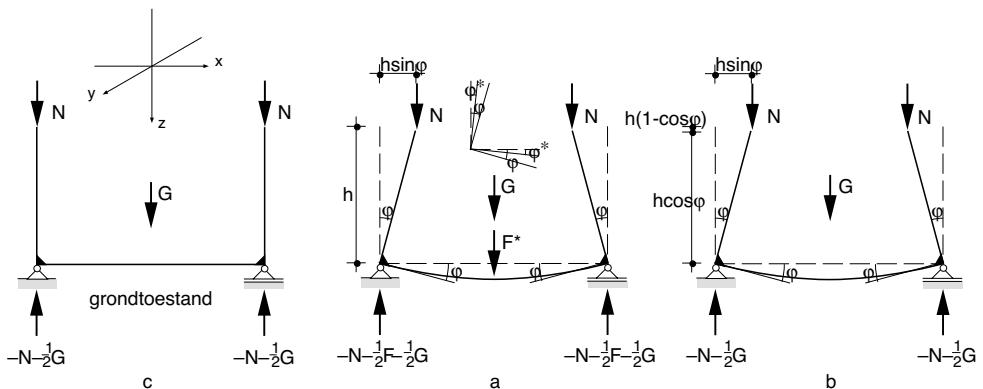


8 Stabiliteit en standvastigheid

8.1 Inleiding

Een constructie bestaande uit een ligger en twee kolommen is plaatsvast opgelegd met een scharnier- en roloplegging (figuur 8.1). De ligger is een beetje gebogen onder invloed van het eigen gewicht. Voor de eenvoud van de berekeningen wordt dit veronachtzaamd. Op de ligger staat ter plaatse van beide opleggingen een verticale starre kolom. De kolommen zijn met starre verbindingen met de ligger verbonden. De kolommen worden belast door ‘langzaam’ toenemende centrische drukkrachten met eindgrootte N . Het begrip langzaam toenemend wordt in § 8.2 toegelicht. De veronderstelling van starre kolommen, starre verbindingen en het veronachtzamen van de effecten van het eigen gewicht, vereenvoudigen de berekeningen, doch ondergraven het beoogde doel van de beschouwing niet.



Figuur 8.1 Zijn de krachten op ieder onderdeel van de constructie steeds in evenwicht?

De rechte horizontale ligger en de verticaal staande kolommen wordt de grondtoestand van de constructie genoemd. De krachten op de constructie zijn in deze toestand met elkaar in evenwicht (figuur 8.1c). Het bepalen van het verband tussen de belasting op en de zakking, de helling en de kromming van een ligger, staat niet in deze tekst. De ‘vergeet-mij-nietjes’ zijn de verbanden voor eenvoudige gevallen en staan in hoofdstuk 7 en in tabellenboeken.

opgave 8.1 Zoek de ‘vergeet-mij-nietjes’ op..

□

De constructie wordt nu extra belast door een langzaam toenemende neerwaarts gerichte last \bar{F}^* ter plaatse van het midden van de ligger. Hierdoor wordt de ligger ondermeer gebogen, zodat de kolommen scheef komen te staan. Het gevolg van deze scheefstand is dat de ligger nog meer wordt gebogen, omdat de kolomlasten buigkoppels op de ligger uitoefenen (figuur 8.1a). Louter voor de eenvoud van de berekening van het nieuwe evenwicht wordt verondersteld, dat de ligger slechts flauw wordt gebogen en een elastische vervorming ondergaat. Hierdoor mogen de rotaties ten gevolge van de afzonderlijke lasten worden opgeteld. Deze kunnen door middel van ‘Vergeet-mij-nietjes’ worden bepaald.

Bij de onderstaande berekening wordt verondersteld dat het constructiemateriaal zich blijvend elastisch gedraagt. De starre kolommen bezitten de hoogte h en de ligger een lengte ℓ en een buigstijfheid is EI_ℓ . De uitwendige krachten op de constructie zijn met elkaar in evenwicht. Onderzocht wordt nu het evenwicht van krachten op de kolom-ligger-verbindingen. De grootte van de hoekverdraaiing van de liggereinden tengevolge *alleen* de liggerlast \bar{F}^* is (‘vergeet-mij-nietje’):

$$\varphi^* = \frac{1}{16} \frac{F^* \ell^2}{EI_\ell}.$$

De totale grootte van de hoekverdraaiing φ van de liggereinden is gelijk aan de hoek van scheefstand van de kolommen is. Dan geldt dat de grootte ($\varphi - \varphi^*$) van de hoekverdraaiing van de liggereinden ten gevolge van de buigkoppels $Nh \cdot \sin\varphi$ wordt gegeven door (het buigend moment door \bar{F}^* is daar nul)

$$\varphi - \varphi^* = \frac{Nh \cdot \sin\varphi \cdot \ell}{2EI_\ell}.$$

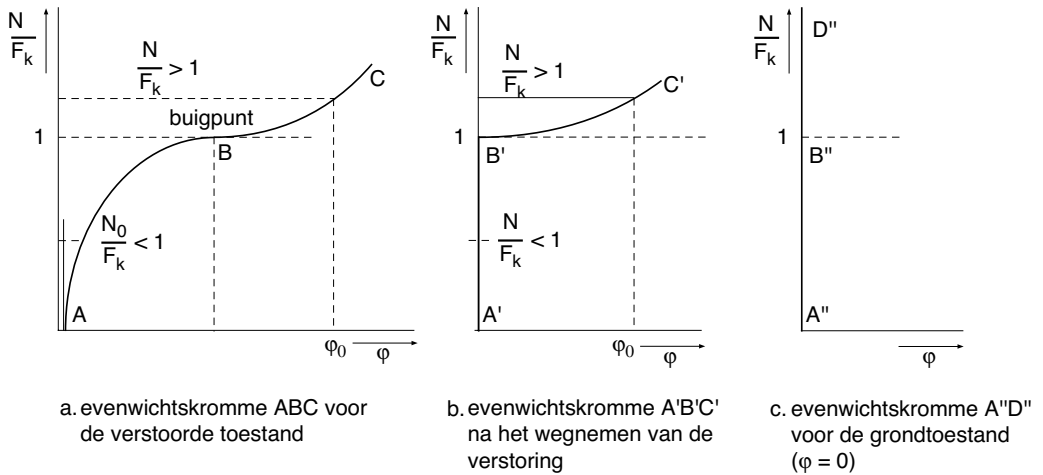
Anders gezegd: de hoekverdraaiing $\varphi - \varphi^*$ gaat vergezeld van een buigkoppel $2EI_\ell(\varphi - \varphi^*)/\ell$ dat de ligger op de kolom-ligger-verbinding uitoefent.

Deze (evenwichts)vergelijking is te herschrijven tot

$$\varphi - \varphi^* = \frac{N \cdot \sin\varphi}{F_k} \quad \text{met } \varphi > \varphi^* > 0 \quad (\text{a})$$

waarin de grootte F_k de dimensie van een kracht heeft

$$F_k = \frac{2EI_\ell}{h\ell} \cdot$$



Figuur 8.2 Het evenwicht van de constructie: langs A''D'' in de grondtoestand $\varphi = 0$ (c); evenwicht langs ABC (a) en vervolgens langs A'B'C' (b).

In de figuur 8.2a wordt de vergelijking (a) grafisch weergegeven. De kolomlast N wordt daarbij beschouwd als een functie van de hoek φ van de scheefstand van de kolommen. Voor de punten van de kromme ABC geldt dat de buigkoppels op een ligger-kolomverbinding met elkaar in evenwicht zijn. *Langs de kromme is er dus steeds evenwicht.*

Wordt nu de last \bar{F}^* ter plaatse van het midden van de ligger geleidelijk weggenomen, (F^* gaat naar nul), dan zal zich een nieuw evenwicht van buigkoppels op de hoekverbindingen instellen. Indien $F^* = 0$ dan geldt ook $\varphi^* = 0$, zodat de evenwichtsvergelijking (a) reduceert tot:

$$\varphi = \frac{N}{F_k} \sin \varphi \quad (b)$$

De kromme AB van grafiek a wordt dan de (verticale) rechte A'B' van grafiek b, verder wordt BC de tak B'C'. De vorm van de tak BC hangt nauwelijks van φ^* af, zodat B'C' en BC nagenoeg gelijkvormig zijn.

Indien voor de kolomlast geldt $N < F_k$, dan komen de kolommen weer verticaal te staan, terwijl als $N > F_k$ de kolommen een bepaalde scheefstand houden. Merk nu ook op dat aan de bovenstaande vergelijking (b) voor $\varphi = 0$ (de grondtoestand) door iedere verhouding N/F_k wordt voldaan (grafiek c).

Echter de tak B''D'' ($N/F_k > 1$) van de grafiek c komt niet te voorschijn uit de grafiek a, omdat voor $N/F_k > 1$ de grondstand

(grafiek c) niet wederkomt.
Het bovenstaande kan als volgt worden uitgewerkt.

opgave 8.2 Controleer de grafieken □

Grondtoestand en verstoring

Men zegt dat een constructie in de *grondtoestand* verkeert, indien de *werkelijke* krachten op ieder onderdeel van de *vervormde* constructie met elkaar in evenwicht zijn.

De *grondtoestand* betekent voor het geval van figuur 8.1c dat kolommen verticaal zijn en er evenwicht is voor iedere waarde van de kolombelasting. Vanwege de vereenvoudigingen werd de constructie onvervormd gedacht. Echter in het algemeen zijn de vervormingen in de grondtoestand mede bepalend voor het gedrag van de constructie bij verstoring van de grondtoestand.

De puntlast \bar{F}^* ter plaatse van het midden van de ligger verstoort het grondevenwicht, het evenwicht in de grondtoestand. Immers, daardoor gaan de kolommen scheef staan en gaan de kolomlasten buigkoppels uitoefenen op de kolom-ligger-verbindingen. Men noemt een last die het evenwicht in de grondtoestand wijzigt een *verstorende last* of kortweg *verstoring*.

Stabiliteit

Een constructie bevindt zich in de grondtoestand. Verstoring hiervan leidt tot een nieuwe toestand. De grondtoestand van een constructie is *stabiel*, wanneer de constructie na de aangebrachte verstoring wordt weggenomen terugkeert in zijn (oorspronkelijke) grondtoestand.

De grondtoestand van de ligger-kolommen-constructie wordt gegeven door kolommen verticaal in evenwicht voor iedere waarde van de kolomlast N (figuur 8.2c). Verstoring hiervan door de last \bar{F}^* leidt tot een nieuwe toestand (vervormingen en nieuw evenwicht). Als deze last wordt weggenomen dan keert de oorspronkelijke (grond)toestand ($\varphi = 0$) terug, mits voor de werkelijke grootte N van de kolomlasten geldt $N < F_k$.

