
Woord vooraf

Dit leerboek voorziet in een behoefte van het onderwijs en de constructiepraktijk. Voor het onderwijs richt het zich primair op studenten civiele techniek (weg- en waterbouwkunde) en bouwkunde aan technische hogescholen en universiteiten. Het kan daarnaast zeker ook goede diensten bewijzen aan opleidingen werktuigbouwkunde, maritieme techniek, industrieel ontwerpen en lucht- en ruimtevaarttechniek. De behandelde stof kan uitstekend als basis voor zelfstudie dienen, waarschijnlijk in het tweede studiejaar.

In kringen van constructief-ontwerpers is aan het leerboek behoefte omdat nog altijd veel rekenprogrammatuur wordt gebruikt als 'zwarte doos'. Toezichthoudende instanties constateren dat veel berekeningen worden uitgevoerd zonder inzicht in de achtergronden van de software. Mede door de vele wenken, waarschuwingen en praktijkopdrachten beoogt het boek hierin verbetering te brengen.

Dit boek is het resultaat van samenwerking tussen docenten van de TU Delft en technische hogescholen in Nederland. Door toedoen van het Onderwijs Innovatie Centrum van de hogescholen is een responsiegroep van docenten gevormd, die de concepttekst van waardevol commentaar heeft voorzien. Door de vele wenken en aanbevelingen sluit het resultaat hopelijk goed aan op de onderwijspraktijk en de beoogde doelgroep in de praktijk.

Graag wil ik de collega-docenten ir. J.W. Gerner van de Hogeschool Haarlem, ir. G.E. Jansen van de Hogeschool Alkmaar, ir. J.H.M. Leen van de Hogeschool Enschede en ir. W.J.M. Peperkamp van de Hogeschool 's-Hertogenbosch danken voor hun gewaardeerde bijdrage. Datzelfde geldt voor mijn Delftse collega ir. C. Hartsuijker, die heeft gewaakt over de goede aansluiting op het onderwijs in de eigen faculteit. Aan de dames Carla Roovers en Jani Sutjiadi danken we de uitstekend verzorgde tekst, formules en tekeningen. Mijn vrouw Henny gaf de gebruikelijke stille bijdrage en wilde opnieuw vertrouwen dat het na dit boek echt rustiger zou worden.

Woord vooraf bij 2e druk

Het geeft voldoening dat het in 1996 gepubliceerde leerboek over de eindig-elementenmethode voor constructeurs nog steeds belangstelling geniet. Het ultieme doel is ook nog steeds geldig: het boek wil de theorie toelichten zodat rekenprogrammatuur voor staafconstructies niet als 'zwarte doos' wordt toegepast.

Het karakter van het boek is niet gewijzigd, al wijzigt de onderwijsomgeving wel. De auteur weet van de zorg over het voortdurend afkalvend mechanicaonderwijs in het hoger beroepsonderwijs, maar meent toch dat er plaats moet blijven voor onderwijs over de grondslagen en vertrouwt dat die plaats er ook zal blijven. In de universiteiten en bij professionele Masteropleidingen voor post-HBO-onderwijs is dat zeker het geval. Hij hoopt dat het leerboek opnieuw aan het gestelde doel dienstbaar mag zijn.

De leersstof zelf is niet gewijzigd, maar wel het bijgevoegde programma. Dat draait nu onder Windows. Mede om te waarborgen dat de notatie van de programmatuur blijft sporen met die van het boek, is overgegaan op het programma Matrix Frame. Lokaal zijn in het boek door deze verandering van software enige wijzigingen doorgevoerd. Het afzonderlijke boekje met uitwerkingen van de opgaven, dat bij de uitgever verkregen kan worden, is ook op het nieuwe programma aangepast. Ik spreek graag mijn dank uit aan ir. Ron Weener en zijn medewerkers van Matrix voor de zorgvuldige medewerking bij alle correctiewerk. Ook aan mevrouw Jeannette Delrock-Bowier van Fastgood die toegewijd de wijzigingen in tekst en formules heeft aangebracht.

