \frac{\sigma'_{b1}}{E_{t1}} + \frac{\sigma'_{b0}}{E_{t0}} \varphi_{t1} = \sigma'_{b0} \left(\frac{1 + \varphi_{t1}}{E_{t0}} - \frac{1}{E_{t1}} \right)$$

of voor $E_{t1} = E_{t0}$ gelijk aan $\frac{\sigma'_{b0}}{E_{t0}} \varphi_{t1}$.

Hierin σ'_{b0}/E_{t0} de elastische vervorming bij het belasten en σ'_{b1}/E_{t1} de elastische vervorming bij het ontlasten. Bij onveranderlijke elasticiteitsmodulus zijn beide termen gelijk indien $\sigma'_{b1} = \sigma'_{b0}$.

Indien σ'_{b1} niet gelijk is aan σ'_{b0} en in absolute waarden gerekend kleiner is dan σ'_{b0} , dan is de toename van de kruipvervorming (gedurende een tijdje dt) gelijk aan:

$$\frac{\sigma'_{b0}}{E_{t0}} d\varphi_{t2} - \frac{\sigma_{b1}}{E_{t0}} d(\varphi_{t2} - \varphi_{t1}) = \frac{\sigma'_{b0} - \sigma_{b1}}{E_{t0}} d\varphi_{t2}$$

dus ook gelijk aan de elastische vervorming op tijdstip t_0 alsof alle belasting op tijdstip t_0 was aangebracht, maal de toename van φ op tijdstip t_2 .

Indien het voorgaande duidelijk is, zullen de volgende toepassingen niet zo moeilijk zijn

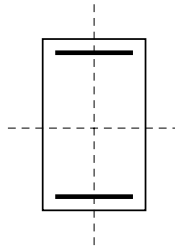
1 Een centrish gedrukte gewapend-betonkolom

Voorwaarde is dat wapening en beton hetzelfde zwaartepunt hebben. De normaalkracht grijpt aan in het zwaartepunt. De normaalkracht N' wordt opgenomen door het beton en door de wapening. Het beton neemt op een belasting N'_b en het staal een belasting N'_a .

$$N' = N'_b + N'_a$$

De directe elastische vervorming op tijdstip t_0 is gelijk aan:

$$\varepsilon'_0 = \frac{N'_b}{E_b A_b} = \frac{N'_a}{E_a A_a}$$



Figuur 3. Dubbelsymmetrische doorsnede.

We gaan er van uit dat de elasticiteitsmodulus van het beton onveranderlijk is en schrijven hiervoor verder E_b . Met $A_a = \omega A_b$ en $E_a = n E_b$ is

$$\frac{N'_b}{E_b A_b} = \frac{N'_a}{\omega n E_b A_b}$$

of

$$N'_a = \omega n N'_b$$

$$N' = (1 + \omega n) N'_b$$

Na de elastische vervorming gaat het beton kruipen. Het staal kruipt niet; het verzet zich tegen het kruipen van het beton. Tijdens het kruipen van het beton wordt het staal geleidelijk aan zwaarder belast en het beton evenveel ontlast.

Stel, op het tijdstip $t = t$ is die ontlastende kracht op het beton aangegroeid tot een

waarde X . Dan is de kracht op het beton op dat moment gelijk aan $(N'_b - X)$. Indien deze kracht op het tijdstip t_0 was aangebracht, dan was de elastische vervorming gelijk geweest aan:

$$\frac{N'_b - X}{E_b A_b}$$

Gedurende een tijdje dt zal de kruipvervorming toenemen met:

$$\frac{N'_b - X}{E_b A_b} d\varphi_t$$

Gedurende dit tijdje dt groeit X aan met dX . Dit krachtje dX zal een directe elastische vervorming geven (negatief, want dX is een ontlastend krachtje) $dX/(E_b A_b)$.

Het beton vervormt dus gedurende het tijdje dt :

$$\frac{N'_b - X}{E_b A_b} d\varphi_t - \frac{dX}{E_b A_b}$$

In ditzelfde tijdje dt neemt de kracht op het staal toe met het krachtje dX . Het staal zal gedurende dt vervormen:

$$\frac{dX}{E_a A_a}$$

Beide vervormingen moeten gelijk zijn, dus:

$$\frac{N'_b - X}{E_b A_b} d\varphi_t - \frac{dX}{E_b A_b} = \frac{dX}{E_a A_a}$$