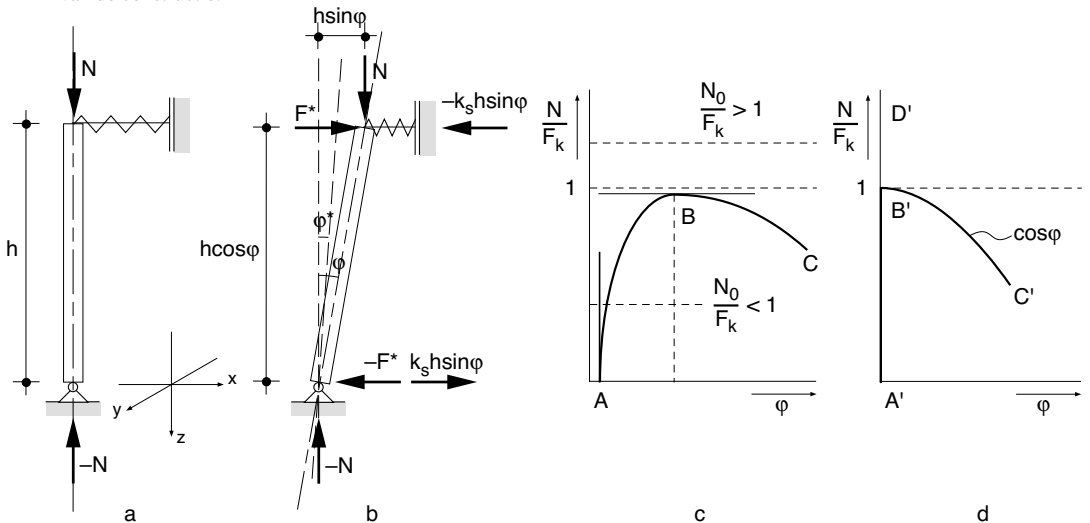
Men noemt de grootte F_k de kritische last. De waarde van F_k wordt geheel bepaald door de geometrie van de constructie in de grondtoestand en de materiaaleigenschappen van de constructie.

Stabiliteitsgrens

De kromme B'C' van de figuur 8.2b noemt men de *stabiliteitsgrens*. Langs deze kromme is er steeds evenwicht. De vraag kan

nu rijzen of langs deze kromme het evenwicht ook stabiel is. In het voorafgaande is vastgesteld dat de oorspronkelijke grondtoestand (kolommen verticaal) stabiel is voor $N < F_k$. Stel dat na het aanbrengen van de verstoring en het weer weg nemen daarvan zich voor $N > F_k$ een nieuw evenwicht heeft ingesteld (B'C') met φ_0 de hoek van scheefstand van de kolommen. Vervolgens wordt deze nieuwe grondtoestand verstoord door een last \bar{F}^* . Dan ontstaat een evenwichtskromme die rechts-onder de kromme B'C' ligt. Wordt nu de verstoring \bar{F}^* weer weggenomen dan ontardt deze kromme weer in de kromme B'C'. Met andere woorden, na het wegnemen van de verstoring wordt de nieuwe grondstand ($N > F_k$, $\varphi = \varphi_0$) weer ingenomen. Langs de stabiliteitsgrens is het evenwicht dus stabiel, dus ook voor $N = F_k$. Bekijk nu de evenwichtsvergelijking (b). Voor $\varphi = 0$ voldoet iedere N/F_k ; er is evenwicht in de grondtoestand ($\varphi = 0$) voor iedere N : voor $N/F_k < 1$ stabiel en op grond van het bovenstaande ook stabiel voor $N/F_k = 1$. Echter voor $N/F_k > 1$ is het evenwicht niet stabiel, omdat de grondtoestand ($\varphi = 0$) niet terugkeert. Verder, voor elke nieuwe grondtoestand $\varphi > 0$ is het evenwicht op deze grens stabiel. Of het evenwicht op de stabiliteitsgrens stabiel is moet steeds apart worden onderzocht. In het nu volgende voorbeeld is het evenwicht langs de stabiliteitsgrens niet stabiel.

Figuur 8.3 Het evenwicht van de constructie.



Voorbeeld. Een starre kolom wordt aan de voet ondersteund door een scharnierverbinding en aan de top door een ontspannen veer met rol (figuur 8.3a). In de grondtoestand staat de kolom verticaal ($\varphi = 0$) en is de veer ontspannen. De kolom wordt centraal belast door een drukkracht ter grootte N . In deze grondtoestand kan voor iedere waarde van N aan het evenwicht

worden voldaan.

Door een horizontale kracht ter grootte F^* op de top van de kolom wordt de horizontaal blijvende veer ingedrukt. Deze indrukking gaat vergezeld van een scheefstand van de kolom. Als gevolg van het hierdoor onstane koppel wordt de veer nog meer ingedrukt.

Het verband tussen de verkorting ($u^* = h \sin \varphi^*$) van de veer ten gevolge van alleen de kracht \bar{F}^* luidt

$$F^* = k_s \cdot h \cdot \sin \varphi^*$$

met k_s is de veerstijfheid (figuur 8.3b), φ^* de bijbehorende hoek van scheefstand van de kolom en h de kolomhoogte.

De werkelijke hoek van scheefstand van de kolom is φ . Het momentenevenwicht om de voet van de kolom vereist dat

$$-N h \sin \varphi - F^* h \cos \varphi + k_s h \sin \varphi \cdot h \cos \varphi = 0$$

Substitutie van F^* in deze evenwichtsvergelijking leidt tot

$$\frac{N}{F_k} \sin \varphi = \cos \varphi (\sin \varphi - \sin \varphi^*) \quad \text{met } \varphi \geq \varphi^*$$

$$\text{met } F_k = k_s h$$

opgave 8.3 Controleer de grafiek. □

Indien nu de verstoring \bar{F}^* wordt weggelaten, zodat $\varphi^* = 0$, dan wordt de evenwichtsvergelijking

$$\frac{N}{F_k} \sin \varphi = \cos \varphi \sin \varphi \quad \text{met } \varphi \geq 0 \quad \text{(b')}$$

De tak AB van grafiek c van figuur 8.3 onttaard in A'B' van grafiek d en BC wordt B'C'.

Het evenwicht in de grondtoestand $\varphi = 0$ is voor $N < F_k$ stabiel. In deze grondtoestand voldoet iedere N/F_k aan het evenwicht. De tak B'D' van figuur 8.3d wordt niet teruggevonden, omdat voor $N > F_k$ het evenwicht niet stabiel is. Ook langs de stabiliteitsgrens B'C' is het evenwicht niet stabiel, dus ook niet voor $N = F_k$, omdat er voor $\varphi \neq 0$ geen evenwicht mogelijk is. □

opgave 8.4 Waarom mogen beide leden van de vergelijkingen (b) en (b') niet worden gedeeld door $\sin \varphi$? (Merk op dat $\sin \varphi = 0$ voor $\varphi = 0$). □

Elasticiteitsgrens

In de beschouwde gevallen is stilzwijgend verondersteld dat het materiaal zich blijvend elastisch gedraagt. Uit deze gevallen blijkt dat voor een belasting iets groter dan de kritische last, de verplaatsingen en vervormingen vanuit de grondtoestand al ras grote waarden aannemen. Dit betekent dat in de praktijk, de elasticiteitsgrens zal worden overschreden en het materiaal gaat vloeien.

De elastische kritische last vormt dan ook een *bovengrens* voor de toelaatbare belasting, een grens waaronder de belasting moet blijven, niet alleen ingeval instabiliteit, doch ook bij stabiliteit en grote vervormingen.

Standvastigheid ofwel bestendigheid

In hoofdstuk 1 zijn de eisen geformuleerd waaraan een constructie moet voldoen evenwicht van krachten, plaatsvastheid, vormvastheid, standvastigheid en voldoende stijfheid en sterkte.

Een constructie is *standvastig*, indien de constructie in stand blijft wanneer de onderdelen van de constructie een weinig van stand veranderen. Met ander woorden de constructie is bestendig tegen extra vervormingen. Het moge duidelijk zijn dat deze eis door de eigenschappen van stabiliteit van de grondtoestand en belastingen kleiner dan de kritieke last preciezer wordt verwoord.

Stabiel betekent standvastig, bestendig. Men zegt: *iemand staat plaatsvast en bezit een stabiel karakter*.

Taalgebruik

In de mechanica van constructies noemt men de kritische last ook wel kritieke last of kortweg kniklast, welke naam is ontleed aan de zogenoemde Eulerse knikstaaf (§ 8.5). Verder onderscheidt men naast stabiel en labiel (= niet stabiel) evenwicht ook neutraal evenwicht. Neutraal evenwicht betekent evenwicht bij een belasting gelijk aan de kritieke last in de grondtoestand, waarbij ook evenwicht mogelijk is net buiten de grondtoestand. *Uit de twee behandelde gevallen blijkt, dat neutraal evenwicht niet het onderscheid tussen stabiel en labiel evenwicht is, maar zelf, of stabiel, of labiel is. Het evenwicht op de stabiliteitsgrens noemt men vaak knik (buckling).*

opgave 8.5 Onder een beladen waslijn plaatst men in het midden een stok om de lijn wat omhoog te brengen. Is deze constructie standvastig?

8.2 Arbeid en energie

Aangenomen mogelijke vervorming

In de voorafgaande gevallen werd het evenwicht van een constructie en onderdelen ervan in de grondtoestand, verstoord door een extra-belasting. Het nieuwe evenwicht werd bepaald. Vervolgens werd de ‘verstoring’ weer weggenomen en werd onderzocht of de constructie al dan niet de grondtoestand inneemt.

In de wiskundige theorie van de stabiliteit gaat men wat anders te werk. Men neemt aan dat de constructie vanuit de grondtoestand een mogelijke vormverandering ondergaat (figuur 8.1b). Hierbij wordt de oorzaak (de verstoringe belasting) niet beschouwd, noch in aanmerking genomen. Men kijkt of bij een aangenomen mogelijke vervorming vanuit de grondtoestand ook stabiel evenwicht mogelijk is en bij welke belasting. Men besluit daarbij dus direct tot de vergelijkingen (b) en (b') (verstoring verwijderd). Een aangenomen mogelijke vervorming heet een kinematisch toelaatbare vervorming (kineo = verplaatsing ondergaan).

De voor deze methode noodzakelijke wiskunde valt buiten het bestek van deze handleiding. Echter, deze wiskunde kan grotendeels worden vermeden door het zogenoemde energiecriterium, waaraan de volgende paragraaf is gewijd (criterium = maatstaf).

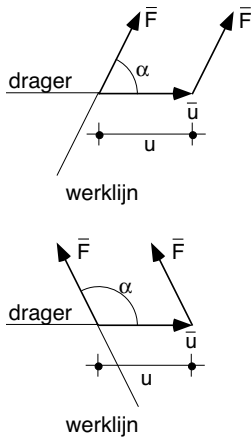
Arbeid

Wanneer een voorwerp wordt onderworpen aan krachten (contactkrachten en/of volumekrachten) dan ondergaat het voorwerp een starre verplaatsing en een vervorming, waardoor de aangrijpingspunten van de krachten verplaatsingen ondergaan. Als men een voetbal een punter geeft, dan krijgt de voetbal een hoeveelheid beweging, maar ook een vervorming.

De definitie van arbeid is: *‘indien het aangrijpingspunt van een kracht \vec{F} met constante grootte F een verplaatsing ter grootte u in de richting van de kracht ondergaat, dan verricht deze kracht de arbeid $W_u = F \cdot u$ ’.*

De eenheid van arbeid is Newtonmeter [Nm] ook wel Joule [J].

In het algemeen komt de richting van de kracht \vec{F} niet overeen met de richting van de verplaatsingsvector \vec{u} van het aangrijpingspunt, zodat een meer algemene definitie van de arbeid van een kracht gewenst is (fig. 8.4).