Het doet de auteur genoegen dat de uitgever inmiddels ook het onderwijs van de Delftse mechanicacollega ir. C. Hartsuijker in boekvorm het licht doet zien. Met die boeken vormt dit boek over de elementenmethode een eenheid, zowel qua stof als qua notatie. Ik wens de gezamenlijke onderwijsvruchten van de Delftse 'school' een heel goede ontvangst toe in opleiding en praktijk.

Inhoudsopgave

	blz.
Symbolenlijst	ix
Inleiding	xi
1 De eindige-elementenmethode in grote lijnen	3
1.1 Het te behandelen probleem	3
1.2 Definities en tekenafspraken	5
1.2.1 Knoopbelasting	6
1.2.2 Knoopverplaatsingen	8
1.2.3 Verbindingskrachten en snedekracht	9
1.3 De constitutieve betrekking van een element	11
1.4 Evenwicht van knopen en kinematica in verbindingen	14
1.5 In elkaar voegen van alle betrekkingen	15
1.6 Oplossen van de globale vergelijkingen	17
1.7 Elementkrachten, normaalkracht en oplegreactie	18
*1.8 Systematiek en elementstijfheidsmatrix	22
1.9 Systematiek en globale stijfheidsmatrix	25
1.10 Invoer en uitvoer van computerberekening	30
1.11 Wenken en waarschuwingen	36
1.12 Algemeen geldend assenstelsel	40
1.13 Samenvatting	46
1.14 Opdrachten	50
2 Vakwerken	53
2.1 Probleemstelling	53
2.2 Elementstijfheidsmatrix	54
2.2.1 Eerste manier, kolomsgewijs	56
*2.2.2 Tweede manier, formele methode	57
2.3 Assemblage van de globale stijfheidsmatrix	58
2.4 Toepassingen	61
2.5 Samenvatting	68
2.6 Opdrachten	69
3 Vaste, verende en hellende ondersteuning	73
3.1 Voorgescreven verplaatsing	73
3.2 Verende oplegging	76
*3.3 Oplegging onder een hoek	78
3.4 Samenvatting	80
3.5 Opdrachten	81
4 Liggers	85
4.1 Belasting op knopen	85
4.2 Bepalen van de elementstijfheidsmatrix	87
4.2.1 Kolomsgewijs	87
*4.2.2 Formele methode	90

* Deze paragrafen kunnen eventueel worden overgeslagen.

	blz.	
4.3	Assemblage en oplossingen van de globale vergelijkingen	93
4.4	Berekening van momenten en dwarskrachten	94
4.5	Belasting op het element	96
4.5.1	Eerste berekeningsstap	97
4.5.2	Tweede berekeningsstap	99
4.5.3	Berekening van momenten en dwarskrachten	99
4.6	Verplaatsbare knopen	102
4.6.1	Eerste berekeningsstap, de knoopbelasting	103
4.6.2	Tweede berekeningsstap, de elementstijfheidsmatrix	104
4.7	Toepassing	119
4.8	Computerberekening	114
4.9	Samenvatting	117
4.10	Opdrachten	119
5	Orthogonale portalen en raamwerken	123
5.1	Probleemstelling	123
5.2	Primaire krachtsverdeling en knoopbelasting	125
5.2.1	Belastingsgeval 1 met belasting q	125
5.2.2	Belastingsgeval 2 met puntlast F	125
5.3	Elementstijfheidsmatrices	126
5.4	Assemblage	130
5.5	Uitwerking zonder extensie	132
5.5.1	Belastingsgeval 1 met belasting q	132
5.5.2	Belastingsgeval 2 met puntlast F	134
5.6	Uitwerking met extensie	137
5.7	Samenvatting	138
5.8	Opdrachten	140
*6	Algemene staafconstructies	143
* 6.1	Prismatische staaf, gewone knopen	145
* 6.2	Prismatische staaf, bijzondere knopen	146
* 6.3	Niet-prismatische staaf	148
* 6.4	StAAF met dwarskrachtvervorming	152
* 6.5	StAAF met scharnierende verbindingen	154
* 6.6	StAAF met verende verbindingen	155
6.7	Samenvatting	156
6.8	Opdrachten	157
Appendix A	- Matrixrekening	159
A.1	De begrippen matrix en vector	159
A.2	Matrixvermenigvuldiging	160
A.3	Getransponeerde matrix en vector	162
A.4	Oplossen van vergelijkingen	163
A.5	Factoriseren van een matrix	167
A.6	Inverteren van een matrix	168
Appendix B	- * Arbeidsbewijs	170
Antwoorden van de opdrachten		171
Trefwoordenregister		173

