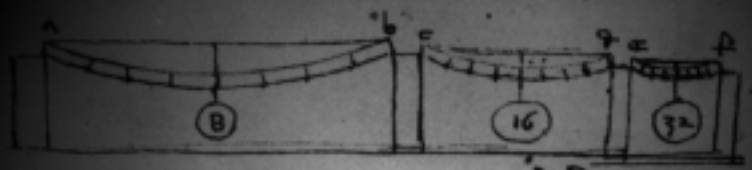


# Een rechte staaf wordt gebogen

Specimen ex filo de ferro & maglioni



I. a. b. f. p. i. g. g.  $\frac{1}{8}$  di sua lunghezza. p. p. i. s. d. s. . c. d. e. p. i. d. e. f. o. r.  
 p. s. a. r. e. e. s. t. e. c. r. e. t. o. d. i. s. t. i. n. c. t. a. f. o. r. t. i. s. s. i. m. a. a. b. c. n. o. p. i. g. i.  
 r. e.  $\frac{1}{8}$  di sua lunghezza p. m. a. g. n. i. t. u. d. i. n. e. 16 p. e. s. e. c. l. a. m. e. t. r. i.  
 l. a. l. i. n. g. u. a. d. a. b. e. s. s. i. m. i. l. i. m. e. t. r. e. c. f. p. e. s. e. r. i. l. a. m. e. t. r. e.  
 l. a. l. i. n. g. u. a. d. e. f. i. n. l. a. m. e. t. r. e. s. t. a. p. p. i. o. p. i. d. f. o. r. t. i. s. s. i. m. a.  
 l. a. l. i. n. g. u. a. d. e. f. i. n. l. a. m. e. t. r. e. p. e. s. e. r. i. l. a. m. e. t. r. e.

Godfried Kruijtzter

**EEN RECHTE STAAF  
WORDT GEBOGEN**

‘What a piece of work is man.’

*William Shakespeare*

‘What a piece of work is mechanics.’

‘De Wezer maakt, wij wezens vermaken slechts.’

Aan:

Keete, Govert, Ariane.

Illustratie omslag:

Bespiegeling van Leonardo da Vinci ontspiegeld (ontleend aan  
Truesdell (1968)).

**Godfried Kruijzer**

**EEN RECHTE STAAF WORDT GEBOGEN**

Opbouwende mechanica van constructies

Delft University Press

© Godfried Kruijtzter  
Eerste druk 2000

Uitgegeven door:  
Delft University Press  
P.O. Box 98, 2600 MG Delft, The Netherlands  
tel. +31 15 278 3254, telefax +31 15 278 1661  
e-mail [dup@library.tudelft.nl](mailto:dup@library.tudelft.nl)  
website: <http://www.library.tudelft.nl/dup>

In opdracht van:  
Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft  
Poortlandplein 6, 2628 BM Delft, The Netherlands  
tel. +31 15 2782124, telefax +31 15 2787585  
e-mail: [vssd@tudelft.nl](mailto:vssd@tudelft.nl)  
internet: <http://www.oli.tudelft.nl/vssd/hlf/handleidingen.html>

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photo-copying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

ISBN 90-407-1848-2

## VOORWOORD

In dit boekje bestaat een bouwkundige constructie uit een elastische staaf of kabel. Met behulp van eenvoudige meetkunde en rekenkunde wordt het meetkundig niet-lineair elastisch gedrag van deze lijnvormige elementen onder uitwendige belastingen onderzocht. Bij de uitwerking hiervan hebben we onze aandacht louter gericht op het eenvoudige geval van een homogeen en isotroop elastisch materiaal en tot de basisgevallen: rek/stuik, simple shear (en simple torsion) en (zuivere) buiging. Onze bedoeling is de 'kern' van de theorie van de elasticiteit bloot te leggen. Het boek kan worden gezien als een in eenvoudige wiskundige taal gestelde inleiding tot de niet-lineaire mechanica van een continuüm. Het gebruik van de Nederlandse taal voorziet in een lacune ten aanzien van dit moeilijke onderwerp.

In de praktijk van alledag worden de stijfheid, sterkte en stabiliteit van constructies berekend met behulp van rekenprogramma's. De resultaten in dit boek kunnen een handvat bieden bij de uitleg van de rekenmatig verkregen antwoorden op niet-lineaire vraagstukken.

Enige voorbeelden uit de hoorcolleges van de vroegere Delftse hoogleraren Dr Ir W.T. Koiter en Ir C.G.J. Vreedenburgh sluiten aan op de hier gevolgde werkwijze.

Dit boek is geschreven voor hogerejaars of afgestudeerden van technische hogeschool of universiteit, die zich wat nader in de theorie van de stijfheid en sterkte van elastische constructies willen verdiepen.

Ik dank Dr Ir Caspar Groot en Prof. Ir Ton Vrouwenvelder van de Technische Universiteit Delft, die bereid waren het manuscript van vriendelijk kritische kanttekeningen te voorzien.

Ik dank in het bijzonder Ir Taco van de Broek van het Staalbouwkundig Genootschap en Patrick van Dop van RS Drukkerij voor hun inzet bij de verwerking van het manuscript.