Figuur 8.4 Definitie van de arbeid W_u verricht door een kracht \vec{F} met constante grootte F wanneer het aangrijpingspunt de verplaatsing \vec{u} met grootte u ondergaat.

De arbeid W_u verricht door een kracht \vec{F} met constante grootte F bij een verplaatsing \vec{u} van haar aangrijpingspunt wordt

$$W_u = F \cdot u \cdot \cos\alpha,$$

waarin α is de hoek tussen de werklijn van \vec{F} en de drager van \vec{u} bij draaiing van \vec{u} in de richting van \vec{F} en omgekeerd. Het maakt niet uit hoe \vec{u} wordt gedraaid naar \vec{F} , omdat $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$.

Bezitten \vec{F} en \vec{u} gelijke richtingen dan $\alpha = 0$, dus $\cos\alpha = 1$, zodat $W_u = Fu$. Bezitten \vec{F} en \vec{u} tegengestelde richtingen dan $\alpha = \pi$, dus $\cos\alpha = -1$ waardoor $W_u = -Fu$. Staat de werklijn van \vec{F} haaks op de drager van \vec{u} dan $\alpha = \pi/2$ en $\cos\alpha = 0$ en dus $W_u = 0$.

Energie

Een voorwerp bezit vermogen tot arbeid of arbeidsvermogen (= energie), indien het door een of andere oorzaak in staat is een arbeid verrichtende kracht uit te oefenen.

Voorbeeld. Een gestuikte veer geeft bij ontspanning aan een star voorwerp een hoeveelheid beweging als gevolg van de kracht die de veer op het voorwerp uitoefent. De arbeid die de veerkracht bij verplaatsing van aangrijpingspunt verricht, geeft aan het voorwerp een arbeidsvermogen van beweging (kinetische energie). Anders gezegd, het arbeidsvermogen van de gestuikte veer (= de veerenergie) wordt omgezet in kinetische energie van het starre voorwerp. Omgekeerd kan een beweging van een star voorwerp worden gebruikt een veer veerenergie te geven. \square

Men onderscheidt verschillende soorten van vermogen tot arbeid, zoals vermogen van beweging (kinetische energie), vormveranderingsenergie (bij elastische vervormingen: veerenergie), bindingsenergie, stralingsenergie, warmte.

Langzaam toenemende kracht

Men zegt dat de grootte van een kracht op een plaatsvast voorwerp langzaam toeneemt in de tijd, indien het tempo waarin de grootte van de kracht toeneemt in de tijd vele malen kleiner is dan de snelheid van de trillingen in het voorwerp ingevolge deze kracht. Is nu de kracht langzaam toenemend dan hoeft de inwendige kinetische energie niet in aanmerking te worden genomen.

Voorbeeld. Indien men op een stemvork een kortstondige kracht (= stoot) uitoefent, dan verkrijgen de tanden van de stemvork

veerenergie en (inwendige) kinetische energie die zich openbaart in de trilling van de tanden. De bewegende tanden brengen de omringende lucht in beweging, zodat men een toon hoort. Echter brengt men de tanden langzaam naar elkaar toe door een langzaam toenemende kracht, dan hoort men geen toon. De arbeid door de knijpkrachten verricht wordt voornamelijk omgezet in de elastische energie van de tanden. □

Behoud van energie

Men vat de energieën in een voorwerp veelal samen onder de naam *inwendige energie*. De veerenergie is dus een vorm van inwendige energie. De energie van een voorwerp is de som van de energieën van haar delen van het voorwerp. In de statica van elastische constructies kunnen alle vormen van inwendige energie anders dan de veerenergie worden veronachtzaamd.

Veronderstel dat de uitwendige krachten op een constructie langzaam aangroeien in de tijd en dat de enige vorm van energie van de constructie de elastische vormveranderingsenergie is. Onder deze omstandigheden luidt de *wet van behoud van energie*: ‘De arbeid gedurende een tijdsduur verricht door de langzaam toenemende krachten op een plaatsvast elastisch voorwerp, is gelijk aan de toename van de veerenergie van dat voorwerp gedurende die tijdsduur’.

Noteert men de arbeid van de uitwendige krachten met W_u en de toename van de veerenergie met W_i , dan luidt voor de wet:

$$W_i = W_u$$

Materiaalgedrag

Voor elastische materialen wordt het verband tussen de spanning in het materiaal en de vervormingen gegeven door de wet van Hooke. Het verband tussen spanningen en vervormingen heeft niets te maken met het evenwicht van krachten. Een spanning in een voorwerp wordt altijd vergezeld van een vervorming van het voorwerp. Toch gaat men bij het proefondervindelijk vaststellen van de wet van Hooke (bijvoorbeeld de trekproef) wel uit van het evenwicht van krachten. Dit laat zich als volgt begrijpen.

Indien de belasting op een plaatsvast elastisch voorwerp willekeurig in de tijd verandert, dan is een deel van de belasting verantwoordelijk voor de spanningen en dus vervormingen in het voorwerp en het andere deel tegelijkertijd verantwoordelijk voor een hoeveelheid beweging binnen het voorwerp. Er is dan geen evenwicht van spanningen binnen het materiaal. Anders gezegd, de

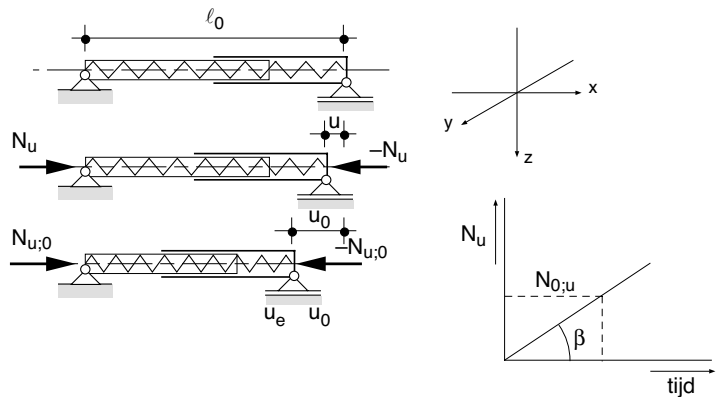
arbeid door de uitwendige belasting op het voorwerp verricht is gelijk aan de toename van de kinetische energie binnen het voorwerp en de vormveranderingsenergie van het voorwerp.

Als nu de uitwendige belasting langzaam toeneemt in de tijd, is de hoeveelheid bewegingen daarmee ook de kinetische energie binnen het plaatsvastе voorwerp te verwaarlozen. Op ieder tijdstip is er dan evenwicht van krachten op en spanningen in het voorwerp. Dit evenwicht verandert daarbij langzaam in de tijd. De arbeid door de uitwendige belasting wordt op ieder tijdstip in haar geheel omgezet in de vervormingsenergie. In het nu volgende wordt uitgegaan van de wet van Hooke en de uitdrukking voor de elastische vormveranderingsenergie afgeleid.

8.4 Voorbeelden

Schuifveerstang

Beschouwd wordt een veer die ingebouwd is in een onbuigzame schuifstang (figuur 8.5). De veerstang is plaatsvast opgelegd met een scharnier en een rol.



Figuur 8.5 Een geleidelijk belaste veer in een onbuigzame schuifstang.

$\tan \beta$ is het tempo van de toename van N in de tijd

De veer wordt *geleidelijk belast door aangroeiende drukkrachten* met eindwaarde $N_{u;0}$. Op elk tijdstip is er evenwicht, dat wil zeggen, dat de inwendige drukkracht N_i op een ‘doorsnede’ van de veer gelijk is aan de uitwendige belasting N_u

$$N_i = N_u \tag{I}$$

Het verband tussen de uitwendige belasting ter grootte N_u op de veer en de daarbij behorende lengte verandering ter grootte u van

de veer wordt op ieder tijdstip gegeven door

$$N_u = k_s u \quad (\text{II})$$

waarin k_s de stijfheid van de veer [N/m] is.

Groeit nu de belasting geleidelijk aan tot de waarde $N_{u;0}$ dan is de arbeid door de aangroeiende belasting verricht

$$W_u = \frac{1}{2} N_{u;0} u_0,$$

waarin u_0 is de lengteverandering van de veer behorend bij $N_{u;0}$.

Met (II) $N_{u;0} = k_s u_{u;0}$ is voor W_u ook te schrijven

$$W_u = \frac{1}{2} k_s u_0^2.$$

De uitdrukking geeft op grond van $W_u = W_i$ de elastische vormveranderingsenergie van de veer

$$W_i = \frac{1}{2} k_s u_0^2$$

Daar nu volgens (I) en (II) geldt dat voor de inwendige kracht $N_{i;0}$ op een doorsnede van de veer geldt $N_{i;0} = N_{u;0} = k_s u_{u;0}$ is voor de inwendige energie W_i ook te schrijven

$$W_i = \frac{1}{2} N_{i;0} u_0$$

Deze formulering voor W_i laat zich als volgt lezen: de toename van de veerenergie is gelijk aan de arbeid door de inwendige veerkracht verricht. De inwendige energie W_i^* per eenheid van lengte ℓ_0 van de ontspannen veer wordt gegeven door W_i/ℓ_0 ,

$$W_i^* = \frac{1}{2} k_s \ell_0 \frac{u_0^2}{\ell_0^2} \cdot \frac{1}{\ell_0} = \frac{1}{2} k_s \ell_0 \epsilon_0^2$$

waarin ϵ_0 de grootte van stuik van de veer is.

Elastische trek(druk)staaf

De veerstang wordt nu vervangen door een staaf. De onbelaste staaf bezit de lengte ℓ_0 , de dwarsdoorsnede-oppervlakte A_0 en het materiaal bezit de elasticiteitsmodulus E [N/m²].

De staafeinden worden met geleidelijk toenemende drukkrachten N_u belast, tot de eindwaarde $N_{u;0}$, zodanig op ieder tijdstip voor de drukkracht N_i op een willekeurige doorsnede van de staaf geldt N_i

= N_u . De normaalspanning σ op een doorsnede kan, als de dwarscontractie wordt verwaarloosd, worden gedefinieerd als

$$\sigma = \frac{N_i}{A_0}$$

Beschouwd wordt een eenheidsmoot met lengte '1' van de staaf. De normaalkrachten op de einden van de moot zijn met elkaar in evenwicht. Het verband tussen de uniforme drukspanningen ter grootte σ op de einden van de moot en de grootte ϵ van de stuik van de moot wordt gegeven door $\sigma = E\epsilon$ ($N_i = EA_0\epsilon$), zodat in de eindtoestand $\sigma_0 = E\epsilon_0$ ($N_{i;0} = EA_0\epsilon_0$).

De arbeid W_i^* door de beide σ_0 per eenheid van lengte van de onvervormde staaf over de doorsnede A_0 wordt gegeven door

$$W_i^* = \frac{1}{2} A_0 \sigma_0 \epsilon_0 = \frac{1}{2} EA_0 \epsilon_0^2$$

De arbeid W_i door de inwendige spanningen in alle moten wordt gegeven door

$$W_i = \Sigma W_i^* = \frac{1}{2} A_0 \sigma_0 \Sigma \epsilon_0 = \frac{1}{2} \ell_0 A_0 \sigma_0 \epsilon_0$$

daar de stuik constant langs de staaf, daar iedere eenheidsmoot op eenzelfde wijze wordt belast.

