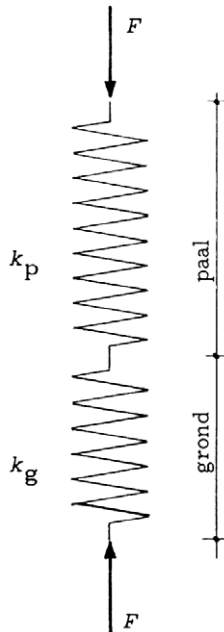


2

Voorbeelden in de praktijk

2.1. Voorbeelden van translatieveren in de praktijk

Een veel voorkomende translatiever is de *funderingspaal*. Dit is een nogal gecompliceerde translatiever omdat ze uit twee delen is samengesteld, de paal zelf en de grond. In het in figuur 2.1 getekende schema is aangenomen dat de paalbelasting slechts door de paalpunt wordt overgedragen op de grond en dus niet door wrijving langs de paalschacht.



Figuur 2.1.

Paal en grond worden verder lineair elastisch gedrag toegeschreven.

Veerconstante voor de paal k_p .

Veerconstante voor de grond k_g .

De totale indrukking van de beide veren is

$$\frac{F}{k_p} + \frac{F}{k_g} = \frac{F}{k}$$

Hierin is k de veerconstante van de combinatie paal + grond.

We zien dat

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_p} + \frac{1}{k_g}$$

De samendrukking van de paal kan men schrijven als $\Delta l = \frac{Fl}{EA}$.

Dan is

$$k_p = \frac{F}{\Delta l} = \frac{EA}{l}$$

Als men niets weet over de grond, maar toch het effect van de grond in rekening wil brengen dan is een zeer eenvoudige aanname en niet meer dan dat: $k_g = k_p$.

Dan is $k = \frac{1}{2} k_p$.

De elasticiteitsmodulus van beton voor in de fabriek vervaardigde palen is hoog. Daar echter ook op kruip moet worden gerekend zou men kunnen aanhouden $E = 20.000 \text{ N/mm}^2$.

Voorbeeld 2.1

Voor een betonnen paal van 18 m lengte en een doorsnede van $400 \times 400 \text{ mm}^2$ zou men dan vinden:

$$k = \frac{1}{2} k_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{20.000 \times 400^2}{18.000} = 8,9 \times 10^4 \text{ N/mm} = 89 \text{ kN/mm}$$

Een enigszins gecompliceerder regel geeft globale waarden voor k_g .

Voor geheide palen kan dan globaal worden aangehouden:

$k_g = 80 D \cdot q_p$ voor ronde palen (figuur 2.2a),

$k_g = 90 b \cdot q_p$ voor vierkante palen (figuur 2.2b).



Figuur 2.2.

Hierin is q_p het voetdraagvermogen. Voor de paal met $b = 400 \text{ mm}$ en aannemende dat $q_p = 8 \text{ N/mm}^2$ geldt dan:

$$k_g = 90 \times 400 \times 8 = 288.000 \text{ N/mm} = 288 \text{ kN/mm}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{178} + \frac{1}{288}$$

$$k = 110 \text{ kN/mm}$$

Voor boorpalen en schroefpalen kan men de hier gevonden k -waarde met 0,5

vermenigvuldigen. In de ontwerpfase heeft men vaak nog geen gegevens over palen en grond bij de hand. Voor geheide palen zou men dan als voorlopige aanname kunnen aannemen: $k = 100 \text{ kN/mm}$. Als blijkt dat de totale uitkomst van een berekening vrij ongevoelig is voor de waarde van k dan kan men het hierbij laten.

Is de uitkomst wel gevoelig voor de waarde van k dan zal men achteraf, als men meer gegevens heeft, een nadere berekening maken.

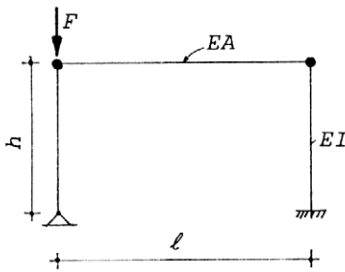
Is de constructie zeer gevoelig voor de waarde van k dan dient men k vast te stellen in samenwerking met een grondmechanicadeskundige.

In dit laatste geval is het echter beter eens te zoeken naar constructieve maatregelen om die gevoeligheid te verminderen.