Of:

$$(N'_b - X)d\varphi_t = dX\left(1 + \frac{1}{\omega n}\right)$$

Daar $d(N'_b - X) = -dX$, kunnen we schrijven:

$$-\frac{\omega n}{\omega n + 1} d\varphi_t = \frac{d(N'_b - X)}{N'_b - X}$$

Integratie hiervan levert:

$$N'_b - X = C \cdot e^{-\frac{\omega n}{\omega n + 1} \varphi_t}$$

Voor $t = t_0$ is $\varphi_t = 0$ en $X = 0$. Dus $C = N'_b$. Dus:

$$X = N'_b \left(1 - e^{-\frac{\omega n}{\omega n + 1} \varphi t} \right)$$

Voor $t = \infty$ (dat is al na enige jaren), is:

$$X_\infty = N'_b \left(1 - e^{-\frac{\omega n}{\omega n + 1} \varphi_\infty} \right)$$

Of:

$$X_\infty = \frac{N'}{\omega n + 1} \left(1 - e^{-\frac{\omega n}{\omega n + 1} \varphi_\infty} \right)$$

De kruipvervorming van de kolom is gelijk aan $X/E_a A_a$ dus aan de toename van de vervorming van het staal.

De verhouding van de kruipvervorming van de kolom tot de elastische vervorming van de kolom is dus gelijk aan:

$$\bar{\varphi} = \frac{X}{N'_a} = \frac{X}{\omega n \cdot N'_b}$$

of:

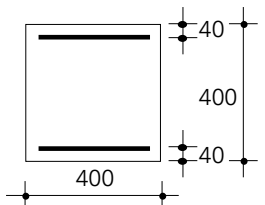
$$\bar{\varphi}_\infty = \frac{1}{\omega n} \left(1 - e^{-\frac{\omega n}{\omega n + 1} \varphi_\infty} \right)$$

$\bar{\varphi}$ is de kruipfactor voor de kolom; φ is de kruipfactor voor het beton.

Op het beton werkt nu $N'_b - X_\infty$; op het staal werkt nu $N'_a + X_\infty$.

Voorbeeld

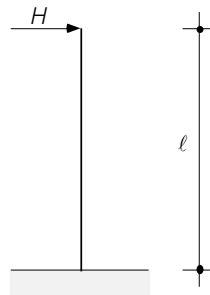
We nemen de kolom uit het artikel van ir. de Jongh als rekenvoorbeeld.



$$A_b = 160\,000 \text{ mm}^2$$

$$A_a = 0,06 A_b = 9600 \text{ mm}^2$$

Figuur 4.



Figuur 5. Op buiging belaste kolom.

Betonkwaliteit B 22,5; $E_b = 28\,000 \text{ N/mm}^2$.

Staalkwaliteit FeB 400; $E_a = 210\,000 \text{ N/mm}^2$.

$$\varphi_\infty = 2; \omega = 0,06$$

$$n = \frac{210000}{28000} = 7,5; \quad \omega n = 0,06 \times 7,5 = 0,45$$

$$N'_a = 0,45 \times N'_b = \frac{0,45}{1,45} N' = 0,31 N'$$

$$N'_b = 0,69 N'$$

$$X_\infty = 0,69 N' \left(1 - e^{-\frac{0,45}{1,45} \times 2} \right) = 0,32 N'$$

Dus uiteindelijk is de kracht op het beton $0,69 - 0,32 = 0,37 N'$ en op het staal $0,31 + 0,32 = 0,63 N'$. De kruip heeft dus een zeer grote invloed op de verdeling van de belasting over het beton en het staal.

De kruipfactor voor de kolom is:

$$\bar{\varphi} = \frac{X_\infty}{N'_a} = \frac{0,32}{0,31} = 1,03$$

2 Een op buiging belaste gewapend-betonkolom

We gaan er van uit dat er voldoende drukkracht aanwezig is, zodat er door de buiging geen trekspanningen kunnen ontstaan. We laten deze drukkracht voorlopig buiten beschouwing. Gegeven wordt een beschouwing aan de hand van een oneindig stijf ingeklemde kolom met een horizontale belasting aan de top. Deze beschouwing geldt echter ook voor op andere wijzen op buiging belaste kolommen.

We bepalen weer welk deel van de belasting door het beton en welk deel door het staal wordt opgenomen. Wapening en beton hebben hetzelfde zwaartepunt. Van de horizontale kracht H wordt een deel H_b door het beton opgenomen en een deel H_a door het staal; $H = H_b + H_a$.