## INHOUD

Voorwoord	5
I. Inleiding	7
II. Buiging <i>Kromming, rek en rotatie</i>	23
III. Wet van Hooke <i>Rek, stuik, afschuiving en verwringing</i>	35
IV. Gebogen staaf <i>Spanning, vervorming en rotatie</i>	49
V. Gerekte kabel	69
Bijlage. Constitutie	75
Litteratuur	78
Onderwerpindex	80

## II. BUIGING

### KROMMING, REK EN ROTATIE

1. We buigen een ligger, door op de uiteinden koppels van gelijke grootte, doch tegengesteld van richting uit te oefenen (fig. 2.2), waarbij hun vlak van werking samenvalt met het vlak van buiging: het vlak door de liggeras loodrecht op een hoofdtraagheidsas van de dwarsdoorsnede om welke as de ligger wordt gebogen. Deze eindkoppels zijn met elkaar in evenwicht. We noemen deze eindkoppels buigkoppels; dit ter onderscheiding van torsiekoppels, die een staaf torderen (= wringen) en waarvan het vlak van werking loodrecht staat op de liggeras, de torsie-as. Omdat dwarskrachten ontbreken spreekt men vaak van zuivere buiging.

buigkoppels

2. We beschouwen een spanningsvrije rechte ligger met een eenvormige rechthoekige doorsnede (fig. 2.1a).

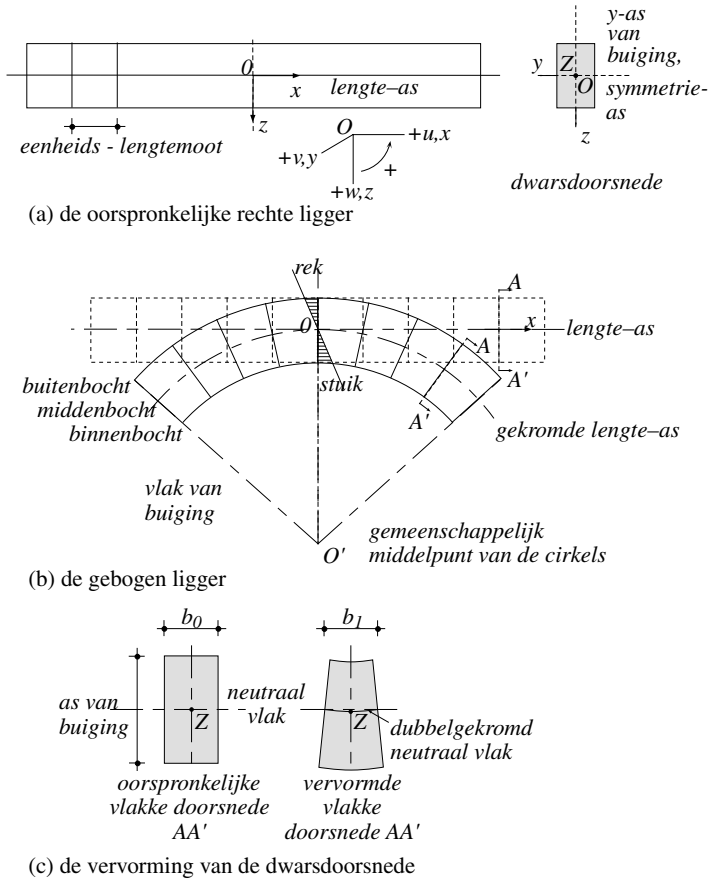
vervorming

Bij buiging wordt een ligger gebogen om de buigingsas, een hoofdtraagheidsas, in dit geval een symmetrie-as, van de doorsnede. De rechte ligger wordt bij buiging krom. Er ontstaat een buitenbocht waarin de lijnstukken evenwijdig aan de liggeras zijn gerekt, een binnenbocht waarin deze lijnstukken zijn gestuikt, en een middenbocht waarin deze lijnstukken noch gerekt noch gestuikt zijn (fig. 2.1b). Het vlak door de liggeras, loodrecht op de buigingsas noemt men het vlak van buiging. De rechte liggeras en de rechte lijnen hiermede evenwijdig in het vlak van buiging worden bogen van concentrische cirkels.

Het vlak door de liggeras en de buigingsas heet het neutrale vlak. In dit vlak worden de lijnstukken, die evenwijdig zijn aan de liggeras dus noch gerekt noch gestuikt doch alleen gekromd.