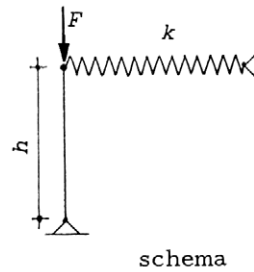
De veerconstante van palen is belangrijk om de rotatieveerconstante van funderingen vast te stellen.

Voorbeeld 2.2

In dit voorbeeld wordt een pendelstijl, in het vlak van tekening (figuur 2.3), tegen omvallen gesteund door een horizontale trek- (of druk-)staaaf en een verticale ingeklemde staaaf.



Figuur 2.3.



Figuur 2.4.

Beide staven kunnen nu geschematiseerd worden, voor de pendelstaaaf, in één steunende translatieveer, zoals getekend in figuur 2.4.

Onder invloed van een trekkracht H verplaatst het aangrijpingspunt van H over een afstand

$$u = \frac{Hl}{EA} + \frac{Hh^3}{3EI}$$

$$k = \frac{H}{u}$$

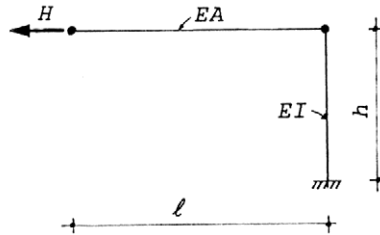
$$\frac{1}{k} = \frac{u}{H} = \frac{l}{EA} + \frac{h^3}{3EI}$$

EA/l is de veerstijfheid indien $EI = \infty$,

$3EI/h^3$ is de veerstijfheid indien $EA = \infty$.

Dus

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_{\text{staaf}}} + \frac{1}{k_{\text{kolom}}}$$



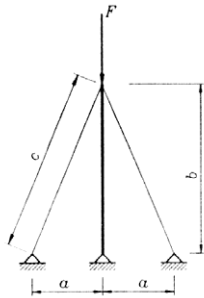
Figuur 2.5.

Meestal is vervorming door normaalkracht veel kleiner dan vervorming door buiging. Daarom wordt meestal $EA = \infty$ aangehouden, tenzij duidelijk is dat EA niet kan worden verwaarloosd.

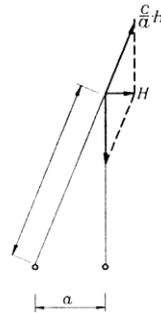
Voorbeeld 2.3

Tenzij anders vermeld gaan we er bij de behandelde gevallen steeds van uit dat loodrecht op het vlak van tekening geen verplaatsing mogelijk is!

In figuur 2.6 wordt een staaf gesteund door twee kabels. De elasticiteitsmodulus van de kabels is E en doorsnede A . Het eigen gewicht van de kabels wordt verwaarloosd. De kabels worden licht voorgespannen zodat ze niet slap hangen. Als de top naar rechts zou willen verplaatsen dan zal de rechter kabel slap gaan hangen.



Figuur 2.6.



Figuur 2.7.

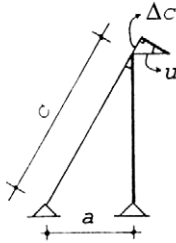
Alleen de linkerkabel kan dan nog voor stabiliteit van het geheel zorgen.

Om de veerstijfheid k van de vervangende translatieveer te bepalen brengen we weer een kracht H aan en bepalen de verplaatsing u van de top van de staaf, zie figuur 2.7.

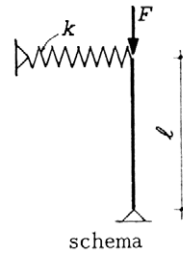
Kracht in linkerkabel $(c/a) \cdot H$.

Uitrekking Δc van de kabel (zie figuur 2.8):

$$\Delta c = \frac{c}{a} \cdot \frac{H \cdot c}{EA} = \frac{c^2}{a} \cdot \frac{H}{EA}$$



Figuur 2.8.



Figuur 2.9.