Voor W_i is met $V_0 = \ell_0 A_0$ voor het volume van de onvervormde staaf en $\sigma_0 = E\epsilon_0$ ook te schrijven

$$W_i = \frac{1}{2} V_0 \sigma_0 \epsilon_0 = \frac{1}{2} EV_0 \epsilon_0^2 = V_0 \frac{\sigma_0^2}{2E}$$

Daar $\ell_0 \epsilon_0$ de verkorting u_0 van de staaf is, geldt

$$W_u = \frac{1}{2} N_{u;0} \ell_0 \epsilon_0$$

Het volgt nu dat $W_u = W_i$, omdat $N_{u;0} = N_{i;0} = A_0 \sigma_0$.

Gebogen elastische staaf

In het algemeen geldt voor de inwendige arbeid: *'De vormveranderingsenergie binnen een voorwerp is gelijk aan de arbeid door de spanningen binnen het voorwerp verricht'*.

De stelling geldt ook indien de inwendige kinetische energie van het voorwerp wel in aanmerking wordt genomen. Bij veren en trek- of drukstaven is W_u simpel te vertalen in W_i en omgekeerd. Bij de gebogen ligger kan dat niet, men moet dan uitgaan van W_i , vandaar het belang van de stelling.

Beschouw een eenheidsmoot waarvan de einden geleidelijk wor-

den belast door buigkoppels, gelijk in grootte doch tegengesteld van richting, met eindgrootte K_0 . Er geldt dan:

$$K_0 = \frac{EI}{R_0}$$

met R_0 de kromtestraal van de moot en EI een hoofdbuigstijfheid van de moot. De arbeid W_i^* door beide eindkoppels verricht wordt gegeven door

$$W_i^* = \frac{1}{2} \frac{K_0}{R_0} = \frac{1}{2} \frac{EI}{R_0^2}$$

W_i^* heet de buigings- of krommingsenergie. In het algemeen verandert K_0 en dus R_0 langs de as van de ligger.

Voor het geval van een constant buigkoppel is de totale inwendige energie als volgt te berekenen. Beschouw een aan één einde ingeklemde ligger met lengte ℓ_0 waarvan alle moten op gelijke wijze worden belast, zodat het buigend moment $M = K_0$ langs de liggeras constant is.

De totale inwendige energie W_i is dan

$$W_i = \Sigma W_i^* = \ell_0 W_i^* = \frac{1}{2} \ell_0 \frac{K_0}{R_0} = \frac{1}{2} \frac{EI \ell_0}{R_0^2}$$

Nu is $\varphi_0 = \ell_0/R_0$ de hoekverdraaiing van het vrije einde van de ligger. Aangezien $W_u = W_i$ geldt

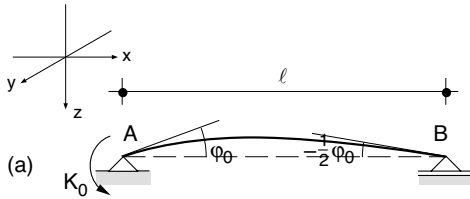
$$W_u = \frac{1}{2} K_{u,0} \varphi_0 \quad \text{met } K_{u,0} = K_0.$$

In het algemeen geldt dat de arbeid W_u door een buigkoppel $K_{u,0}$ werkend op het vrije einde van een ligger wordt gegeven door

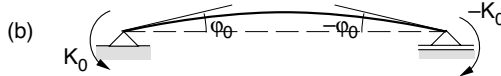
$$W_u = \pm \frac{1}{2} K_{u,0} \varphi_0$$

met φ_0 de hoekverdraaiing van het vrije einde (ten gevolge van $K_{u,0}$ en andere uitwendige koppels op de ligger). Bij de gebogen ligger wordt dus uit de inwendige energie W_i^* de uitwendige arbeid W_u bepaald, terwijl bij de veer of druk(trek)staaf een wederkerige omrekening van W_i en W_u mogelijk is. In de praktijk is het vaak ook voor gebogen staven eenvoudiger eerst W_u te bepalen, met name indien men gebruik kan maken van de ‘vergeet-mij-nietjes’.

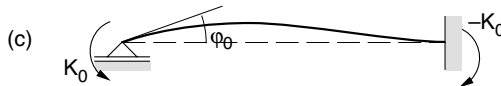
opgave 8.6 Controleer de vergeet-mij-nietjes.



$$\varphi_0 = \frac{K_0 l}{3EI}; W_u = \frac{1}{2} K_0 \varphi_0 = W_i = \frac{3}{2} \frac{EI \varphi_0^2}{l}$$



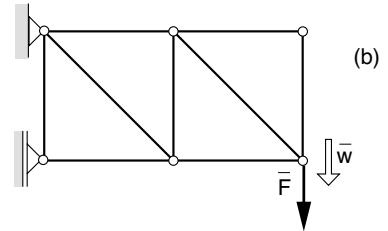
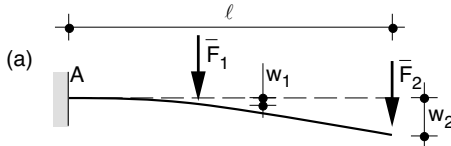
$$\varphi_0 = \frac{K_0 l}{2EI}; W_u = 2 \cdot \frac{1}{2} K_0 \varphi_0 = W_i = \frac{2EI \varphi_0^2}{l}$$



$$\varphi_0 = \frac{K_0 l}{4EI}; W_u = \frac{1}{2} K_0 \varphi_0 = W_i = \frac{2EI \varphi_0^2}{l} \quad \square$$

opgave 8.7 a) Er geldt:
$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

Controleer dat $\alpha_{12} = \alpha_{21}$



b) Stel dat de belaste staven van het vakwerk een in grootte gelijke normaalspanning σ bezitten (trek of druk).

Toon aan dat
$$W_u = \frac{1}{2} F w = \sum \frac{\sigma^2 V}{2E} = W_i$$

Hierin is V het totale volume van het vakwerk. Waarom is het 'stijfste vakwerk' ook het 'lichtste vakwerk'? (*Stelling van C.G.J. Vreedenburgh*). \square

8.5 Stabiliteitsvoorwaarde

Men zegt dat een belaste en vervormde constructie in haar grondtoestand verkeert indien de krachten op de constructie en op ieder onderdeel van de constructie met elkaar in evenwicht zijn. Men noemt dit het evenwicht van de grondkrachten. De *stabiliteitsvoorwaarde* luidt (stelling van W.T Koiter):

Het evenwicht van de grondkrachten op een constructie is stabiel, wanneer de constructie een mogelijke extra vervorming ondergaat en de bijbehorende extra arbeid $W_{u,e}$ door de permanente uitwendige grondkrachten niet groter is dan de toename $W_{i,e}$ van de daarbij behorende inwendige energie van de

constructie' oftewel

$$W_{u;e} \leq W_{i;e}$$

Bij de vorming van $W_{i;e}$ kan uitwisseling van inwendige energieën tussen de verschillende delen van de constructie plaatsvinden.

De permanente belasting op een constructie bestaat voornamelijk uit het eigen gewicht van de constructie en de rustende aanwezige belasting. Bij een extra vervorming van de constructie veranderen deze belastingen niet, vandaar de naam permanente last, doch zij leveren een bijdrage aan de arbeid en energie.

Voorbeeld. Een onbuigzame veerstang is star met de ondergrond verbonden en wordt geleidelijk belast door drukkrachten met uiteindelijke grootte $N_{u;0}$ (figuur 8.6). Er is evenwicht, zodat $N_{u;0} = N_{i;0} = k_s u_0$. De veer wordt vanuit deze grondtoestand gedacht een extra verkorting u_e te ondergaan. De toename $W_{i;e}$ van de elastische energie en de uitwendige arbeid $W_{u;e}$ door $N_{u;0}$ worden gegeven door

$$W_{i;e} = k_s u_0 u_e + \frac{1}{2} k_s u_e^2 = N_{i;0} u_e + \frac{1}{2} k_s u_e^2$$

$$W_{u;e} = N_{u;0} u_e$$

Het evenwicht in de grondtoestand is stabiel, als

$$W_{u;e} \leq W_{i;e} \quad \text{dus} \quad N_{u;0} u_e \leq N_{i;0} u_e + \frac{1}{2} k_s u_e^2$$

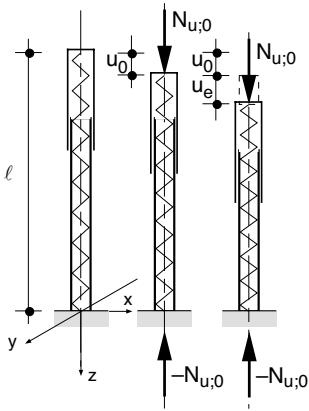
Omdat $N_{u;0} = N_{i;0}$ is voor deze voorwaarde te schrijven

$$0 \leq \frac{1}{2} k_s u_e^2$$

Aan deze voorwaarde wordt voor iedere u_e voldaan, zodat het evenwicht in de grondtoestand $u_e = 0$ stabiel is. \square

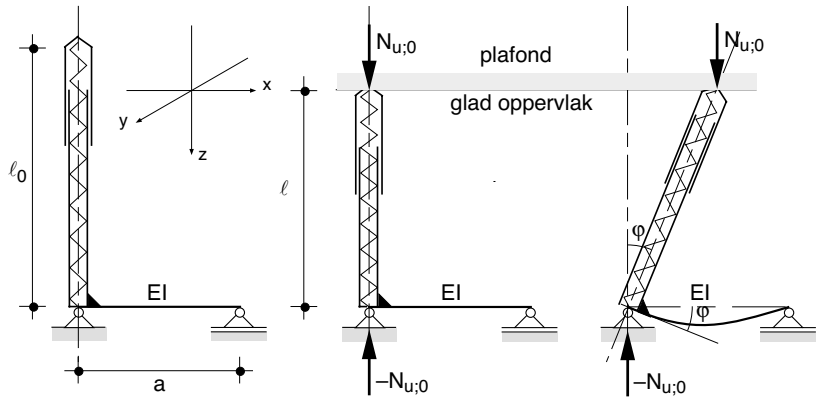
Voorbeeld. Een verticale veerstang met een zeer grote buigstijfheid is aan de voet verend met de ondergrond verbonden (figuur 8.7a). De top van de stang wordt geleidelijk belast door een drukkracht met grootte N_0 en daarna verhinderd in verticale richting te verplaatsen (figuur 8.7b). Er is evenwicht voor iedere $N_{u;0} = N_{i;0} = k_s(\ell_0 - \ell)$. Indien ℓ_0 de lengte is van de oorspronkelijk ontspannen veer en ℓ de lengte van de vervormde veer, dan is de elastische energie van de veer

$$W_{i;0} = \frac{1}{2} k_s (\ell_0 - \ell)^2$$



Figuur 8.6 Evenwicht van een onbuigzame veerstang.

Vanuit de grondtoestand (figuur 8.7b) wordt de top van de stang gedacht een zijdelingse verplaatsing te ondergaan, zodat de stang een hoek φ van scheefstand maakt met de verticaal. Er is geen wrijving tussen stang en plafond.



Figuur 8.7 Het evenwicht van een verende onbuigzame kolom en een buigzame ligger.

Belangrijk is nu op te merken dat de uitwendige belasting op de constructie in het geheel geen arbeid verricht: $W_{u,e} = 0$.