Indien een isotroop elastische staaf wordt gerekt, wordt de staaf tevens dunner; indien gestuikt dikker. Deze verschijnselen zijn

dwarscontractie



Figuur 2.1. Buiging van een rechte ligger

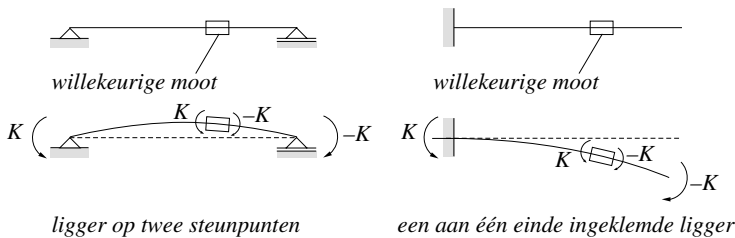
het gevolg van de dwarscontractie van het materiaal (contraheren = samentrekken). Voor de gebogen ligger betekent dit ondermeer, dat het materiaal aan de buitenbocht van de ligger in dwarsrichting is gestuikt en aan de binnenbocht in de dwarsrichting is gerekt (fig. 2.1c). Het oorspronkelijk vlakke neutrale vlak is in de gebogen ligger een dubbel gekromd oppervlak: wanneer bol in de lengterichting van de ligger, dan hol in de dwarsrichting van de ligger (een zadelvlak of anticlastic vlak).

geschiedenis

3. Het verhaal van de gebogen ligger is ontstaan uit de vertellingen van Isaac Beekman (1570–1637), Jacob Bernoulli (1655–1705), Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646–1716), Christiaan Huygens (1629–1695), Robert Hooke (1635–1703), Edmé Mariotte (1620–1684), Antoine Parent (1666–1716), Leonhard Euler (1707–1783) en Daniel Bernoulli (1700–1782) en Charles Augustin Coulomb (1736–1806)<sup>1</sup>). Het verhaal kan als volgt worden toegelicht.

eenvormig-  
heid

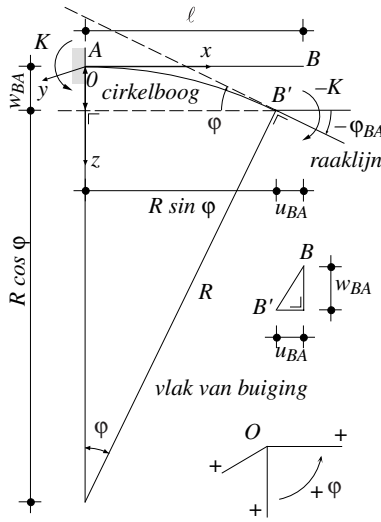
4. De ligger kan worden opgedeeld in moten. Ook de krachten op de einden van een willekeurige moot van de ligger moeten met elkaar in evenwicht zijn. Door bij elke opdeling telkens het evenwicht te beschouwen, vindt men dat de einden van de ligger en de einden van iedere moot op gelijke wijze worden belast (fig. 2.2). Dit wordt eenvormige belasting genoemd. We veronderstellen nu dat de moten dezelfde meetkundige eigenschappen en materiaaleigenschappen bezitten.



Figuur 2.2. Eenvormige belasting van een gebogen ligger

Deze veronderstelling en het gegeven dat alle moten van de ligger op eenzelfde wijze worden belast, brengen met zich mee dat moten van gelijke lengte gelijke vervormingen ondergaan, zodat de kromming van de ligger eenvormig is. Met andere woorden: de gekromde liggeras heeft de vorm van een cirkelboog (fig. 2.3).

De straal van deze boog wordt genoteerd met  $R$ . De lengte van de boog is de lengte van de rechte liggeras, omdat deze as noch wordt gerekt noch gestuikt.



Figuur 2.3. De gebogen liggeras in een cirkelboog

verplaatsing

5. Met de bovenstaande gegevens kunnen we de volgende berekeningen uitvoeren. We beschouwen een aan één einde ingeklemde ligger  $AB$  met de lengte  $\ell$  van de liggeras. Bij de inklemming (A) blijft het einde op zijn plaats en de raaklijn aan de liggeras horizontaal. Ter plaatse van het vrije einde (B) bezit de raaklijn aan de gebogen ligger de hellingshoek  $-\varphi_{BA}$ . We noemen  $\varphi_{BA}$  de hoekverdraaiing van de liggeras in B ten opzichte van de stand van liggeras  $AB$  ter plaatse van A.

De gebogen en ongebogen liggeras bezitten gelijke lengten, zodat:

$$\varphi_{BA} = \varphi = \frac{\ell}{R}, \quad \text{met } \ell = \text{lengte van de liggeras.} \quad (2.1)$$

De grootte  $w_{BA}$  van de verticale verplaatsing van het punt B van de ongebogen liggeras  $AB$  naar het punt  $B'$  (A behoudt zijn plaats) wordt gegeven door de pijl van de boog:

$$w_{BA} = R(1 - \cos \varphi_{BA}), \quad (2.2a)$$

zodat voor kleine waarden van  $\varphi$  ( $= \frac{\ell}{R}$ ), met  $\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$ ,

$$w_{BA} \approx \frac{R\varphi_{BA}^2}{2} = \frac{\ell^2}{2R}. \quad (2.2b)$$

De grootte  $u_{BA}$  van de horizontale verplaatsing van het punt B ten opzichte van het punt B' wordt gegeven door:

$$u_{BA} = \ell - R \sin \varphi_{BA}, \quad (2.3a)$$

zodat voor kleine waarden van  $\varphi$ , met  $\sin \varphi \approx \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3$ ,

$$u_{BA} \approx \ell - R(\varphi_{BA} - \frac{1}{6}\varphi_{BA}^3) = \frac{\ell^3}{6R^2} = \frac{\ell w_{BA}}{3R} = \frac{2w_{BA}^2}{3\ell}. \quad (2.3b)$$

We merken tenslotte op dat volgens (2.2a) en (2.3a) geldt

$$w_{BA}^2 + (\ell - u_{BA})^2 = 2Rw_{BA}.$$

In de praktijk geldt de eis dat  $w_{BA} \leq 0,004\ell$ , zodat  $R \geq 125\ell$  ( $\ell/R \leq 0,008$ ). De horizontale verplaatsing  $u_{BA}$  is dan vele malen kleiner dan de verticale verplaatsing  $w_{BA}$ <sup>2</sup>.