De doorbuiging f_0 bedraagt:

$$f_0 = \frac{H_b l^3}{3E_b I_b} = \frac{H_a l^3}{3E_a I_a}$$

Met $I_a = \mu I_b$ en $E_a = nE_b$ is:

$$f_0 = \frac{H_b l^3}{3E_b I_b} = \frac{H_a l^3}{3\mu n E_b I_b}$$

dus:

$$H_a = \mu n H_b$$

$$H = (1 + \mu n) H_b$$

Het kruipen gaat nu precies zo als bij de op druk belaste kolom. Het kruipen van het beton wordt tegengewerkt door het staal. Er ontwikkelt zich een tegenwerkende kracht X op het beton en dus een extra kracht X op het staal. Op een tijdstip $t = t$ is de kracht

op het beton: $(H_b - X)$. Denken we deze kracht aangebracht op tijdstip t_0 dan is de elastische vervorming:

$$\frac{(H_b - X)l^3}{3E_bI_b}$$

Gedurende het tijdje dt zal de kruipvervorming van het beton gelijk zijn aan

$$\frac{(H_b - X)l^3}{3E_bI_b} d\varphi$$

Gedurende dt ontwikkelt zich tegenwerkend krachtje dX , dat een elastische terugbuiging geeft:

$$\frac{dX \cdot l^3}{3E_bI_b}$$

Het krachtje dX geeft het staal een uitbuiging:

$$\frac{dX \cdot l^3}{3E_aI_a}$$

Dus geldt:

$$\frac{(H_b - X)l^3}{3E_bI_b} d\varphi - \frac{dX \cdot l^3}{3E_bI_b} = \frac{dX \cdot l^3}{3E_aI_a}$$

Op dezelfde wijze als bij de gedrukte kolom vinden we nu:

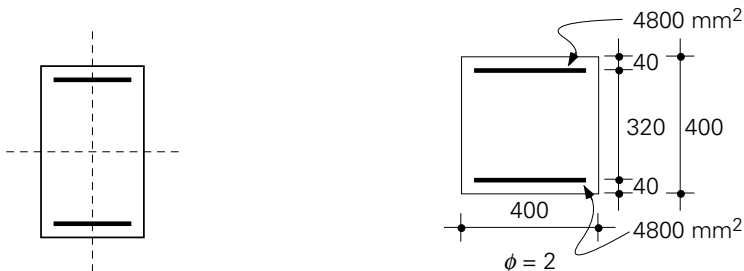
$$X_\infty = H_b \left(1 - e^{-\frac{\mu n}{\mu n + 1} \varphi_\infty} \right)$$

De kruipfactor $\bar{\varphi}$ voor de kolom is:

$$\bar{\varphi}_\infty = \frac{X_\infty}{H_a} = \frac{1}{\mu n} \left(1 - e^{-\frac{\mu n}{\mu n + 1} \varphi_\infty} \right)$$

Voorbeeld

We nemen dezelfde kolom als bij de op druk belaste kolom uit de vorige paragraaf als rekenvoorbeeld.



Figuur 6. Ook nu dubbelsymmetrische doorsnede. Figuur 7.

$$I_b = \frac{1}{12} \times 400^4 = 213\,330 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_a = 2 \cdot 4800 \times 160^2 = 24\,576 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\mu = \frac{I_a}{I_b} = 0,115; \quad n = 7,5$$

$$\mu n = 0,115 \cdot 7,5 = 0,86$$

$$H_a = 0,86 \quad H_b = \frac{0,86}{1,86} H = 0,46 H$$

$$H_b = 0,54 H$$

$$X_\infty = 0,54 H \left(1 - e^{-\frac{0,86}{1,86} \cdot 2}\right) = 0,33 H$$

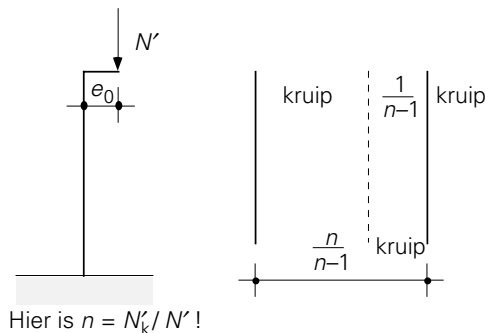
Uiteindelijk werkt op het beton $(0,54 - 0,33) H = 0,21 H$, en op het staal $(0,46 + 0,33) H = 0,79 H$ De kruipfactor voor de kolom is:

$$\bar{\varphi} = \frac{X_\infty}{H_a} = \frac{0,33}{0,46} = 0,70$$

3 De excentrisch op druk belaste kolom*

Op het tijdstip t_0 zal de kolom elastisch vervormen. De tweede-orde-uitbuiging bedraagt $n/(n - 1) e_0$. Door kruip zal deze uitbuiging toenemen.