We verwaarlozen de verkorting van de staaf ten opzichte van de verlenging van de kabel. De horizontale verplaatsing van de top is dan gelijk aan

$$u = \frac{c}{a} \cdot \Delta c = \frac{c^3}{a^2} \cdot \frac{H}{EA}$$

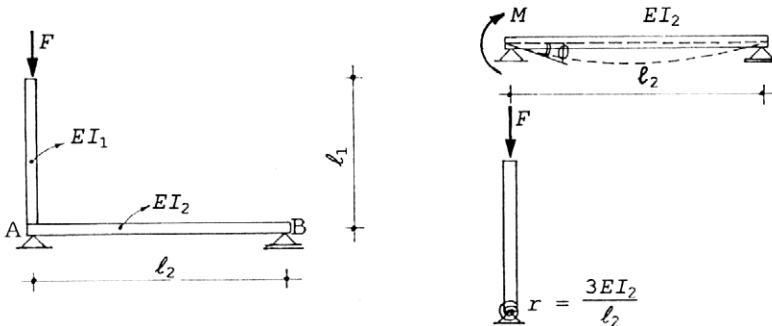
Voor de beoordeling van de stabiliteit van dit systeem kunnen we deze afgetuide staaf dan schematiseren tot het in figuur 2.9 getekende schema met

$$k = \frac{H}{c} = \frac{a^2}{c^3} \cdot EA$$

De staaf is een pendelstaaf en moet ook zelf beoordeeld worden op stabiliteit.

2.2. Voorbeelden van rotatieveren in de praktijk

Voorbeeld 2.4



Figuur 2.10.

In figuur 2.10 is een verticale staaf ingeklemd in een horizontale staaf. De verbinding is

oneindig stijf, maar de inklemming is niet oneindig stijf omdat de verbinding kan roteren.

Brengen we bij A een moment aan op staaf AB dan is de hoekverdraaiing ϕ van deze staaf bij A gelijk aan

$$\phi = \frac{Ml_2}{3EI_2}$$

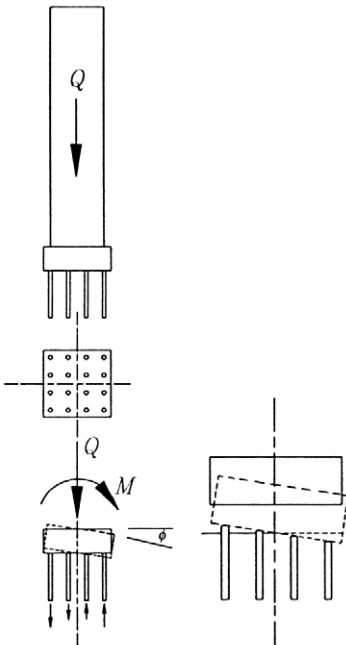
We kunnen deze verende inklemming nu schematiseren tot het hier getekende schema waarbij de waarde van de veerconstante gelijk is aan

$$r = \frac{M}{\phi} = \frac{3EI_2}{l_2} \text{ kNm/rad (indien alle dimensies in kN en m)}$$

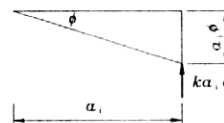
Voorbeeld 2.5

Een hoge toren is gefundeerd op een als oneindig stijf te beschouwen dikke betonplaat waaronder 16 palen. De palen staan zodanig gegroepeerd dat ze twee identieke symmetrie-assen hebben.

Door de verticale belasting van de toren heerst er druk in alle palen. De toren zakt iets. Als er een moment M op de fundering werkt zullen aan de ene zijde de palen extra gedrukt worden en aan de andere zijde wordt de druk verminderd, zie figuur 2.11.



Figuur 2.11.



Figuur 2.12.

Het blok zal over een hoek ϕ draaien.

We kunnen de palen beschouwen als translatieveren met veerconstante k . We bekijken paal i op afstand a_i van de rotatie-as (een symmetrie-as van de paalgroep).

De verplaatsing van de paalkop is daar gelijk aan $a_i\phi$ (zie figuur 2.12).

Met veerconstante k is de paalkracht gelijk aan $ka_i\phi$.

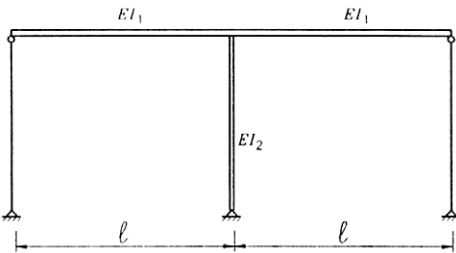
Deze paalkracht levert een bijdrage $ka_i\phi \cdot a_i = ka_i^2 \cdot \phi$ aan weerstand tegen het moment M .