Symbolenlijst

a	lengte van element
A	oppervlakte van doorsnede
A_V	oppervlakte voor dwarskrachtstijfheid
\mathbf{B}	kinematische matrix
c	verkorte notatie voor $\cos \alpha$
C_N	flexibiliteit voor extensie (compliantie)
C	2×2 flexibiliteitsmatrix voor buiging
C_V	flexibiliteit voor dwarskracht
D_N	stijfheid voor extensie
\mathbf{D}	constitutieve matrix; diagonaalmatrix (in appendix A)
e	bovenindex om element aan te duiden
e_N	extensie van axiaal belast element
e_1	vervormingsparameter voor buiging (hoekverdraaiing)
e_2	vervormingsparameter voor buiging (hoekverdraaiing)
\mathbf{e}	vector van vervormingsparameters e_N, e_1, e_2
e_V	extra kanteling van doorsnede door dwarskracht
E	elasticiteitsmodulus
\mathbf{E}	eenheidsmatrix (in appendix A)
F	kracht
F_{xi}	kracht in x -richting in knoop i
F_{zi}	kracht in z -richting in knoop i
F_{xi}^o	oplegreactie in x -richting in knoop i
F_{zi}^o	oplegreactie in z -richting in knoop i
F_{xi}^e	elementkracht in x -richting aan uiteinde i
F_{zi}^e	elementkracht in z -richting aan uiteinde i
F_{zi}^e prim	kracht in z -richting op knoop i door belasting op element e
f_i	vector van krachten voor knoop i
f	vector van knoopkrachten voor globale constructie
f_{prim}	vector van primaire knoopkrachten voor globale constructie
f_{tot}	totale vector van knoopkrachten ($f - f_{\text{prim}}$)
f^e	vector van elementkrachten
G	glijdingsmodulus
h	hoogte van element
I	tweede-orde oppervlaktemoment van doorsnede (buigtraagheidsmoment)
I_w	torsietraagheidsmoment
i	knoopnummer
j	knoopnummer
\mathbf{K}	globale stijfheidsmatrix
K_{ij}	component van stijfheidsmatrix
K_i	stijfheid van veer bij vrijheidsgraad u_i
\mathbf{K}^e	elementstijfheidsmatrix
l	lengte van element of overspanning
\mathbf{L}	benedendriehoeksmatrix (in appendix A)

M	buigend moment in element (snedegrootheid)
M_1	moment links in element (snedegrootheid)
M_2	moment rechts in element (snedegrootheid)
\mathbf{M}	vector van momenten M_1 en M_2
M_w	wringend moment (snedegrootheid)
n	aantal knopen, aantal vrijheidsgraden
N	normaalkracht (snedegrootheid)
o	bovenindex om een voorgeschreven verplaatsing of oplegreactie aan te geven
\mathbf{p}	hulpvector (in appendix A)
q	gelijkmatig verdeelde belasting
\mathbf{q}	hulpvector (in appendix A)
R	oplegreactie
s	verkorte notatie voor $\sin \alpha$
\mathbf{s}	vector van snedegrootheden N, M_1, M_2
t	verdeelde torsiebelasting
T	bovenindex om transponeren aan te geven
T	koppel
T_{yi}	koppel om y -as in knoop i
$T_{yi \text{ prim}}$	koppel om y -as in knoop i ten gevolge van belasting op element
$T_{yi \text{ tot}}$	totaal koppel om y -as in knoop i ten gevolge van belasting op element
T_{yi}^o	oplegreactie die correspondeert met voorgeschreven rotatie
u	verplaatsing, vrijheidsgraad
u_{xi}	verplaatsing in x -richting van knoop i
u_{zi}	verplaatsing in z -richting van knoop i
u_{xi}^o	voorgeschreven verplaatsing in x -richting voor knoop i
u_{zi}^o	voorgeschreven verplaatsing in z -richting voor knoop i
\mathbf{u}	vector van verplaatsingen voor globale constructie
\mathbf{u}^e	vector van elementverplaatsingen
\mathbf{U}	bovendriehoeksmatrix (in appendix A)
V	dwarskracht (snedegrootheid)
x	coördinaat van globale assenstelsel
x_l	coördinaat van lokale element-assenstelsel
y	coördinaat van globale assenstelsel
y_l	coördinaat van lokale element-assenstelsel
z	coördinaat van globale assenstelsel
z_l	coördinaat van lokale element-assenstelsel
α	hoek tussen element en globale x -as
β_1	hoek tussen globale x -as en de x_1 -as van een lokaal assenstelsel voor knoop 1
β_2	hoek tussen globale x -as en de x_2 -as van een lokaal assenstelsel voor knoop 2
ε	specifieke rek
η	vormfactor voor dwarskrachtstijfheid
θ	specifieke verwringing; hoekverdraaiing (hulpgrootheid)
φ_{yi}	rotatie om y -as van knoop i
φ_{yi}^o	voorgeschreven rotatie om y -as van knoop i
ψ	coëfficiënt voor verhouding tussen buigstijfheid en rekstijfheid
ξ	coëfficiënt voor aandeel van dwarskrachtvervorming in de constitutieve matrix \mathbf{D} voor een buigingselement