In de nieuwe stand bezit de veer de lengte $\ell' < \ell_0$ en elastische energie $W_{i;n}$ en de ligger de elastische energie $W_{i;\ell}$:

$$W_{i;n} = \frac{1}{2}k_s(\ell_0 - \ell')^2 \quad \text{met } \ell' = \frac{\ell}{\cos\varphi}$$

$$W_{i;\ell} = \frac{1}{2}C\varphi^2 \quad \text{met } C = \frac{3EI}{a}$$

met a de lengte van de ligger.

De verandering $W_{i;e}$ van de elastische energie van veer en ligger is

$$W_{i;e} = W_{i;n} - W_{i;0} + W_{i;\ell}$$

$$W_{i;e} = \frac{1}{2}k_s((\ell_0 - \ell')^2 - (\ell_0 - \ell)^2) + \frac{1}{2}C\varphi^2$$

$$W_{i;e} = \frac{1}{2}k_s((\ell_0 - \ell) + (\ell - \ell'))^2 - (\ell_0 - \ell)^2 + \frac{1}{2}C\varphi^2$$

$$W_{i;e} = k_s(\ell_0 - \ell)(\ell - \ell') + \frac{1}{2}k_s(\ell - \ell')^2 + \frac{1}{2}C\varphi^2$$

In deze uitdrukking is:

- $k_s(\ell_0 - \ell)(\ell - \ell')$ de negatieve arbeid door de oorspronkelijke inwendige veerkracht $N_{i;0}$ verricht alleen door de extra verlenging $(\ell - \ell')$ met $\ell' = \ell/\cos\varphi$;
- $\frac{1}{2}k_s(\ell - \ell')^2$ de extra inwendige energie ten gevolge van alleen de extra-verlenging;
- $\frac{1}{2}C\varphi^2$ de inwendige energie van de ligger.

Men kan nu opmerken, dat de inwendige energie van de veer kleiner is geworden, doch dat ligger een buigingsenergie levert. *In de constructie van kolom-ligger is dus een uitwisseling van inwendige energieën.* Verder, de uitwendige grondkracht $N_{u;0}$ levert geen extra arbeid, de oorspronkelijke inwendige veerkracht $N_{i;0} = k_s(\ell_0 - \ell)$ wel. Aangezien $W_{u;e} = 0$, is het evenwicht in de grondtoestand $\varphi = 0$ stabiel indien $W_{i;e} \geq 0$, ($\ell' = \ell/\cos\varphi$), dus

$$N_{i;0}\left(\ell - \frac{\ell}{\cos\varphi}\right) + \frac{1}{2}k_s\left(\ell - \frac{\ell}{\cos\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}C\varphi^2 \geq 0$$

Voor een kleine φ geldt: $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ en $\frac{1}{\cos\varphi} = 1 + \frac{\varphi^2}{2}$

Door verwaarlozing van de hogere machten van deze reeksen speelt de elastische veerenergie $\frac{1}{2}k_s\left(\ell - \frac{\ell}{\cos\varphi}\right)^2$ geen rol en de

permanente veerkracht juist wel.

Het evenwicht in de grondtoestand is dus stabiel, indien aan de voorwaarde voor iedere φ wordt voldaan:

$$0 \leq (-N_{i;0}\ell + C)\varphi^2 \quad \text{dus } N_{i;0} = N_{u;0} \leq C/\ell = F_k = \frac{3EI}{al}$$

Men kan nu aantonen dat het evenwicht in iedere nieuwe grondtoestand $\varphi \neq 0$ stabiel is (uiteraard voor $\ell_0 > \ell/\cos\varphi$). Dit vereist nogal wat rekenwerk.

Indien in figuur 8.1 één van de twee starre kolommen wordt verwijderd, dan wordt dezelfde kniklast gevonden als in het geval van de schuifveerstang (figuur 8.7). De mechanica is evenwel anders.

Voorbeeld. Beschouw wederom het voorbeeld van de inleiding. Voor de uitwendige arbeid $W_{u;e}$ verricht door twee permanente kolomkrachten uit figuur 8.1 geldt

$$W_{u;e} = 2Nh(1 - \cos\varphi) = 4Nh\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Het oorspronkelijke evenwicht is stabiel als voor iedere φ wordt voldaan aan $W_{u;e} \leq W_{i;e}$ of wel

$$4Nh\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \leq \frac{2EI\varphi^2}{\ell}$$

$$\frac{N}{F_k} \leq \frac{\varphi^2}{4\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \quad \text{met } F_k = \frac{2EI}{\ell h} \text{ en } \left(\frac{\varphi}{\sin\varphi} < 1 \text{ voor } \varphi \neq 0\right)$$

Voor kleine φ geldt $\sin\varphi \approx \varphi$. Het evenwicht in de grondtoestand $\varphi = 0$ is stabiel voor

$$\frac{N}{F_k} \leq 1$$

Onderzocht wordt nu of het evenwicht ook stabiel is in een nieuwe grondtoestand. Stel dat de kolommen in een nieuwe grondtoestand een hoek φ_0 met de verticaal maken. Met de kolombelasting $N_{u;0}$ behorend bij de scheefstand, eist het evenwicht

$$\frac{N_{u;0}}{F_k} = \frac{\varphi_0}{\sin\varphi_0} \quad \text{met } F_k = \frac{2EI}{\ell h}$$

De ligger wordt nu virtueel extra gebogen, zodat de hoek van scheefstand wordt $\varphi > \varphi_0$. De toename $W_{i;e}$ van de elastische ligger-energie bedraagt

$$W_{i;e} = \frac{2EI}{\ell} (\varphi^2 - \varphi_0^2)$$

De uitwendige arbeid door de kolomlasten verricht wordt gegeven door

$$W_{u;e} = 2N_{u;0}(h(1-\cos\varphi) - h(1-\cos\varphi_0)) = 4N_{u;0}h \cdot \sin\frac{\varphi+\varphi_0}{2} \sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}$$

Voor de stabiliteitsvoorwaarde $W_{u;e} \leq W_{i;e}$ is nu te schrijven

$$\frac{N_{u;0}}{F_k} = \frac{\varphi_0}{\sin\varphi_0} \leq \frac{(\varphi+\varphi_0)/2}{\sin((\varphi+\varphi_0)/2)} \cdot \frac{(\varphi-\varphi_0)/2}{\sin((\varphi-\varphi_0)/2)}$$

Aan deze voorwaarde wordt inderdaad voldaan daar $(\varphi/\sin\varphi) > 1$. Langs de stabiliteitsgrens is dus het evenwicht stabiel. (Neemt men $\varphi \rightarrow \varphi_0$ dan geldt het = teken). \square

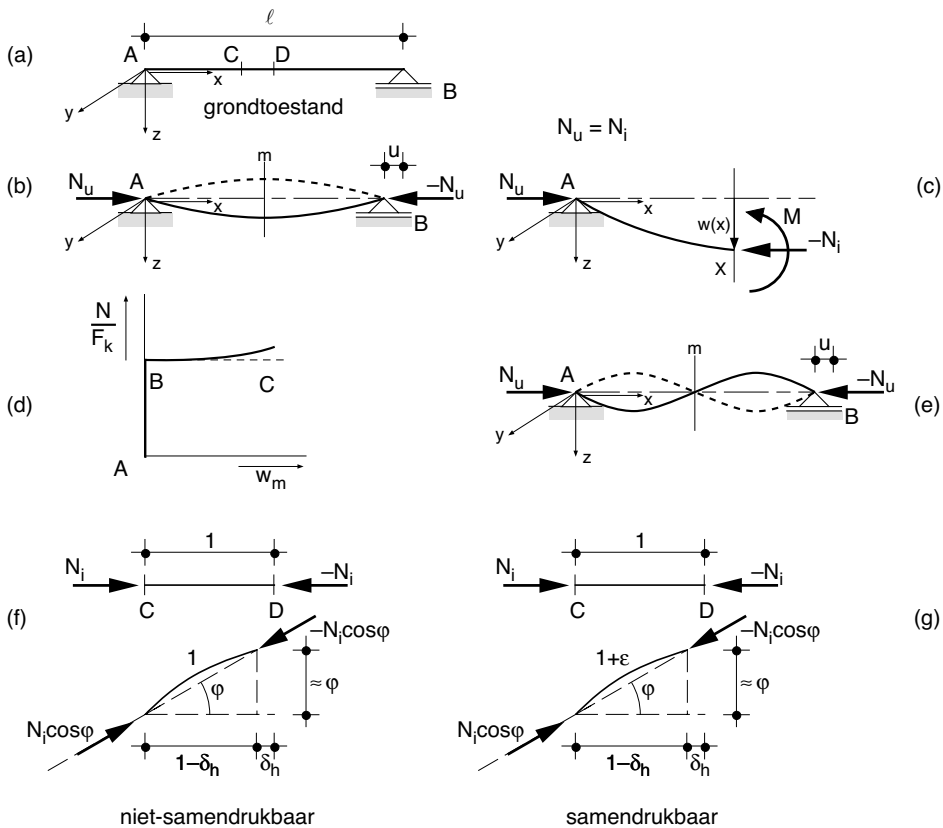
opgave 8.8 Toon met het energiecriterium aan dat de belaste kolom-veer-constructie van de figuur 8.3 niet standvastig is. \square

8.6 De Eulerse knikstaaf

De theorie volgens welke een centrisch gedrukte staaf voor het evenwicht niet alleen recht behoeft te zijn doch ook gebogen kan zijn, is bedacht door Leonhard Euler (1707–1783). Hiermee werd de basis gelegd voor de algemene theorie van de stabiliteit (1743). Proeven door Pieter van Musschenbroek (1693–1761) toonden

aan dat een op druk belaste staaf eerst buigt, alvorens deze breekt en dat de breuksterkte omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de lengte van de staaf (1729). De theorie van Euler verklaarde ondermeer Van Musschenbroek's resultaat.

Beschouw een rechte homogene elastische staaf AB ondersteund door een scharnier- en een rolverbinding, die wordt belast door een centrische drukkracht ter grootte N (figuur 8.8a). (De staaf bezit een eenvormige (prismatische) doorsnede en het staafmateriaal is homogeen, isotroop en elastisch.) Bij een geleidelijke toename van de drukbelasting wordt ook evenwicht mogelijk bij een gebogen vorm van de staaf (figuur 8.8.b). Dit kan als volgt worden toegelicht.



Figuur 8.8 Mogelijke buigvorm van een centrisch op druk belaste buigzame staaf.

In de grondtoestand is de staaf recht en in evenwicht, iedere moot wordt op gelijke wijze belast.

Aangenomen wordt dat de staaf vanuit deze grondtoestand flauw gebogen wordt. Het momentenevenwicht van de krachten op het staafgedeelte AX (figuur 8.8c) vereist dat

$$N_i w(x) = M(x) \quad \text{met } N_i = N_u$$

waarin $w(x)$ is de uitwijking van de snede X loodrecht op de ongebogen staaf, N_i de permanente (inwendige) belasting op deze snede en M is buigend moment van de snede ($M(x) = EI/R(x)$)

Met voor EI de zwakste hoofdbuigstijfheid van de staaf is voor de evenwichtsvergelijking te schrijven

$$N_i w(x) = \frac{EI}{R(x)} = M(x) \quad \text{met } N_i = N_u \quad (a)$$

Het buigend moment op de einden A en B van de staaf is nul, zodat de staafkromming ($\kappa = 1/R$) aldaar nul is. De plaats waar de kromming gelijk nul is, heet *buigpunt*. De kromming is maximaal in het midden van de staaf.