Iedere kruipvervorming wordt direct gevolgd door een $1/(n - 1)$ maal zo grote elastische tweede-ordevervorming. Van de vervorming na het tijdstip t_0 zal dus $1/n$ -de deel elastische vervorming zijn die ook weer aanleiding geeft tot kruip.



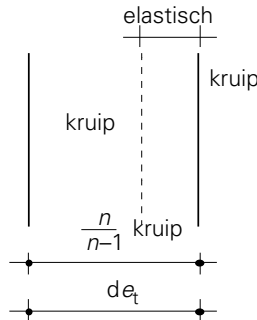
Figuur 8. Kruipvervorming plus de daarvoor veroorzaakte elastische vervorming.

We bekijken de kolom op het tijdstip $t = t$. Na het tijdstip t_0 is door de kruipinvloed

* In de volgende gevallen is n niet meer de $n = E_a/E_b$ maar is $n = N'_k/N'$ in formules als $1/n$, $1/(n - 1)$ en $n/(n - 1)$.

van het beton de kolom verder uitgebogen overeen afstand e_t . Van die uitbuiging e_t is $1/n e_t$ een elastische uitbuiging. De totale elastische uitbuiging op het tijdstip $t = t$ bedraagt dus:

$$\frac{1}{n-1} e_0 + \frac{1}{n} e_t$$



Figuur 9. Totale vervorming gedurende tijdje dt .

Gedurende een tijdje dt zal de kruipvervorming van de kolom dus bedragen:

$$\left(\frac{1}{n-1} e_0 + \frac{1}{n} e_t \right) d\bar{\varphi}$$

Het maakt immers niet uit op welk tijdstip de elastische vervorming plaats vond. We doen alsof de totale elastische vervorming plaats vond op het tijdstip t_0 . Die kruipvervorming gedurende het tijdje dt wordt direct gevolgd door een elastische tweede-ordevorming maal de kruipvervorming, ofwel $1/n$ maal de totale vervorming de_t gedurende het tijdje dt . Dus:

$$de_t = \left(\frac{1}{n-1} e_0 + \frac{1}{n} e_t \right) d\bar{\varphi} + \frac{1}{n} de_t$$

vermenigvuldig met n :

$$de_t(n-1) = \left(\frac{n}{n-1} e_0 + e_t \right) d\bar{\varphi}$$

Daar $d\left(\frac{n}{n-1} e_0 + e_t\right) = de_t$, kunnen we schrijven:

$$\frac{d\left(\frac{n}{n-1} e_0 + e_t\right)}{\frac{n}{n-1} e_0 + e_t} = \frac{1}{n-1} d\bar{\varphi}$$

Integratie geeft:

$$\frac{n}{n-1} e_0 + e_t = C \cdot e^{\frac{1}{n-1} \bar{\varphi}}$$

Voor $t = t_0$ is $\bar{\varphi} = 0$ en $e_t = 0$; $C = \frac{n}{n-1} e_0$. Dus:

$$e_t = \frac{n}{n-1} e_0 \left(e^{\frac{1}{n-1} \bar{\varphi}} - 1 \right)$$

Dit is de vervorming die wordt veroorzaakt door het kruipen van het beton. De totale excentriciteit is nu:

$$e_{\text{tot}} = \frac{n}{n-1} e_0 + e_t = \frac{n}{n-1} e_0 \cdot e^{\frac{1}{n-1} \bar{\varphi}_\infty}$$

$$M_{\text{tot}} = N' e_{\text{tot}} = N' e_0 \cdot \frac{n}{n-1} e^{\frac{1}{n-1} \bar{\varphi}_\infty}$$

Deze formule, maar dan anders afgeleid, kan men ook vinden in [1].

Voorbeeld

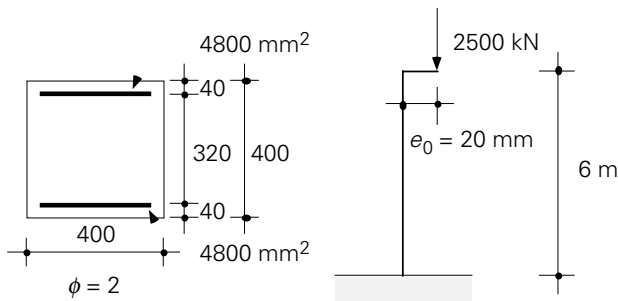
Nog steeds dezelfde kolom als in de vorige rekenvoorbeelden

$$N' = 2500 \text{ kN}$$

$$N'_k = \frac{\pi^2(E_a I_a + E_b I_b)}{4l^2} = \frac{\pi^2(0,86 + 1) \times 28000 \times 213330 \times 10^4}{4 \times 6000^2} \times 10^{-3} = 7615 \text{ kN}$$

$$n = \frac{7615}{2500} = 3,05$$

$$\bar{\varphi} = 0,70 \text{ (berekend voor geval 2)}$$



Figuur 10. Voorbeeld van excentrisch gedrukte kolom.