Inleiding

Construerende ingenieurs kunnen het overgrote deel van de te ontwerpen constructies modelleren als een staafconstructie in het platte vlak en deze analyseren met behulp van een computerprogramma. Dit boek biedt daarvoor zowel de theoretische achtergrond als de praktische vorming en is bedoeld als leerboek voor ingenieurs in opleiding en als achtergrondmateriaal voor constructief-ontwerpers in de praktijk. De directe aanleiding voor de totstandkoming van dit boek is de groeiende behoefte aan goede leerstof voor zelfstudie. Die behoefte bestaat zowel voor de kern van technische hogere beroepsopleidingen, zoals weg- en waterbouwkunde, bouwkunde en werktuigbouwkunde, als voor de basisstudie van universitaire technische opleidingen.

Methode en constructietypen

De eindige-elementenmethode (EEM) voor staafconstructies is internationaal aanvaard als de meest geschikte aanpak voor het berekenen van sterkte- en stijfheidsproblemen met de computer. Omdat verplaatsingen de rol van onbekende spelen, spreekt men ook over de verplaatsingsmethode. De constructie wordt opgedeeld in staafelementen, die op een systematische wijze worden geassembleerd tot wat heet een globaal systeem, de constructie. In dit leerboek worden éédimensionale (1D) en tweedimensionale (2D) constructies behandeld. Voorbeelden van 1D-constructies zijn schoorstenen, masten, liggers en op wringing belaste assen. Voorbeelden van 2D-constructies zijn vakwerken, portalen en raamwerken. Ruimtelijke staafconstructies en balkroosters behoren niet tot de leerstof van dit boek.

Theorie en praktijk

Al is het boek niet opgezet als werkboek, het besteedt wel veel aandacht aan het in de praktijk toepassen van de methode. Het accent ligt niet alleen op het toelichten van de methode en de uitwerking ervan in computerprogramma's, maar ook op het werken met die programma's. Elk hoofdstuk wordt afgesloten met een aantal opdrachten. Een deel daarvan bestaat uit theorie-opdrachten om te toetsen of de theorie inderdaad wordt begrepen. Dat begrip is een belangrijk doel van dit leerboek. Het leidt niet op tot programmeur, maar biedt de constructeur achtergrondkennis. De constructief-ontwerper die een computerprogramma gebruikt, dient te weten welke gedachten en formele concepten erin zijn verwerkt, welke tekenafspraken gelden, waarom zoveel vrijheidsgraden per knoop worden gehanteerd, welke valkuilen er zijn, enzovoort. Hij of zij moet goede randvoorwaarden (opleggingen) kunnen formuleren en invoeren en dient doorkneet te zijn in het controleren van evenwicht. Een ander deel van de opdrachten bestaat uit praktijkopdrachten. Het beoogde leerdoel is immers ook, naast begrip, het oordeelkundig kunnen omgaan met beschikbare programmatuur. Daarom

geeft dit boek ook toegang tot een pc-programma (zie pag. iv). De praktijkopdrachten zijn bedoeld om de gepresenteerde theorie te herkennen in het omgaan met dit programma, om vaardigheid te ontwikkelen en om te attenderen op valkuilen. Het boek is overigens onafhankelijk van het programma geschreven. De op-drachten kunnen met elk ander programma dat op de markt is worden uitgevoerd. Achter in het boek is een korte lijst met antwoorden van de opdrachten opgenomen. In het afzonderlijke Uitwerkingenboek (te downloaden van de website van het boek, zie eveneens pag. iv) zijn alle opdrachten volledig uitgewerkt.