Dan is

$$M = \sum_{i=1}^n ka_i^2 \cdot \phi = \phi k \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad (\text{indien } k \text{ voor alle palen gelijk is})$$

De rotatieveerconstante is in dit geval:

$$r = \frac{M}{\phi} = k \sum_{i=1}^n a_i^2$$

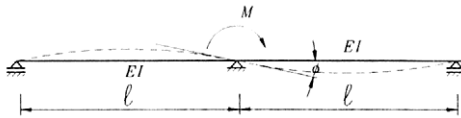


Figuur 2.13.

Voorbeeld 2.6

Bij de constructie in figuur 2.13 is de middenkolom stijf verbonden aan de bovenregel. De constructie is symmetrisch.

Brengen we een moment M aan vanuit de kolom op de ligger (figuur 2.14) dan is



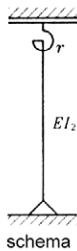
Figuur 2.14.

$$\phi = \frac{\frac{1}{2} M \cdot l}{3EI_1} = \frac{Ml}{6EI_1}$$

dus

$$r = \frac{M}{\phi} = \frac{6EI_1}{l}$$

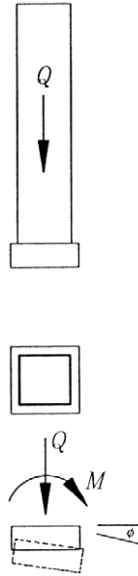
Zie ook het schema van figuur 2.15.



Figuur 2.15.

Voorbeeld 2.7

In dit voorbeeld is een toren gefundeerd op staal, zie figuur 2.16. Het probleem is om de relatie M/ϕ te bepalen. Deze is afhankelijk van de grootte van de funderingsplaat, de opbouw van de grond en de aanlegdiepte van de fundering.



Figuur 2.16.

Een eenvoudige methode om tot een redelijke waarde van r te komen is gebruik te maken van het begrip *beddingsconstante*. Dat is een soort veerconstante voor grond die de relatie aangeeft tussen de spanning σ ten gevolge van de belasting en de daarbij behorende vervorming u .

$$k = \frac{\sigma}{u}$$

De dimensie is kracht/lengte³, dus N/m³, kN/m³ of N/mm³.

Aannemende dat we op een goede zandgrond funderen zouden we tabel 2.1 kunnen gebruiken voor de grootte van de beddingsconstante.

Tabel 2.1.

oppervlakte funderingsplaat in m ²	beddingsconstante k in kN/m ³
< 10	$5 \cdot 10^4$
10 – 20	$4 \cdot 10^4$
20 – 100	$3 \cdot 10^4$
> 100	$2 \cdot 10^4$

Evenals voor de k -waarde van palen moeten we bedenken dat dit ook een model is, bedoeld om enig houvast te krijgen over de rotatiestijfheid van een fundering. Indien de stabiliteit van het geheel gevoelig is voor de waarde van r dan moeten we òf onze constructie veranderen òf de hulp inroepen van een specialist grondmechanica.

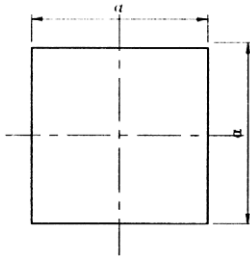
Bij een vierkante plaat, zie figuur 2.17, is de richting waarin het moment werkt van geen invloed op de grootte van r . Voorwaarde voor de afleiding van de hieronder volgende formules is, dat er zoveel verticale belasting (Q) is dat met een moment op de funderingsplaat erbij geen trekspanningen kunnen optreden.

$$\sigma_1 = \frac{Q}{A} \text{ en } \sigma_2 = \frac{M}{\frac{1}{6}a^3}$$

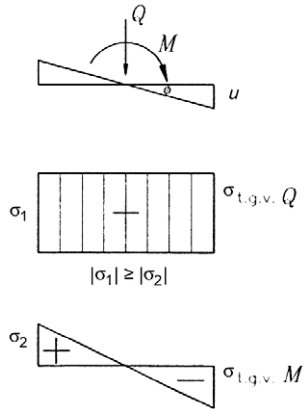
$$u = \frac{\sigma}{k} = \frac{6M}{ka^3}$$

$$\phi = \frac{u}{\frac{1}{2}a} = \frac{12M}{ka^4}$$

$$r = \frac{M}{\phi} = \frac{1}{12}ka^4$$



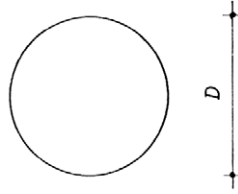
Figuur 2.17.