$$\frac{1}{n-1} e_0 = \frac{1}{2,05} \times 20 = 9,8 \text{ mm}$$

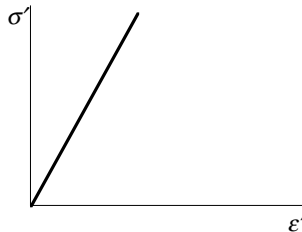
$$\frac{n}{n-1} e_0 = 20 + 9,8 = 29,8 \text{ mm}$$

$$e_t = 29,8(e^{\frac{1}{2,05} \times 0,70} - 1) = 12,1 \text{ mm}$$

De totale uitbuiging $e_{\text{tot}} = 29,8 + 12,1 = 41,9 \text{ mm}$.

Er is goede overeenstemming met de uitkomst van ir. de Jongh, die 42,8 mm vond.

We kunnen nu ook de spanningen in de voet van de kolom berekenen. We gaan nog steeds uit van een lineair σ - ϵ -diagram bij kortstondige belasting.



Figuur 11. σ - ϵ -diagram voor kortstondige belasting.

$$N' = 2500 \text{ kN}$$

$$M = N'e_{\text{tot}} = 2500 \times 0,0419 = 105 \text{ kNm}$$

In de gevallen 1 en 2 zijn de krachten op het beton en staal berekend. Met de daar gevonden uitkomsten volgt nu:

$$\sigma_b = -\frac{0,37 \times 2500 \times 10^3}{160\,000} \pm \frac{0,21 \times 105 \times 10^6}{\frac{1}{6} \times 400^3} = -5,8 \pm 2,1 \text{ N/mm}^2$$

(−7,9 en −3,7 N/mm²)

$$\sigma'_a = -\frac{0,63 \times 2500 \times 10^3}{9600} \pm \frac{0,79 \times 105 \times 10^6}{320 \times 4800} = -164 \pm 54 \text{ N/mm}^2$$

(−218 en −110 N/mm²)

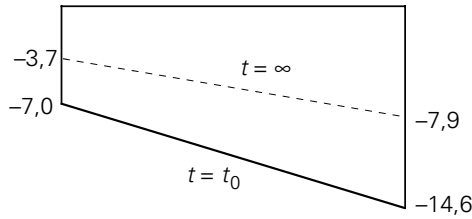
Op het tijdstip t_0 zijn de betonspanningen hoger, ondanks de geringere uitbuiging.

$$N' = 2500 \text{ kN}$$

$$M = 2500 \times 0,0298 = 74 \text{ kNm}$$

$$\sigma_b = -\frac{0,69 \times 2500 \times 10^3}{160\,000} \pm \frac{0,54 \times 74 \times 10^6}{\frac{1}{6} \times 400^3} = -10,8 \pm 3,8 \text{ N/mm}^2$$

(−14,6 en −7,0 N/mm²)



Figuur 12. Betonspanning bij het begin en na het einde van het kruipproces voor $N' = 2500$ kN.

Ir. De Jongh vindt met behulp van het computerprogramma KRUKO voor een belasting van 3250 kN na $t = \infty$ kruipinstabiliteit.

$$n = \frac{7615}{3250} = 2,34$$

$$\frac{1}{n-1} e_0 = \frac{1}{1,34} \times 20 = 14,9 \text{ mm}$$

$$\frac{n}{n-1} e_0 = 34,9 \text{ mm}$$

$$e_t = 34,9 \left(e^{\frac{1}{1,34} \times 0,70} - 1 \right) = 24,0 \text{ mm}$$

$$e_{\text{tot}} = 34,9 + 24,0 = 58,9 \text{ mm}$$

$$M = 3250 \times 0,0589 = 191 \text{ kNm}$$

$$\sigma'_b = \frac{-0,37 \times 3250 \times 10^3}{160000} \pm \frac{0,21 \times 191 \times 10^6}{\frac{1}{6} \times 400^3} = -7,5 \pm 3,8 \text{ N/mm}^2$$

($-11,3$ en $-3,7$ N/mm²)

$$\sigma'_a = \frac{-0,63 \times 3250 \times 10^3}{9600} \pm \frac{0,79 \times 191 \times 10^6}{320 \times 4800} = -213 \pm 98 \text{ N/mm}^2$$