Gekozen opzet

Bij de eindige-elementenmethode kunnen we twee verschillende aspecten onderscheiden: 1. de stijfheidsmatrix van de afzonderlijke elementen en 2. de procesgang van de volledige berekening. Het tweede aspect, de gang van zaken in een eindige-elementenmethodeberekening, is onafhankelijk van de ingewikkeldheidsgraad van de elementen. De grote lijn in een programma is hetzelfde voor een eenvoudige 1D-constructie (schoorsteen) en voor een complexe 2D-constructie. Hier zal eerst die grote lijn worden gepresenteerd aan de hand van het eenvoudigste element in een 1D-constructie. Dat is een element met alleen normaal-kracht en met één vrijheidsgraad per knoop. Zo wordt ernaar gestreefd de essentie zichtbaar te houden en deze niet te laten verdrinken in een veelheid van wiskundige bewerkingen. Daarna worden andere elementsoorten besproken. De afleiding van de elementstijfheidsmatrices zal plaatsvinden op een wijze die aansluit bij reeds aanwezige kennis. Naarmate de hoofdstukken vorderen wordt de moeilijkheidsgraad geleidelijk opgevoerd. De eenvoudige constructie met één vrijheidsgraad per knoop in hoofdstuk 1 wordt gevolgd door een vakwerkconstructie in hoofdstuk 2. Nu zijn er twee vrijheidsgraden per knoop, maar in een element treedt nog steeds alleen extensie (vervorming door normaalkracht) op. De inwendige krachtswerking ligt met één parameter vast, de constante normaalkracht. In hoofdstuk 3 wordt de lijn van opbouwende moeilijkheidsgraad even onderbroken. De lezer heeft dan voldoende begrip van de methode om de verschillende manieren te kunnen bevatten waarop een constructie kan worden ondersteund en hoe dat wordt verwerkt in een computerprogramma. In hoofdstuk 4 wordt daarna met buiging begonnen. Hier wordt de ligger besproken. Evenals in hoofdstuk 1 is er in de eenvoudigste vorm één onbekende per knoop, de rotatie boven de oplegging. Maar in de staaf moet je nu de krachtsverdeling vastleggen met twee parameters, want het moment is niet meer constant maar lineair. Nadat dit eenvoudige geval is behandeld, wordt de bespreking uitgebreid naar liggers waarin ook tussenknopen mogen optreden. Men hanteert dan twee vrijheidsgraden per knoop, een zakking en rotatie. In hoofdstuk 5 wordt de overstap naar portalen en raamwerken gemaakt. Deze zijn nog eenvoudig. Er komen alleen

staven in voor die loodrecht op elkaar staan, horizontaal en verticaal. Deze orthogonale staafconstructies worden op twee manieren uitgewerkt. Het gebeurt eerst met weglating van extensie en daarna met inbegrip van extensie. In het laatste geval wordt de bespreking al behoorlijk algemeen. De staaf verdisconteert dan extensie én buiging en gebruikt per knoop drie vrijheidsgraden. Het meest algemene geval wordt ten slotte in hoofdstuk 6 behandeld. Elke staaf mag nu een willekeurige positie in het platte vlak innemen, per knoop mag een lokaal assenstelsel voor de vrijheidsgraden worden gekozen, je kunt dwarskrachtvervorming meenemen, enzovoort.