We noemen een gebogen ligger waarvoor geldt  $\ell/R \leq 0,01$  een flauw gebogen ligger. (Vergelijk de uitdrukking: ‘flauwe bocht’). De zakkingslijn in figuur 2.3 heeft dan de vorm van een parabool:

$$w(x) = \frac{x^2}{2R}, \quad \text{met } 0 \leq x \leq \ell. \quad (2.4a)$$

en

$$u(x) = -\frac{2}{3} \frac{w(x)^2}{x} = -\frac{1}{6} \frac{x^3}{R^2}, \quad \text{met } 0 \leq x \leq \ell. \quad (2.4b)$$

De gekromde liggeras wordt *de elastische lijn* genoemd. De bovenstaande eenvoudige meetkundige resultaten kunnen worden ingebed in de theorie van de inhomogene deformaties, zoals in Hoofdstuk I.12 e.v. weergegeven. We gaan hierbij als volgt te werk.

elastische lijn

6. We beschouwen een rechte staafas (kolom- of liggeras). We kiezen een coördinatensysteem  $x, z$ , met de  $x$ -as langs de rechte as en de  $z$ -as loodrecht op de  $x$ -as. De oorsprong van het assen-

rechte as  
wordt gerekent  
en gekromd

stelsel (coördinatensysteem) ligt in een plaatsvast eindpunt van de staafas.

We veronderstellen dat een punt P met de coördinaten  $(x,0)$  op de rechte as een verplaatsing  $(u,w)$  in het  $x,z$ -vlak ondergaat, met  $u$  de verplaatsingscomponent in de positieve  $x$ -richting en  $w$  de verplaatsingscomponent in de positieve  $z$ -richting. Een recht element met lengte  $dx$  wordt in het algemeen een boogelement met de lengte  $d\ell^*$ . Er geldt<sup>3)</sup>:

$$(d\ell^*)^2 = \left( \left( 1 + \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right) \cdot (dx)^2 \quad (2.5a)$$

De kromtestraal R van het boogelement wordt gegeven door:

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{\left( 1 + \frac{du}{dx} \right) \cdot \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{dw}{dx} \cdot \frac{d^2u}{dx^2}}{\left( \left( 1 + \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right)^{3/2}} \quad (2.5b)$$

zuivere buiging

7. In het geval van zuivere buiging om een hoofdtraagheidsas van de staaf loodrecht op het  $x,z$ -vlak, wordt de as noch gerekt noch gestuikt, zodat geldt:

$$(d\ell^*)^2 = (dx)^2$$

of volgens (2.5a):

$$\left( 1 + \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 = 1 \quad (2.6a)$$

In dit geval geldt voor de kromtestraal R:

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left( 1 - \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right)^{1/2}} \quad (2.6b)$$

waarbij in de uitwerking van (2.5b) gebruik gemaakt is van (2.6a) en de uitwerking hiervan:

$$\frac{du}{dx} = \left( 1 - \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right)^{1/2} - 1 \quad (2.6c)$$

De uitdrukkingen (2.6) gelden ook in het geval dat de staafas als onrekbaar of onstuikbaar wordt ondersteld.

8. Op grond van (2.5a) definiëren we de ‘kwadratische’ kwadratisch  
rek  
rek  $e_{xx}$  van het element  $dx$  van de rechte as:

$$e_{xx} = \frac{1}{2} \frac{\left( d\ell^* \right)^2 - (dx)^2}{(dx)^2} = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (2.7a)$$

(vergelijk de formule 1.20a).

De specifieke verlenging (rek) van het element  $dx$  wordt rek  
gegeven door:

$$\varepsilon_{(x)} = \frac{d\ell^* - dx}{dx} \quad (2.7b)$$

zodat volgens (2.5a):

$$\varepsilon_{(x)} = \left( \left( 1 + \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right)^{1/2} - 1 \quad (2.7c)$$

of volgens (2.7a) en (1.16b):

$$\varepsilon_{(x)} = (1 + 2e_{xx})^{1/2} - 1 \quad \text{of} \quad \varepsilon_{(x)} + \frac{\varepsilon_{(x)}^2}{2} = e_{xx} \quad (2.7d)$$

9. In de lineaire theorie zijn de verplaatsingsgradiënten lineaire theorie  
kleine verplaat-  
singsgradiënten  
klein, dat wil zeggen:

$$\left| \frac{du}{dx} \right| \ll 1 \quad \text{en} \quad \left| \frac{dw}{dx} \right| \ll 1 \quad (2.8a)$$