De laatste vergelijking bevat de twee onbekenden $R(x)$ en $w(x)$. Er is dus nog een tweede vergelijking voor R en w nodig die aan de voorwaarden $\kappa (= 1/R) = 0$ en $w = 0$ voor $x = 0$ en $x = \ell$ voldoet. Aangezien de benodigde wiskunde voor het verkrijgen van deze vergelijking buiten het bestek van deze handleiding ligt, worden slechts de volgende resultaten vermeld.

Er wordt gevonden dat

$$w(x) = \pm a \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad (b)$$

zodat zowel $w = 0$ als $M = 0$ voor $x = 0$ en $x = \ell$.

Voor de hoekverdraaiing $\varphi(x)$ (de helling van w) en voor de kromming $\kappa(x)$ (de helling van φ) gelden

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \mp a \frac{\pi}{\ell} \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \\ \kappa(x) &= \frac{1}{R(x)} = \pm a \frac{\pi^2}{\ell^2} \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \end{aligned} \quad (c)$$

Substitutie van (b) en (c) in (a) geeft

$$N_i = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (d)$$

Een nagenoeg rechte staaf wordt belast door een drukkracht die geleidelijk aangroeit tot de kritische last F_k .

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (e)$$

Er is nu zowel evenwicht mogelijk als de staaf recht is, als ook indien de staaf flauw gebogen is. In de rechte toestand is het evenwicht neutraal voor de belasting $N_u = F_k$. Het evenwicht in de grondtoestand van een constructie (de staaf is recht) noemt men neutraal, omdat bij een belasting gelijk aan de kritische belasting ook evenwicht mogelijk is bij een willekeurig kleine vormverandering van de constructie (flauw gebogen staaf; zie de definitie van neutraal in § 7.1).

Opgemerkt wordt dat door de onderstelling van een flauw gebogen ligger, waardoor verplaatsing w rechtevenredig is met de kromming $1/R$, volgens de evenwichtsvergelijking (a) de amplitude a van w onbepaald is.

Ook het resultaat voldoet aan $w = 0$ en $(1/R) = 0$ voor $x = 0$ en $x = \ell$ (figuur 8.8e)

$$w(x) = \pm a \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)$$

$$\frac{1}{R(x)} = \pm a \frac{4\pi^2}{\ell^2} \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)$$

Deze buigingsvorm leidt met (a) tot een kritische last $4F_k$. Deze buigingsvorm en nog hogere buigingsvormen (vergelijk grondtoon, octaaf, dubbeloctaaf) zijn slechts van theoretisch belang. Vanwege het bepalen van een maximaal toelaatbare belasting, een bovengrens, is de kleinste F_k maatgevend.

Het neutrale evenwicht en dat langs de stabiliteitsgrens BC (figuur 8.8d) is stabiel. Euler vond dat het verband tussen de uitwijking w_m van het midden van de staaf en de staafbelasting N_u wordt gegeven door

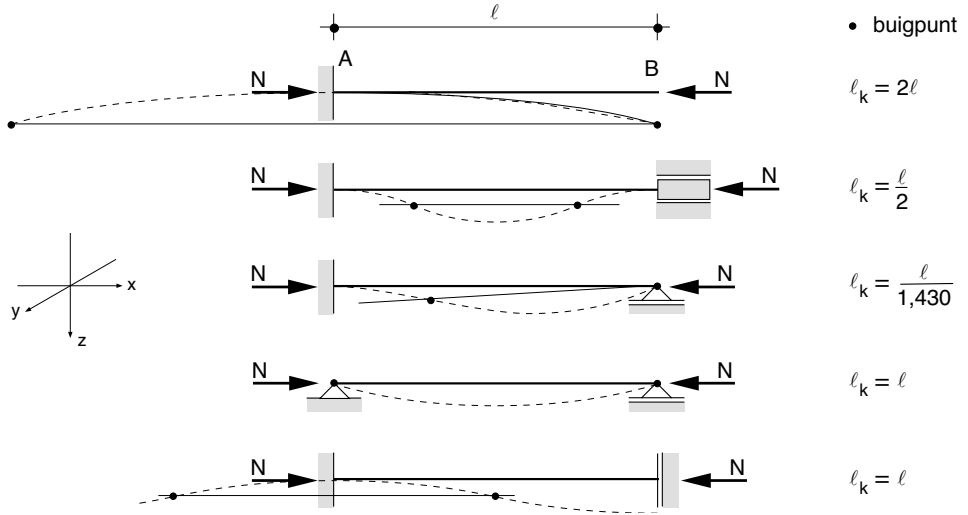
$$w_m = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \ell \left(\frac{N_u}{F_k} - 1 \right) \quad \text{met } F_k = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

ofwel

$$\frac{N_u}{F_k} = 1 + \frac{\pi^2 w_m^2}{8\ell^2}$$

Als $(w_m/\ell) \ll 1$ en $(\ell/R) \ll 1$, dan is eigenlijk alleen een $w \neq 0$ mogelijk indien $N_u > F_k$. De helling van BC is zo flauw, dat dit samen met de veronderstelling van een flauw gebogen ligger leidt tot een onbepaalde zeer kleine w . Constructief betekent dit voor bijvoorbeeld $N_u = 1,01F_k$ dan is $w = 0,09\ell$ en dat bij een liggerhoogte van $h/\ell = 0,1$ de elastische rekgrens wordt overschreden.

Het materiaal vloeit, dus al bij een zeer kleine overschrijding van de kritische last.



Figuur 8.9 Buiging met een willekeurig kleine uitwijking en symmetrische buigvormen tussen de buigpunten, waarbij voor $N = F_k$ evenwicht mogelijk is.

In figuur 8.9 is voor staven met verschillende opleggingen een kleine uitwijking geschetst met een sinusvorm tussen de buigpunten. De afstand tussen twee op één volgende buigpunten is de kniklengte l_k (zonnodig wordt de staaf in gedachten verlengd). De formule voor de kritische last gaat over in

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

Met $I = Ai^2$, waarin A de oppervlakte en i de traagheidsstraal van de staaf, en $\lambda (= l_k/i)$ de slankheid van de staaf, kan de kritische drukspanning $\sigma_{buc;d}$ (ook wel σ_{kr}) worden gegeven als

$$\sigma_{buc;d} = \frac{\pi^2 E}{\frac{l_k^2}{i^2}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Als de slankheid voldoende klein is dan vloeit het materiaal eerder tengevolge van de druklast dan dat er knik optreedt.

Er wordt weleens gedacht dat een staaf plotseling knikt. Dit is niet het geval. Geeft men de staaf bij een belasting $> F_k$ een kleine zijdelingse verstoring, dan wordt de staaf geleidelijk gebogen tot een nieuwe evenwichtstoestand wordt bereikt. Bij de doorslag van schalen is er wel sprake van een plotselinge buiging.

De Eulerse knikstaaf biedt een goed aanknopingspunt voor een nadere verkenning uitwisseling van inwendige energieën.

Beschouw nu een eenheidsmoot CD (figuur 8.8f). De moot wordt slechts gebogen, zodat de neutrale lijn haar lengte behoudt. Omdat de moot niet samendrukbaar is, verrichten de permanente spanningen van de grondtoestand (rechte staaf) geen arbeid. De elastische energie van de moot is dus alleen buigingsenergie

$$W_{i,e}^* = \frac{1}{2} \frac{EI}{R^2}$$

De einden van de moot ondergaan een horizontale onderlinge verplaatsing naar elkaar toe. De som van deze onderlinge verplaatsingen over alle moten, geeft de onderlinge verplaatsing u van de staafeinden (figuur 8.8b). De arbeid door de uitwendige belasting verricht is dus $N_u \cdot u$. Dit is de som uit $(N_u \delta_h)$. Omdat $N_u = N_i$ is deze arbeid per moot

$$W_{u,e}^* = N_u \delta_h$$

Uit de geometrie van de gebogen moot met de hoekverdraaiing φ

$$\text{volgt } (1 - \delta_h)^2 = 1 - \varphi^2 \text{ dus } 1 - \delta_h = \sqrt{1 - \varphi^2}$$

Met de benadering $\sqrt{1-x} = 1 - x/2$ voor kleine waarden x geldt

$$1 - \delta_h = 1 - \frac{\varphi^2}{2} \quad \text{dus } \delta_h = \frac{\varphi^2}{2}$$

$$\text{zodat, } W_{u,e}^* = N_u \frac{\varphi^2}{2}$$

Hiermee is de arbeidsvergelijking per moot (d) op te stellen:

$$W_{i,e}^* - W_{u,e}^* = \frac{1}{2} \frac{EI}{R^2} - N_u \frac{\varphi^2}{2} \quad (d)$$

Geheel anders is de situatie indien de staaf samendrukbaar is (figuur 8.8g). De in de grondtoestand rechte staaf zal in de gebogen toestand ontspannen met rek ε . Dit omdat de inwendige belasting op de einden van de moot $N_i \cos \varphi$ is in plaats van N_i . Dus de moot eerst met lengte '1' krijgt de nieuwe lengte $1 + \varepsilon$. De extra inwendige energie wordt

$$W_{i,e}^* = \frac{1}{2} EA \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \frac{EI}{R^2} - N_i \cos \varphi \cdot \varepsilon$$

De eerste term in het rechterlid geeft de extra elastische energie door de rek, de tweede term de buigingsenergie en de derde term de inwendige arbeid door de dode last N_i verricht.

Voor de uitwendige arbeid geldt weer $W_{u,e}^* = N_u \delta_h$

De arbeidsvergelijking per moot is

$$W_{i;e}^* - W_{u;e}^* = \frac{1}{2} EA_0 \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \frac{EI}{R^2} - N_i \cos \varphi \cdot \varepsilon - N_u \delta_h$$

Uit de figuur 8.8g volgt $(1 + \varepsilon)^2 = (1 - \delta_h)^2 + \varphi^2$

Voor kleine rekken (ε^2 verwaarloosbaar) kan worden gesteld dat

$$\varepsilon = -\delta_h + \frac{\delta_h^2}{2} + \frac{\varphi^2}{2}$$

Door de substitutie van ε in de arbeidsvergelijking en verwaarlozing van alle termen met machten groter dan twee is deze vergelijking te herschrijven tot

$$W_{i;e}^* - W_{u;e}^* = \frac{1}{2} EA \delta_h^2 + \frac{1}{2} \frac{EI}{R^2} - N_i \left(-\delta_h + \frac{\delta_h^2}{2} + \frac{\varphi^2}{2} \right) - N_u \delta_h$$

$$W_{i;e}^* - W_{u;e}^* = \frac{1}{2} (EA - N_i) \delta_h^2 + \frac{1}{2} \frac{EI}{R^2} - N_i \frac{\varphi^2}{2}$$

Opgemerkt wordt, dat de arbeid van de uitwendige last N_u tegen een deel van de inwendige arbeid N_i wegvalt ($N_u = N_i$). Bij een eerste, zeer flauwe buiging is $\delta_h \ll \varphi$, waardoor de eerste, altijd positieve term verwaarloosbaar wordt

$$W_{i;e}^* - W_{u;e}^* = \frac{1}{2} \frac{EI}{R^2} - N_i \frac{\varphi^2}{2} \quad (d')$$

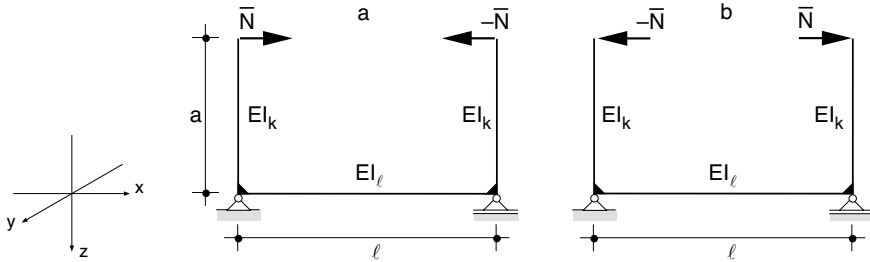
Deze laatste uitdrukking (d') komt overeen met (d), omdat $N_u = N_i$, doch de herkomst van $N_i \varphi^2/2$ is anders dan die van $N_u \varphi^2/2$. Vergelijk de gegeven voorbeelden van starre kolom en schuifveerstang.