Figuur 2.18.

Evenzo vindt men voor een cirkelvormige fundering:

$$r = \frac{\pi}{64}kD^4$$



Figuur 2.19.

In beide gevallen is men ervan uitgegaan dat de funderingsplaat zelf als oneindig stijf kan worden beschouwd!

Aanname

De vervormingen die we beschouwen worden steeds overdreven getekend. In werkelijkheid zijn ze zo klein dat $\sin \phi = \text{tg } \phi = \phi$ en dat $\cos \phi = 1$.

Uiteraard is ϕ hierin uitgedrukt in radialen.

Tabel 2.2.

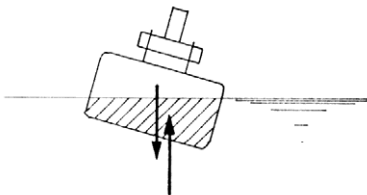
ϕ rad.	$\sin \phi$	$\cos \phi$	$\text{tg } \phi$
0,01	0,0100	1,0000	0,0100
0,02	0,0200	0,9998	0,0200
0,03	0,0300	0,9996	0,0300
0,04	0,0400	0,9992	0,0400
0,05	0,0500	0,9988	0,0500

In het boek wordt uitgegaan van volledig en onbeperkt elastisch gedrag van staven en veren en van onbeperkt reactievermogen.

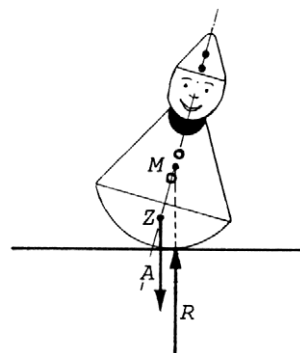
In de praktijk zal moeten worden nagegaan of spanningen en vervormingen binnen de opgelegde randvoorwaarden vallen.

Deze gaan een rol spelen bij de vormgeving en dimensionering van de constructie.

Voorlopig is dus hier het eerste grensgeval, verlies van evenwicht, het enige onderwerp van onderzoek.



Figuur 2.20.



Figuur 2.21.

Hier volgen nog enige voorbeelden van ‘lichamen’ die door een goede vormgeving stabiel gedrag vertonen.

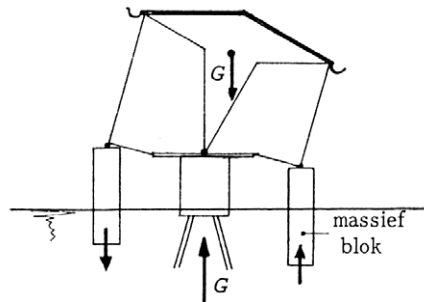
Een boot (figuur 2.20) zal schuiner liggen bij een plotselinge windvlaag, maar zich weer oprichten als de windvlaag weg is.

Het duikelaartje in figuur 2.21 zal na een stootje weer rechtop staan als op z'n as het middelpunt M van het onderste bolsegment hoger ligt dan het gewichtszwaartepunt Z van het totale figuurtje.

Er vormt zich een terugdraaiend koppel.

Een overdekte aanlegsteiger voor plezierboten kan schommelen door wind en golven.

In de in figuur 2.22 getekende situatie is het rechterblok ‘lichter’ geworden en het linkerblok ‘zwaarder’. Of anders gezegd: de opwaartse waterdruk is rechts groter geworden en links kleiner. Daardoor ontstaat een terugdraaiend koppel; en het dak zal weer terugdraaien, als de oorzaak van de scheefstand verdwijnt.



Figuur 2.22.

Hier is het duidelijk dat de doorsnede van de blokken belangrijk is.

Een grotere doorsnede geeft grotere opwaartse waterdruk rechts en grotere neerwaartse belasting links.