We schrijven (2.7c) uit:

$$\varepsilon_{(x)} = \left( 1 + 2 \frac{du}{dx} + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right)^{1/2} - 1 \quad (2.8b)$$

Nu geldt:

$$(1 + \alpha)^{1/2} \approx 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{8} + \frac{\alpha^3}{16} \dots, -1 < \alpha < 1. \quad (2.8c)$$

Toepassing van (2.8a) en (2.8c) op (2.8b) geeft:

$$\varepsilon_{(x)} \approx \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (2.8d)$$

waarbij alle derde graads - hogere graadstermen in  $(du/dx)$  en  $(dw/dx)$  zijn veronachtzaamd. In deze benaderende uitdrukking voor  $\varepsilon_{(x)}$  komt de kwadratische term  $(du/dx)^2$  dus niet voor.

In het geval van zuivere buiging en in het geval van onuit-trekbaarheid of onsamendrukbaarheid van de staafas geldt de voorwaarde (2.6a):

$$e_{xx} = \varepsilon_{(x)} = 0$$

en in de lineaire benadering (2.8d):

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \approx 0 \quad (2.8e)$$

Deze laatste formule is in overeenstemming met de formule (2.6c) mits  $|dw/dx| \ll 1$ .

Zowel in het geval (2.8d) als in het geval (2.8e) geldt voor de gelineariseerde kromming:

$$\frac{1}{R} \approx \pm \frac{d^2w}{dx^2} \quad (2.8f)$$

10. In de theorie van de op buiging en stuijk belaste staven, waarbij het verschijnsel knik kan optreden, wordt de stuijk wezenlijk bepaald door  $e_{xx}$  volgens (2.7a).

$$e_{xx} = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (2.9a)$$

Indien bij het verschijnsel knik de staaf als onstuikbaar wordt beschouwd, dan

$$e_{xx} = 0$$

of

$$\frac{du}{dx} = \left( 1 - \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right)^{1/2} - 1 \quad (2.9b)$$

11. In de klassieke lineaire theorie van op buiging en op rek of stuijk zonder knikgevaar belaste staven wordt het volgende gesteld<sup>4)</sup>.

Er wordt verondersteld dat de staaf flauw gebogen wordt:

$$\frac{\ell}{R} \ll 1 \quad (2.10a)$$

met  $\ell$  de staaf lengte en  $R$  de kromtestraal. In de praktijk is (2.10a) gelijkwaardig met:

$$\frac{w}{\ell} \ll 1 \quad (2.10b)$$

met  $w$  de staafuitwijking (doorbuiging), zodat:

$$\frac{1}{R} \approx \pm \frac{d^2w}{dx^2} \quad (2.10c)$$

In deze lineaire benadering bepalen we de doorbuiging  $w$  van de buiging en trek op druk belaste staaf zonder rekening te houden met  $u$ , d.w.z.,  $u = 0$ . Verder, we berekenen de lengte  $\ell^*$  van de gekromde liggeras volgens (2.5a) met  $u = 0$  en de benadering

(2.8c):

$$\ell^* = \int_0^{\ell} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right\} dx \quad (2.10d)$$

oplossing

12. We merken op dat de oplossing (zie figuur 2.3):

$$w = R (1 - \cos \varphi) \quad \text{en} \quad u = x - R \sin \varphi$$

$$\varphi = x/R, \quad R = \text{constant}$$

(vergelijk (2.2a) en (2.3a))

voldoet aan de vergelijkingen (2.6a) en (2.6b).

Verder, dat de benaderende oplossing

$$w = \frac{x^2}{2R} \quad \text{en} \quad u = -\frac{1}{6} \frac{x^3}{R^2}$$

(vergelijk (2.4a) en (2.4b)), voldoet aan (2.8e) en (2.8f).

foute

benadering

13. In vele boeken veronachtzaamt men de horizontale verplaatsing van de punten van de staafas,  $u = 0$ , en men onderstelt dan dat de punten van de rechte liggeras alleen een verticale verplaatsing  $w$  ondergaan. Men schrijft dan voor de niet-lineaire kromming<sup>5)</sup>:

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 w}{dx^2}}{\left( 1 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right)^{3/2}} \quad (\text{vergelijk 2.5b met } u = 0).$$

Deze formule is gewoon fout indien de staafas niet van lengte verandert (vergelijk (2.6b)).