Veronderstelde voorkennis

De auteur is zich ervan bewust dat er in de onderwijswereld twee visies zijn op de plaats van ‘computermechanica’ in het curriculum. De eerste visie is, dat de student eerst vertrouwd moet worden gemaakt met evenwicht, doorsnede-eigenschappen, zakkingslijnen en dergelijke. De student moet voor eenvoudige constructies handberekeningen kunnen uitvoeren. Nadat over deze kennis wordt beschikt en inzicht in constructiegedrag en krachtswerking is bijgebracht, is er pas plaats voor behandeling van computergeoriënteerde mechanicamethoden.

In de tweede visie wordt de student reeds in een veel vroeger stadium van de opleiding op het spoor van de formele verplaatsingsmethode gezet. Voorstanders van deze aanpak dragen de overtuiging uit dat het inzicht in het constructiegedrag op deze wijze evengoed wordt bijgebracht. De moderne student is - denkt men - in het middelbaar onderwijs voldoende vertrouwd gemaakt met lineaire algebra en pakt de eigentijdse behandeling met matrixrekening wel op. Het is niet nodig hier over deze twee standpunten een uitspraak te doen. In dit boek wordt aange-sloten bij de eerste opvatting, zonder over de tweede een oordeel uit te spreken. Wel wordt gemeend dat de tweede visie nog steeds experimenteel is en een veel groter beroep doet op de didactische bekwaamheden van de docent. Er mag niet worden aangenomen dat alle HBO-studenten vertrouwd zijn met matrixrekening. Niet allen hebben immers een VWO-vooropleiding. De auteur is ervan uitgegaan dat het boek een plaats krijgt in het tweede studiejaar van de HBO-opleidingen en van de universitaire studies. De student beheerst reeds grondig wat evenwicht is en weet wat momenten-, dwarskrachten- en normaalkrachtenlijnen zijn. Hij kan voor elementaire gevallen zakkingen en rotaties berekenen uit een bekende momentenlijn. De gebruiker van dit boek is ook vertrouwd met de begrippen statisch bepaald en onbepaald. Op al die kennis wordt een beroep gedaan om de theorie te ontvouwen of om resultaten te interpreteren. Het gebruik van matrix-rekening kan niet geheel worden vermeden, maar er wordt uiterst beperkt gebruik gemaakt van deze wiskundige voorkennis. Wat er voor nodig is, wordt op een voor praktijkmensen bevattelijke wijze in Appendix A uitgelegd.

Keuze uit de leerstof

Bij gebruik van het boek in het onderwijs kan een docent zelf beslissen tot hoever hij in de leerstof wil doordringen of welke leerpaden hij wil kiezen. Het is niet nodig het hele boek te behandelen. Wie de student alleen maar een idee wil geven hoe de methode werkt, kan voor de ééndimensionale staafconstructies, zoals masten en doorgaande liggers, volstaan met de hoofdstukken 1 en 4. Wie meer tijd tot zijn beschikking heeft, behandelt ook hoofdstuk 2 over vakwerken en wellicht hoofdstuk 3 over ondersteuning. Kan de docent nog dieper op de stof ingaan, dan gaat hij door met de orthogonale raamwerken van hoofdstuk 5 of zelfs met het meest algemene geval van hoofdstuk 6. Wie daaraan de voorkeur geeft kan hoofdstuk 5 ook overslaan en direct van de doorgaande ligger in hoofdstuk 4 doorstomen naar het meest algemene geval van hoofdstuk 6. Hoe ermee wordt omgegaan zal mede afhangen van het bevattingsvermogen van de groep studenten die het onderwijs ontvangt.

Een aantal paragrafen is voorzien van een ster (*) om aan te geven dat men deze eventueel kan overslaan. De auteur verwacht dat deze hoofdstukken niet snel zullen behoren tot de te bestuderen stof op de hogescholen. Deze ster-paragrafen geven een behandeling van de stof die aansluit bij de formulering van de eindige-elementenmethode voor platen, schalen en andere continue constructies. Dat heeft primair betekenis voor universitaire studenten. De verwachting lijkt gewettigd dat er ook verschillend zal worden omgegaan met de opdrachten. De hogeschool-studenten zijn meer gericht op toepassingen en voeren wellicht alleen de praktijkopdrachten in het boek uit. Van universitaire studenten wordt meer kennis van de grondslagen en de theorie verwacht, zodat die in ieder geval zowel de theorie- als de praktijkopdrachten zullen uitvoeren.