8.7 Eerste- en tweede ordeberekening

In de ontwerpfase van een constructie wordt, bij het berekenen van het evenwicht van krachten op de constructie en delen ervan, de vervorming niet in de berekening meegenomen. De aangrijpingspunten en de werklijnen van de krachten worden bepaald aan de hand van de tekeningen van de onvervormde constructie. Een dergelijke berekening wordt een *eerste orde berekening* genoemd. Bij een tweede orde berekening wordt bij de berekening van het evenwicht de vervorming wel in acht genomen.

De theorie van de stabiliteit is gebaseerd op deze tweede orde berekening, waarbij de vervorming van de constructie wel in aanmerking wordt genomen.

Indien de vervormingen van een constructie relatief ‘groot’ zijn, dan is de berekening van het evenwicht altijd een tweede-orde berekening (*twee orde geometisch niet lineaire berekening*).

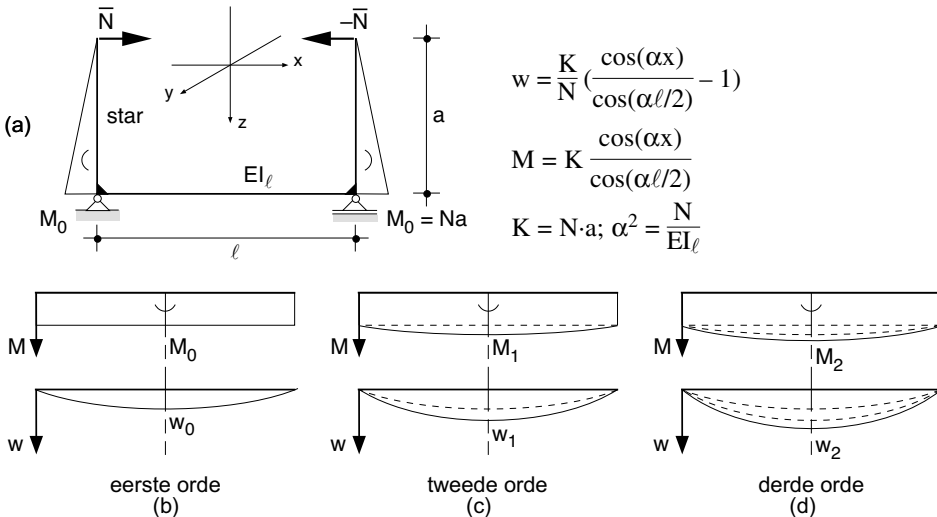


Figuur 8.10. Het onderscheid bij een tweede orde berekening.

Voorbeeld. Een constructie, bestaande uit een ligger en twee kolommen, wordt op twee verschillende wijzen belast (figuur 8.10). De kolommen zijn (moment)stijf met de ligger verbonden en de buigingsstijfheid EI_k van de kolommen is vele malen groter dan de buigstijfheid EI_l van de ligger: ($EI_l \ll EI_k$).

Door de koppels – ten gevolge van de horizontale kolombelastingen – ter plaatse van de kolom-ligger verbinding wordt de ligger gebogen. Deze doorbuiging wordt vergroot door de aanwezigheid van drukkrachten op de ligger. In het geval van trekkrachten wordt de buiging verkleind.

Figuur 8.11 Eerste orde, tweede orde en derde orde berekening.



Aangenomen wordt dat de ligger slechts flauw gebogen is (verhouding lengte/kromtestraal = $\ell/R \ll 1$). Indien de ligger alleen door buigkoppels ter grootte $K (= N \cdot a)$ wordt belast dan geldt voor de uitwijking w_0 van het midden van de ligger

$$w_0 = \frac{1}{8} \frac{K \ell^2}{EI_\ell}$$

De grootte van het buigend moment op de middensnede is gelijk aan de grootte van de buigkoppels:

$$M_0 = K.$$

Het onderscheid tussen het linker geval en het rechter geval openbaart zich op meer dan één wijze.

Beschouw nu eerst de op druk belaste ligger wordt (figuur 8.10a en 8.11a). Gevonden wordt dat voor de grootte M van het buigend moment in het midden en de uitwijking w van het midden bij benadering geldt:

$$M = M_0 \left\{ 1 + \frac{N \ell^2}{8EI_\ell} \left(1 + \frac{5N \ell^2}{48EI_\ell} \left(1 + \frac{N \ell^2}{10EI_\ell} + r \right) \right) \right\} \quad (a_1)$$

$$w = w_0 \left\{ 1 + \frac{5N \ell^2}{48EI_\ell} \left(1 + \frac{N \ell^2}{10EI_\ell} + r \right) \right\} \quad (a_2)$$

onder de voorwaarde $\sqrt{\frac{N \ell^2}{4EI_\ell}} < 1$

De term r bevat machten van $(N \ell^2/EI_\ell)$ groter dan 1.

De kritische Eulerlast F_k van de ligger is

$$F_k = \frac{\pi^2 EI_\ell}{\ell_k^2} \quad \text{met } \ell_k = \ell.$$

Hiermee is de voorwaarde te herschrijven tot

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{F_k}} < 1.$$

Hieraan zal in de praktijk worden voldaan.

De oplossingen (a₁) en (a₂) gelden bij benadering ook voor M en w in een willekeurige liggersnede x .

De wiskundig gevonden formules (a₁) en (a₂) kunnen ingenieus worden opgebouwd. Een eerste orde berekening geeft (figuur

8.11b)

$$M = M_0 = K \quad (= \text{constant}) \quad (b_1)$$

$$w = w_0 = \frac{1}{8} \frac{M_0 \ell^2}{EI} \quad (b_2)$$

(vergelijk (a₁) en (a₂))

Ten gevolge van de optredende uitwijking w_0 wordt het buigend moment vergroot (figuur 8.11c). Rekening houdend met dit tweede orde effect wordt het buigend moment

$$M = M_1 = M_0 + Nw_0 = M_0 \left(1 + \frac{N \ell^2}{8EI} \right)$$

(vergelijk (a₁))

Het extra buigend moment veroorzaakt weer een extra uitwijking (figuur 8.11c). Nu geldt voor midden van de ligger

$$M_1 - M_0 = Nw_0 = \frac{1}{8} \frac{NM_0}{EI} \ell^2 \quad (c_1)$$

Aangezien $(NM_0/EI\ell)$ als de additionele liggerbelasting nagenoeg constant (eigenlijk parabolisch langs de liggeras) is, kan de additionele uitwijking $(w_1 - w_0)$ worden bepaald en daarmee door middel van (b₂) de tweede orde uitwijking w_1

$$w_1 - w_0 = \frac{5}{384} \frac{NM_0}{(EI)^2} \ell^4$$
$$w_1 = w_0 + \frac{5}{384} \frac{NM_0}{(EI)^2} \ell^4 = w_0 \left(1 + \frac{5}{48} \frac{N \ell^2}{EI} \right) \quad (c_2)$$

(vergelijk (a₂))

Deze tweede orde uitwijking verhoogt opnieuw het buigend moment (figuur 8.11d). Het derde orde buigend moment M_2 in het middel van de ligger wordt gegeven door

$$M_2 = M_0 + Nw_1 = M_0 \left\{ 1 + \frac{1}{8} \frac{N \ell^2}{EI} \left(1 + \frac{5}{48} \frac{N \ell^2}{EI} \right) \right\} \quad (d_1)$$

(vergelijk (a₁))

Dit derde orde moment leidt weer tot een grotere uitwijking. Het extra buigend moment $M_2 - M_1$ leidt tot een extra uitwijking, zodat met (c₂) de derde orde uitwijking w_2 te bepalen is

$$M_2 - M_1 = \frac{1}{8} \left(\frac{NM_0}{EI_\ell} \frac{5N}{48EI_\ell} \right) \ell^2$$

$$w_2 - w_1 = \frac{5}{384} \left(\frac{NM_0}{(EI_\ell)^2} \frac{5N\ell^2}{48EI_\ell} \right) \ell^4$$

$$w_2 = w_0 \left\{ 1 + \frac{5}{48} \frac{N\ell^2}{EI_\ell} \left(1 + \frac{5}{48} \frac{N\ell^2}{EI_\ell} \right) \right\} \quad (d_2)$$

(vergelijk (a₂)).

Zo kan men steeds verder rekenen, totdat de vergelijkingen (a₁) en (a₂). In de praktijk beperkt men zich tot een tweede orde berekening. Aangezien, voor de toelichting hier, slechts benaderend gewerkt wordt, treedt er een klein verschil met (a) op.

Door de invoering van de Eulerse knikfactor

$$n = \frac{F_k}{N}, n > 1$$

kunnen de vergelijkingen (a₁) en (a₂) benaderd worden door

$$M = M_0 \left\{ 1 + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n} + r \right) \right) \right\}$$

$$M = M_0 \left\{ 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots \right\} \approx \frac{n}{n-1} M_0 \quad \text{met } n = \frac{F_k}{N} > 1 \quad (e_1)$$

$$w = w_0 \left\{ 1 + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n} + r \right) \right\}$$

$$w = w_0 \left\{ 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots \right\} \approx \frac{n}{n-1} w_0 \quad \text{met } n = \frac{F_k}{N} > 1 \quad (e_2)$$

Men noemt $n/(n-1)$ de *vergrotingsfactor*.

Uit het bovenstaande volgt dat de op druk belaste gebogen ligger met twee zaken rekening moet worden gehouden:

- de druklast moet kleiner zijn dan de kritische last, indien knik maategevend: $n > 1$.
- het grootste buigend moment, in het midden van de ligger, mag geen aanleiding tot vloeï geven, aangezien de constructie dan bezwijkt.