14. Onderscheiden worden vier situaties:

praktijk

1. Kleine rekken, kleine rotaties
2. Kleine rekken, grote rotaties
3. Grote rekken, kleine rotaties
4. Grote rekken, grote rotaties

De situaties 3 en 4 doen zich voor bij rubbers en bij grote plastische vervormingen. We beschouwen nu weer de staafas. Voor de kwadratische tek  $e_{xx}$  geldt volgens (2.7a):

$$e_{xx} = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2$$

Voor de specifieke verlenging  $\epsilon_{(x)}$  geldt volgens (2.7d):

$$e_{xx} = \epsilon_{(x)} + \frac{1}{2} \epsilon_{(x)}^2$$

Indien nu de specifieke verlenging  $\epsilon_{(x)}$  klein is, dan geldt in de lineaire benadering:

$$e_{xx} = \epsilon_{(x)} \quad (2.11a)$$

Echter in dit geval behoeven de rotaties niet klein te zijn. Dus in de lineaire rekbenadering geldt:

$$e_{xx} = \epsilon_{(x)} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (2.11b)$$

Indien de verplaatsingsgradiënten klein zijn, dan zijn niet alleen de rekken doch ook de rotaties klein. Om nu inzicht te krijgen van het geval van kleine verplaatsingsgradiënten gebruiken we de benadering (2.8d):

$$\epsilon_{(x)} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (2.8d)(bis)$$

Deze benadering is alleen van belang voor de relatie tussen  $u$  en  $w$  in het geval van kleine verplaatsingsgradiënten.

In dit boekje beschouwen alleen die situaties waarin het verband tussen de spanningen en de rekken lineair is (zie pag. 41), doch de verplaatsingsgradiënten niet klein zijn.

boekje

15. Indien een onrekbaar en buigslap touw met lengte  $\ell$  wordt gehangen tussen twee even hoge ophangpunten op een afstand  $\ell_0 < \ell$ , dan wordt de vorm van het touw bepaald door

$$\frac{q}{H} = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right)^{1/2}} \quad \text{met } w \text{ de zakking, } q \text{ het eigen-}$$

gewicht per eenheid van lengte van het touw en H de horizontale component van de spankracht in het touw.

(2.12)

In deze formule stelt het rechterlid niet de kromming voor. We zullen nog zien dat:

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left(1 - \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right)^{1/2}} = \frac{M}{EI} \quad \text{waarin M het buigend mo-}$$

ment op de ligger doorsnede is, en EI een hoofdbuigstijfheid van de ligger is.

Voor kleine  $dw/dx$  worden de noemers in deze formules gelijk 1 en is er een zekere gelijkenis tussen de formules. Er is evenwel noch in wiskundig noch in fysisch opzicht sprake van een overeenkomst tussen de formules.

## NOTEN

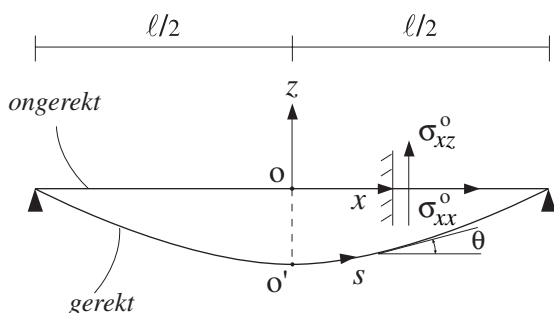
- 1) Truesdell, pag. 103 e.v.  
Love, pag. 2 e.v.
- 2) Technische Grondslagen voor bouwconstructies, 1991, NEN 6702, artikel 10.4.1.
- 3) Koiter (5), pag. 133 e.v.
- 4) Timoshenko en Woinowsky-Krieger, pag. 8;  
Landau en Lifchitz, pag. 119; Love, page. 395.
- 5) Gere en Timoshenko, pag. 355;  
Koiter (3), pag 142.

## V. GEREKTE KABEL

### SPANNINGEN, VERVORMINGEN EN ROTATIE

1. Een horizontale elastisch rekbare, doch geheel buigzame kabel bezit in ongerekte toestand de lengte  $\ell$ . De kabel wordt opgehangen tussen twee even hoge steunpunten op de afstand  $\ell$ . We beschouwen de zakking van de rekbare kabel onder invloed van zijn eigengewicht. We onderstellen dat het kabelmateriaal isotroop elastisch is.

probleem



Figuur 5.1. Een ongerekte kabel wordt gerekt onder invloed van zijn eigengewicht.

In de figuur 5.1 tekenen we in de onvervormde configuratie de van nul verschillende componenten van de niet-symmetrische Piola-Kirchhoff spanning, de ingenieursspanning  $\bar{\bar{\sigma}}^0$ :  $\sigma_{xx}^0 = \sigma_x^0$  en  $\sigma_{xz}^0 = \tau_{xz}^0$ .

De evenwichtsvergelijkingen zijn:

evenwicht

$$\frac{\partial \sigma_x^0}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}^0}{\partial z} = 0$$

$$, \tau_{xz}^0 \neq \tau_{zx}^0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}^0}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z^0}{\partial z} = \frac{f_0}{A_0}$$

waarin  $f_0$  is het eigengewicht per eenheid van lengte van de ongerekte kabel met dwarsdoorsnede-oppervlakte  $A_0$ .