(-311 en -115 N/mm²)

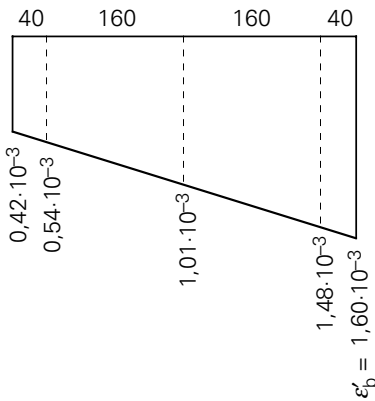
Dan kunnen we nu de vervorming van de inklemmingsdoorsnede bekijken:

$$\sigma'_{a \text{ gem}} = 213 \text{ N/mm}^2$$

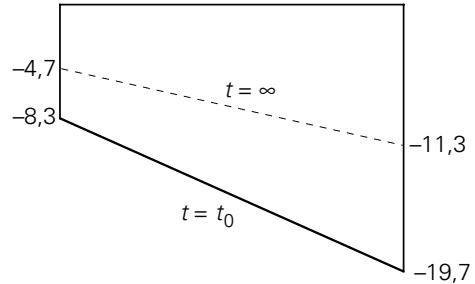
$$\epsilon'_{a \text{ gem}} = \frac{213}{210000} = 1,01 \times 10^{-3}$$

Ten gevolge van de buiging is $\sigma'_a = 98$ N/mm² en $\epsilon'_a = \frac{98}{210000} = 0,47 \times 10^{-3}$. Dus:

$$\epsilon'_b = 1,01 \times 10^{-3} + \frac{200}{160} \cdot 0,47 \times 10^{-3} = 1,60 \times 10^{-3}$$



Figuur 13. Vervormingen in klemmingsdoorsnede aan het eind van het kruipproces voor $N' = 3250$ kN.



Figuur 14. Betonspanningen bij het begin en na het einde van het kruipproces voor $N' = 3250$ kN.

Dit komt overeen met

$$E'_b = \frac{11,3}{1,60 \times 10^{-3}} = 7060 \text{ N/mm}^2$$

Dit alles ziet er nog niet naar uit dat de kolom bezwijken is.

Hoe is het op tijdstip t_0 ? Dan is:

$$e = \frac{n}{n-1} e_0 = 34,9 \text{ mm}$$

$$M = 3250 \times 0,0349 = 113 \text{ kNm}$$

$$\sigma'_b = -\frac{0,69 \times 3250 \times 10^3}{160000} \pm \frac{0,54 \times 113 \times 10^6}{\frac{1}{6} \times 400^3} = -14,0 \pm 5,7 \text{ N/mm}^2$$

(−19,7 en −8,3 N/mm²)

De vraag is niet of deze kolom ten tijde van $t = \infty$ zal bezwijken (daar ziet het immers niet naar uit), maar hoe hij het moment $t = t_0$ zal doorstaan met een betonspanning die 0,88 maal de karakteristieke kubusdruksterkte bedraagt. Het is wel zeer kortstondig en de kruip begint direct en dus ook de spanningsvermindering. Maar gelden bij deze hoge aanvangsspanning nog wel de aangenomen kruipregels?

De voorschriften zeggen hier niets over. Volgens de VB 1974 kan de belasting nog worden verhoogd, totdat het beton de spanning $0,6 \cdot 22,5 = 13,5 \text{ N/mm}^2$ heeft bereikt en de vervorming $\epsilon'_b = 3,5\%$, of het staal de spanning $\sigma'_a = 400 \text{ N/mm}^2$ bereikt.

Voor $N' = 4000$ kN vinden we op het moment $t = \infty$:

$$\sigma'_b = 13,4 \text{ N/mm}^2$$

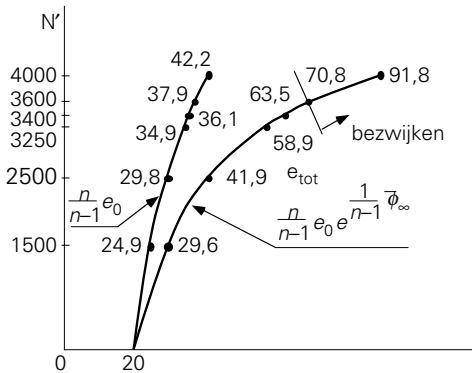
$$\sigma'_a = 368 \text{ N/mm}^2$$

$$\epsilon'_b = 1,19 \cdot 10^{-3}$$

Dit zou volgens de VB 1974 nog niet de bezwijkbelasting van de kolom zijn, maar we hebben wel het horizontale deel van het σ - ϵ -diagram bereikt en ook σ'_a is dicht bij de vloeigrens, zodat we volgens de VB niet veraf zijn van het bezwijken.