Geheel anders is de toestand wanneer de ligger op *trek* wordt belast (figuur 8.10b). Voor de tweede orde berekening kan een vergelijkbare berekening worden opgezet met als resultaat

$$M \approx M_0 \frac{n}{1+n}$$

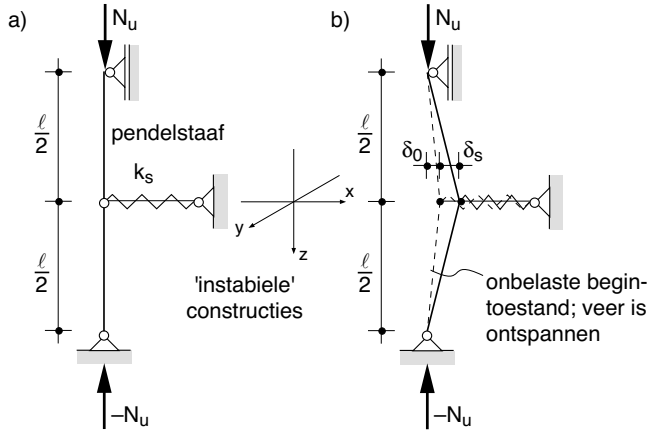
voor elke n ,

$$w \approx w_0 \frac{n}{1+n}$$

zodat het tweede orde buigend moment kleiner is dan het eerste orde moment. Hetzelfde geldt voor de uitwijking.

Uit het bovenstaande volgt dat als gevolg van een trekkracht het grootste buigend moment ter plaatse van de kolom-ligger-verbindingen zit. Indien daar vloeit optreedt zal de constructie niet direct bezwijken, omdat bij het naar buiten draaien van de kolommen het buigend moment kleiner wordt. □

opgave 8.9 1) Toon aan dat indien N_u geleidelijk is opgebouwd



– in geval a: $F_k = \frac{k_s \ell}{4}$

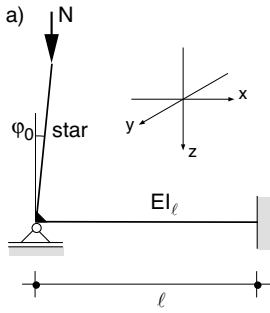
– in geval b bij evenwicht: $\delta = \delta_0 + \delta_s = \frac{n}{n-1} \delta_0$ met $n = \frac{F_k}{N_u}$

(Uit evenwicht volgt

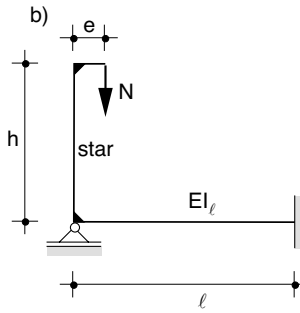
$$\frac{N_u}{\frac{1}{2}k_s \delta_s} \approx \frac{\ell/2}{\delta_0 + \delta_s})$$

– in geval b de kritische last niet kan worden bereikt. □

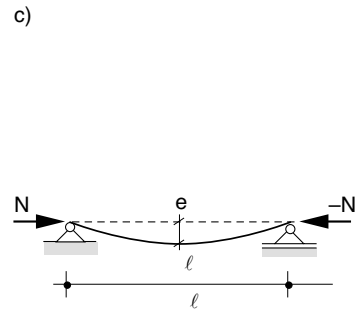
2) Controleer voor de onderstaande constructies de tweede-orde berekening.



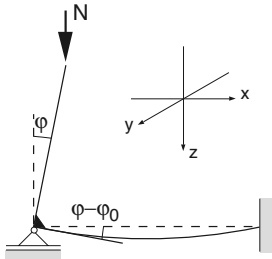
grondtoestand ($N = 0$ kN):
scheefstaande starre kolom



grondtoestand ($N = 0$ kN):
excentrisch belaste starre kolom



grondtoestand ($N = 0$ kN):
onvervormde natuurlijk flauw gebogen ligger

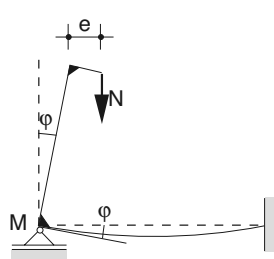


$$\varphi = \varphi_0 \frac{n}{n-1}$$

$$n = \frac{F_k}{N}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_k = \frac{4EI_\ell}{\ell h} \\ \text{kolom verticaal} \end{array} \right.$$

$$M = Nh\varphi_0 \cdot \frac{n}{n-1}$$

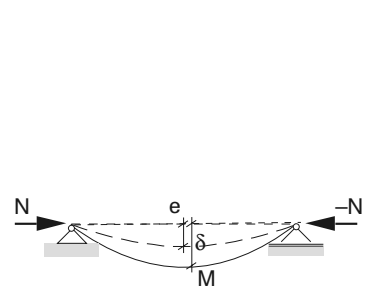


$$\varphi = \frac{e}{h} \cdot \frac{1}{n-1}$$

$$n = \frac{F_k}{N}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_k = \frac{4EI_\ell}{\ell h} \\ e = 0 \end{array} \right.$$

$$M = Ne \cdot \frac{n}{n-1}$$



$$\delta = e \cdot \frac{n}{n-1}$$

$$n = \frac{F_k}{N}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_k = \frac{\pi^2 EI_\ell}{\ell h} \\ \text{ligger recht} \end{array} \right.$$

$$M = Ne \cdot \frac{n}{n-1}$$

8.8 Bovengrens en ondergrens

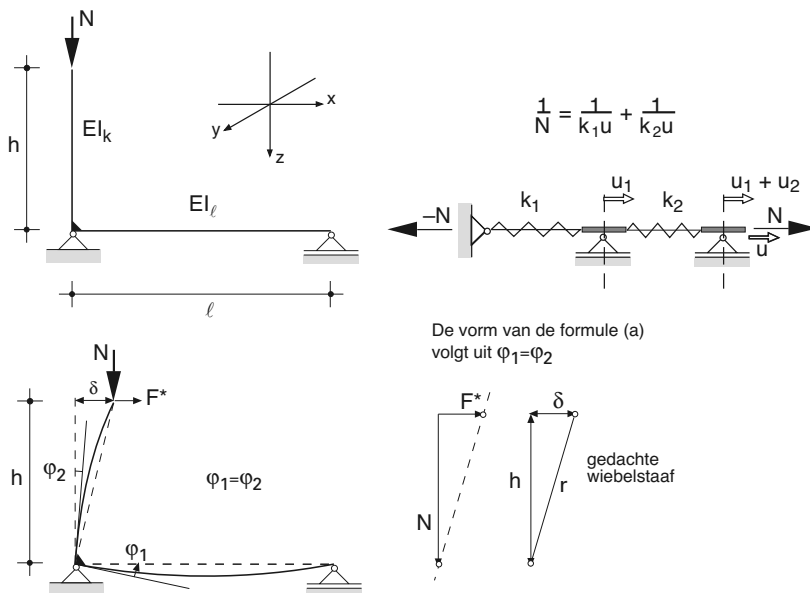
Het bepalen van de kritische last vereist veelal veel en moeilijke wiskunde. Gaat men nu de constructie op 'ingenieuze' wijze vereenvoudigen dan wordt altijd een te grote kniklast gevonden (John William Strutt, Baron Rayleigh (1842-1919)).

Voorbeeld. De kritische last op de constructie van figuur 8.12 wordt als volgt afgeschat::

$$\frac{1}{F_k} \approx \frac{1}{F_{k1}} + \frac{1}{F_{k2}} \quad (a)$$

$$\text{met : } F_{k1} = \frac{3EI_\ell}{h\ell} \quad (\text{de kolom is star}) \quad (a)$$

$$F_{k2} = \frac{\pi^2 EI_k}{(2h)^2} \quad (\text{de ligger is star})$$



Figuur 8.12. Verend ingeklemde kolom.

Men kan de formule voor de kritieke last ook anders afschatten. Stel dat op de kolom de horizontale kracht F^* werkt. Er geldt dan

$$\delta = \frac{F^* h^2 \ell}{3EI_\ell} + \frac{F^* h^3}{3EI_k} \quad (b)$$

Met $F^* h = N\delta$ en $N = F_k$ volgt

$$\frac{1}{F_k} \approx \frac{1}{3EI_\ell} + \frac{1}{3EI_k} \frac{1}{h^2} \quad (b)$$

De formule (a) geeft een te hoge kritische last en de formule (b) een nog hogere kritische last. Aan de bovenstaande benaderingen is de naam van de civiel ingenieur P. Wilhelm verbonden. Wilhelm bouwde het eerste stalen huis in Nederland (Gorinchem). Men noemt een te groot berekende kniklast een *bovengrens* en men noteert deze last met F_{ku} (upper). Deze F_{ku} is onveilig. Een te klein berekende kniklast noemt men een *ondergrens*. Men noteert deze te klein geschatte last met F_{kl} (lower). Deze F_{kl} is veilig. Het berekenen van een ondergrens gaat als volgt.

Stel dat F_{kE} de kniklast is van een wiebelstaaf ter lengte van de kolom (figuur 8.12).

$$F_{kE} = \frac{\pi^2 EI_k}{h^2}$$

Stel:

$$\alpha_u = \frac{F_{ku}}{N}, \quad \alpha_\ell = \frac{F_{k\ell}}{N}, \quad n = \frac{F_{kE}}{N} > 1, \quad (c)$$

of

$$\alpha_u = \frac{n F_{ku}}{F_{kE}}, \quad \alpha_\ell = \frac{n F_{k\ell}}{F_{kE}}.$$

De ondergrens $F_{k\ell}$ wordt nu bepaald volgens:

$$\alpha_u = \alpha_\ell \frac{n}{n - \alpha_\ell} \text{ met } \alpha_\ell < \alpha_u \text{ en } \alpha_\ell < n. \quad (d)$$

Er volgt dan:

$$\frac{1}{\alpha_\ell} = \frac{1}{\alpha_u} + \frac{1}{n}, \quad (e)$$

of

$$\frac{1}{F_{k\ell}} = \frac{1}{F_{ku}} + \frac{1}{F_{kE}}. \quad (f)$$

We passen dit resultaat toe op de verend ingeklemde kolom van figuur 8.12.

$$\frac{1}{F_{ku}} = \frac{1}{3EI_\ell} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI_k}{4h^2}}$$

$$\frac{1}{F_{kE}} = \frac{1}{\frac{\pi^2 EI_k}{h^2}}$$

zodat

$$\frac{1}{F_{k\ell}} = \frac{1}{3EI_\ell} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI_k}{5h^2}} > \frac{1}{F_{ku}}$$

Formule (d) zegt: de bovengrens is de ondergrens vermenigvuldigd met een *vergrotingsfactor*. Deze vergrotingsfactor $1/(1-\alpha_\ell/n)$ wordt nu niet betrokken op de verhouding $F_{k\ell}/F_k$ met F_k de werkelijke kritische last, doch op de verhouding $F_{k\ell}/F_{kE}$, met F_{kE} de kniklast van de gedachte pendel- of wiebelstaaf.

Voorbeeld. Beschouw een verticale star ingeklemde kolom met hoogte h en buigstijfheid EI_k . Dan

$$F_k = \frac{\pi^2 EI_k}{4h^2}, \quad F_{ku} = \frac{3EI_k}{h^2}, \quad F_{kE} = \frac{\pi^2 EI_k}{h^2}$$

zodat

$$F_{k\ell} = \frac{3\pi^2}{\pi^2 + 3} \frac{EI_k}{h^2} < F_k$$

Aan de formules voor de bovengrens en ondergrens zijn de namen van de hoogleraren A. Vrouwenvelder en J. Witteveen verbonden.

Literatuur

Wilhelm, P., Stabilliteitsberekening van portaalconstructies in het elastische en plastische gebied, Constructies (De Vries-Robbé) 1964, 1965, Gorinchem

Vrouwenvelder, A., en J. Witteveen, Lower bound approximation for elastic buckling loads, Heron, vol 20, no. 4 (1975).