We schrijven  $f_0 = A_0 \rho_0 g$  met  $\rho_0$  is de massadichtheid van de ongerekte kabel en  $g$  is de grootte van de gravitatieversnelling ( $g = \text{constant}$ ). Met <sup>1)</sup>

$$\sigma_z^0 = \tau_{zx}^0 = 0, \quad (5.2a)$$

geeft integratie van de vergelijkingen (5.1):

$$\sigma_x^0 = \sigma_0 = \text{constant}, \quad \tau_{xz}^0 = \rho_0 g x. \quad (5.2.b)$$

Het verband tussen de Lure spanning (de zuivere vervormingen-ingenieursspanning)  $\bar{\bar{\sigma}}^*$  en de niet symmetrische Piola-Kirchhoff spanning (de ingenieursspanning)  $\bar{\bar{\sigma}}^0$  wordt gegeven door (zie formules 3.2):

$$\bar{\bar{\sigma}}^* = \bar{\bar{\sigma}}^0 \cdot \bar{\bar{R}}, \quad (5.3a)$$

zodat

$$\bar{\bar{\sigma}}^* \cdot \bar{\bar{\sigma}}^{*\text{T}} = \bar{\bar{\sigma}}^0 \cdot \bar{\bar{\sigma}}^{0\text{T}}, \quad (5.3b)$$

daar voor de rotatietensor  $\bar{\bar{R}}$  geldt:  $\bar{\bar{R}}^{\text{T}} \cdot \bar{\bar{R}} = \bar{\bar{I}}$ . Voor isotrope materialen geldt  $\bar{\bar{\sigma}}^* = \bar{\bar{\sigma}}^{*\text{T}}$ . Uitwerking van (5.3.b) geeft dat Lure spanning  $\bar{\bar{\sigma}}^*$  slechts één van nul verschillende component bezit, met name,  $\sigma_x^*$ :

Lure  
hoofdspanning

$$\sigma_x^* = \sigma_0 \cdot \left\{ 1 + \left( \frac{\rho_0 g x}{\sigma_0} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (5.4)$$

Met voor de starre rotatie  $\bar{\bar{R}}$ :

rotatie

$$\bar{\bar{R}} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}, \quad (5.5)$$

volgt uit (5.2), (5.3.a) en (5.4):

$$\tan \theta = \frac{\rho_0 g x}{\sigma_0}, \quad (5.6)$$

met  $\theta$  is de hoek tussen de raaklijn aan de gerekte kabel en de horizontale  $x$ -as (zie figuur 5.1).

Het verband tussen de lineaire rek  $\epsilon_x$ , in dit geval tevens de specifieke verlenging  $\epsilon_{(x)}$ , en de Lure spanning  $\sigma_x^*$  wordt volgens de Wet van Hooke gegeven door:

Wet van Hooke

$$\epsilon_x = \epsilon_{(x)} = U_{xx} - 1 = \frac{\sigma_x^*}{E}. \quad (5.7)$$

Een doorsnede van de ongerekte kabel ondergaat zowel een horizontale verplaatsing  $u$  en een verticale verplaatsing  $w$ . Uitwerking van de relatie (1.8), te weten,

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{U}},$$

en gebruikmaking van de formule (1.19) geven:

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} U_{xx} & 0 \\ 0 & U_{xx} \end{vmatrix}. \quad (5.8b)$$

Langs de kabelas geldt volgens (5.8.b):

$$1 + \frac{du}{dx} = \cos \theta \cdot U_{xx}, \quad (5.9a)$$

$$\frac{dw}{dx} = \sin \theta \cdot U_{xx}. \quad (5.9b)$$

We beschouwen nu de horizontale verplaatsingen van de kabeldoorsneden waarvoor de randvoorwaarden zijn:

$$u(x=0) = 0 \quad \text{en} \quad u(x=l/2) = 0. \quad (5.10)$$

Uit (5.7) en (5.9.a) volgt:

$$1 + \frac{du}{dx} = \cos \theta \left( \frac{\sigma_x^*}{E} + 1 \right) \quad (5.11a)$$

Maken we nu gebruik van de uitdrukkingen (5.4) en (5.6) dan is voor (5.11a) te schrijven:

$$\frac{du}{dx} = \left\{ \frac{\sigma_0}{E} + \frac{1}{\left\{ 1 + \left( \frac{\rho_0 g x}{\sigma_0} \right)^2 \right\}^{1/2}} \right\} - 1 \quad (5.11b)$$

Integratie van deze vergelijking naar  $x$  onder gebruikmaking van de randvoorwaarden (5.10) geeft:

$$0 = \int_0^{\ell/2} \frac{du}{dx} dx = \int_0^{\ell/2} \left\{ \frac{\sigma_0}{E} + \frac{1}{\left\{ 1 + \left( \frac{\rho_0 g x}{\sigma_0} \right)^2 \right\}^{1/2}} - 1 \right\} dx \quad (5.12a)$$

Het rechterlid van deze uitdrukking (5.12a) kan gevonden worden bij Koiter<sup>2)</sup>. Koiter verkrijgt deze uitdrukking langs een andere weg: door toepassing van het beginsel van het minimum der complementaire elastische energie. Uitwerking van (5.12a) geeft:

$$\frac{\sigma_0}{E} + \frac{2\sigma_0}{\rho_0 g \ell} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{\rho_0 g \ell}{2\sigma_0} \right) - 1 = 0 \quad (5.12b)$$

(Indien  $y = \sinh(x)$  ( $y$  is sinushyperbolicus  $x$ ) dan is  $x = \operatorname{arcsinh}(y)$  ( $x$  is boog(arc)sinushyperbolicus  $y$ )).