In figuur 15 zijn voor een aantal waarden van N' de bijbehorende directe excentriciteit $(n/(n-1) e_0)$ en de uiteindelijke excentriciteit $(n/(n-1) e_0 \cdot \exp(1/(n-1) \bar{\varphi}_\infty))$ uitgezet. Deze laatste kromme wordt ongeveer bij het punt $N' = 3600 \text{ kN}$ gesneden door de lijn die de relatie N' - e_{tot} uiteen oopgpunt van bezwijken weergeeft.

Nogmaals, dit alles geldt, indien erop het tijdstip $t = t_0$ een lineaire relatie bestaat tussen σ' en ϵ' , er dan geen bezwijken optreedt en de kruipregels ook opgaan bij zeer hoge aanvangsspanningen. Indien deze voorwaarden gelden dan kunnen we uit de grafiek concluderen dat, wanneer we op het tijdstip t_0 belasten met een belasting lager dan 3600 kN, er met de tijd extra vervorming optreedt, maar geen bezwijken. Belasten we bóven de 3600 kN, dan zal na verloop van tijd door kruip de bezwijklijn worden bereikt en de kolom dus dan pas bezwijken.



Figuur 15. Gedrag van de besproken excentrisch gedrukte kolom, met en zonder kruip.

Dat bij deze kolom de aanvangsspanningen in het beton zoveel hoger zijn dan de spanningen op t_∞ komt door het hoge wapeningspercentage van 6%. waardoor de kruipfactor van de kolom ($\bar{\varphi} = 0,70$) zoveel kleiner is dan die van het beton ($\varphi = 2,0$). De lezer kan zelf narekenen dat bij een wapeningspercentage van 1% voor op druk belaste kolommen $\bar{\varphi} = 1,71$ en voor op buiging belaste kolommen $\bar{\varphi} = 1,60$. De kruip zal nu een veel grotere rol spelen.

Zou door omstandigheden de kolom uit het artikel van ir. de Jongh pas na enige jaren worden belast dan zal er praktisch geen kruip meer zijn. Er zijn dan bij deze kolom hogere betonspanningen dan waarop gerekend was. Overigens is dan ook de sterkte

toegenomen.

De Voorschriften geven wel aardige regels maar laten toch veel onopgelost. We werken met karakteristieke belastingen; dat zijn belastingen die een kans van 5% op overschrijding hebben. Dus de gebruiksbelasting is meestal kleiner dan de in de berekening aangehouden karakteristieke belasting. Dan moet er nog een belastingfactor groot 1,7 in rekening worden gebracht. Een deel daarvan (1,4) is bestemd als marge voor de belastingen gedurende de levensduur. We kunnen rustig stellen dat in het algemeen slechts het eigen gewicht van de constructie vanaf het begin aanwezig is en bij een bouwwerk van enige importantie kan dat begin al één of meerdere jaren duren. De rustende belasting komt iets later. Een deel van de veranderlijke belasting kan er ook al spoedig zijn. Maar daarmee hebben we het wel gehad wat betreft langdurige belastingen in de kruiperiode. De rest van de marge en kortstondige belastingen, zoals windbelastingen, vallen geheel buiten de kruiperiode, waarbij de meer permanente nog wel enige, zij het weinig, kruip opwekken. De kortstondige belastingen zullen geen enkele kruipveroorzaken.

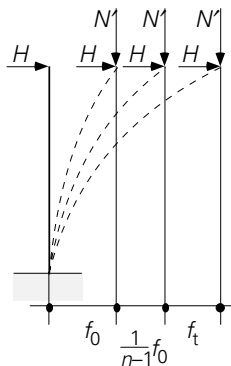
4 De horizontaal en verticaal belaste kolom

De eerste-orde-uitbuiging bedraagt f_0 . De tweede-orde-uitbuiging op tijd t_0 : $1/(n-1)f_0$. De totale uitbuiging op tijd t_0 dus $n/(n-1)f_0$. Deze uitbuiging veroorzaakt kruip.