Koiter leidt af dat voor kleine waarden van  $\rho_0 g \ell / \sigma_0$ , dat wil zeggen  $(\rho_0 g \ell / \sigma_0) \ll 1$ , de uitdrukking (5.12b) wordt tot:

$$\sigma_0^3 \approx 1/24 \cdot (\rho_0 g \ell)^2 E. \quad (5.12c)$$

We gaan nu de lengte  $\ell^*$  van de gerekte kabel en de zakking  $w(x=0)$  van het kabelmidden berekenen.

Met volgens (5.9) en figuur 5.1:

$$\frac{ds}{dx} = \left\{ \left( 1 + \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right\}^{1/2} = U_{xx}, \quad (5.13a)$$

lengte van de  
gerekte kabel

vinden we voor de lengte  $\ell^*$  van de gerekte kabel:

$$\ell^* = 2 \int_0^{\ell/2} \frac{ds}{dx} dx = 2 \int_0^{\ell/2} \left\{ \frac{\sigma_0}{E} \left\{ 1 + \left( \frac{\rho_0 g x}{\sigma_0} \right)^2 \right\}^{1/2} + 1 \right\} dx, \quad (5.13b)$$

waarbij we (5.4) en (5.7) hebben gebruikt. Uitvoering van de integratie geeft:

$$\ell^* - \ell = \frac{\sigma_0}{E} \left\{ \frac{\ell}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{\rho_0 g \ell}{2\sigma_0} \right)^2 \right\}^{1/2} + \frac{\sigma_0}{\rho_0 g} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{\rho_0 g \ell}{2\sigma_0} \right) \right\} \quad (5.13c)$$

Uit de uitdrukkingen (5.4), (5.6), (5.7) en (5.9b) volgt voor de verticale verplaatsing van de kabel:

zakking van het  
kabelmidden

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\rho_0 g x}{E} + \frac{\rho_0 g x}{\sigma_0} \left\{ 1 + \left( \frac{\rho_0 g x}{\sigma_0} \right)^2 \right\}^{-1/2}, \quad (5.14a)$$

zodat na integratie met  $x$  tussen 0 en  $\ell/2$  met  $w(\ell/2) = 0$ :

$$w(x=0) = - \left( \left\{ \frac{\rho_0 g \ell^2}{8E} + \frac{\sigma_0}{\rho_0 g} \left\{ \left\{ 1 + \left( \frac{\rho_0 g \ell}{2\sigma_0} \right)^2 \right\}^{1/2} - 1 \right\} \right\} \right). \quad (5.14b)$$

Het hierboven geschetste probleem van de kabel behoort tot de eenvoudigste problemen uit de niet-lineaire elasticiteit. Het begrip 'niet lineair' moet hier aldus worden verstaan: het verband tussen de Lure spanning  $\bar{\sigma}^*$  en de lineaire rek  $\bar{\epsilon}$  wordt gegeven door de lineaire Wet van Hooke (in de hoofdrichtingen gedraagt het materiaal zich als een lineaire veer, wanneer de dwarscontractie wordt veronachtzaamd), doch er is een niet lineaire geometrie ten gevolge van de vervorming en de starre rotatie.

De oplossing van het geschetste kabelprobleem is van belang omdat de elementen ervan terugkomen in de theorie van 'strak gespannen' kabel<sup>3)</sup> en voor de vergelijking met de theorie van de onrekbare kabel met lengte  $\ell^* > \ell$ <sup>4)</sup>. Het belang is evenwel ook andersoortig.

toepassing

De gegeven oplossing geeft aan dat de kabeldoorsneden ingevolge de kabelrek horizontale en verticale verplaatsingen, dus ook longitudinale en transversale verplaatsingen ondergaan. Bij een trilling van de kabel ontstaan er longitudinale en transversale golven in de kabel, welke golven gekoppeld zijn. De statica van de rekbare kabel waarschuwt reeds voor dit verschijnsel.

## NOTEN

- 1) Koiter (1).
- 2) Koiter (1).
- 3) Koiter (3), pag 128.
- 4) Verruyt (1), pag. 104. Voor de onrekbare kabel met lengte  $\ell^* > \ell$  geldt voor de verticale zakking:

$-\frac{d}{dx} (\sigma_h A_o \frac{dw}{dx}) = \rho_o g A_o \frac{ds}{dx}$ ,  $\sigma_h = \text{constant}$  met  $\sigma_h A_o$  de *horizontale* component van de kabeltrekkracht (zie 2.12).

$$w = w(x) = -\frac{\sigma_h}{\rho_o g} \left\{ \cosh \left( \frac{\rho_o g \ell}{2\sigma_h} \right) - \cosh \left( \frac{\rho_o g x}{\sigma_h} \right) \right\};$$

$$\frac{dw}{dx} = + \frac{\rho_o g}{\sigma_h} s; \quad \sinh \left( \frac{\rho_o g \ell}{2\sigma_h} \right) = \frac{\rho_o g \ell^*}{2\sigma_h};$$

met  $\ell^* = 2$  m en  $\ell = 1$  m:  $w(x=0) \approx -0,775$  m.