Op tijd $t = t$ zal gedurende een tijdje dt de verplaatsing gelijk zijn aan:

$$df_t = \left(\frac{n}{n-1} f_0 + \frac{1}{n} f_t \right) d\bar{\varphi} + \frac{1}{n} df_t$$

$$(n-1) df_t = \left(\frac{n^2}{n-1} f_0 + f_t \right) d\bar{\varphi}$$



Figuur 16. Vervorming van de tegelijk horizontaal en verticaal belaste kolom.

$$\frac{d\left(\frac{n^2}{n-1}f_0 + f_t\right)}{\frac{n^2}{n-1}f_0 + f_t} = \frac{1}{n-1} d\bar{\varphi}$$

$$\frac{n^2}{n-1}f_0 + f_t = C \cdot e^{\frac{1}{n-1}\bar{\varphi}}$$

Voor $t = t_0$ is $\bar{\varphi} = 0$ en $f_t = 0$.

$$C = \frac{n^2}{n-1}f_0$$

$$f_t = \frac{n^2}{n-1}f_0 \left(e^{\frac{1}{n-1}\bar{\varphi}} - 1 \right)$$

Het buigend moment bij de inklemming bedraagt:

$$M_{\text{tot}} = Hl + N' \left\{ \frac{n}{n-1}f_0 + \frac{n^2}{n-1}f_0 \left(e^{\frac{1}{n-1}\bar{\varphi}} - 1 \right) \right\}$$

Bij benadering is $N'_k = Hllf_0 = N'n$ (zie [4]).

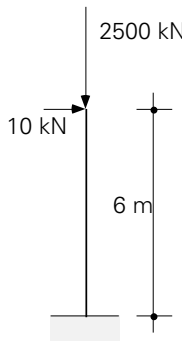
$$M_{\text{tot}} = Hl + Hl \left(\frac{1}{n-1} + \frac{n}{n-1} e^{\frac{1}{n-1}\bar{\varphi}} - \frac{n}{n-1} \right) = Hl \frac{n}{n-1} e^{\frac{1}{n-1}\bar{\varphi}}$$

Evenals bij de excentrisch op druk belaste kolom onder 3 wordt ook hier het eerste-ordemoment vermenigvuldigd met de vergrotingsfactor $\frac{n}{n-1} \exp\left(\frac{1}{n-1}\bar{\varphi}\right)$.

Voorbeeld

Weer dezelfde kolom als rekenvoorbeeld. Evenals het voorbeeld bij 3 is $N'_k = 7615$ kN; $n = 3,05$ en $\bar{\varphi} = 0,70$.

Bij benadering geldt:



Figuur 17. Voorbeeld van tegelijk horizontaal en verticaal belaste kolom.

$$M = \frac{3,05}{2,05} e^{\frac{1}{2,05} \times 0,70} 10 \times 6 = 2,09 \times 60 = 126 \text{ kNm}$$

Uitbuiging:

$$f_0 = \frac{Hl^3}{3(E_a I_a + E_b I_b)} = 6,5 \text{ mm}$$

Op tijdstip t_0 :

$$\frac{n}{n-1} f_0 = \frac{3,05}{2,05} \times 6,5 = 9,7 \text{ mm}$$

Door kruip:

$$f_t = 3,05 \cdot 9,7 \left(e^{\frac{1}{2,05} \times 0,70} - 1 \right) = 12,0 \text{ mm}$$

$$f_{\text{tot}} = 9,7 + 12,0 = 21,7 \text{ mm}$$

Theoretisch exact:

$$M_{\text{tot}} = 10 \cdot 6 + 2500 \times 0,0217 = 60 + 54 = 114 \text{ kNm}$$

Besluit

Dit waren enige vingeroefeningen over de invloed van de kruip op de vervormingen en momenten van kolommen van gewapend beton. Ze roepen een aantal vragen op. Voor een constructeur die beslissingen moet nemen gaat het niet alleen om een letterlijke toepassing van voorschriften. Iedere methode die inzicht verschaft in wat er gebeurt in een constructie, de modellen van ir. de Jongh, de hier gehanteerde beschouwingen en nog andere, zal het nemen van beslissingen meer verantwoord doen zijn.

Literatuur

1. *Over de invloed van de kruip en de relaxatie op de spanningen en vervormingen in constructies*; IBC-Mededelingen, juli 1955.
2. Ir. D. Dicke, *Stabiliteitsproblemen en de $1\frac{1}{2}$ %-regel voor hoge gebouwen*; Cement 1961, nr 7.
3. *VB 1974 deel A*; Rijswijk, NNI, 1974.
4. Prof.ir. D. Dicke, *Knik en Stabiliteit*; 's-Hertogenbosch, Stichting Professor Bakkerfonds.
5. Ir.A.W. de Jongh, *Kruipinvloeden in op druk belaste constructiedelen*; Cement 1980 nr. 3.
6. Dr. Kurt Billig — Structural Concrete.