

4. Stabiliteit

4.1. Inleiding

In de voorgaande hoofdstukken is het evenwicht van statistische systemen besproken. Als voldaan is aan de daarvoor gestelde voorwaarden is een systeem in evenwicht. Uiteraard is het van belang te weten of het evenwicht stabiel is. Dit hoofdstuk behandelt de stabiliteit van statische systemen

De hier beschouwde mechanische systemen zijn opgebouwd uit starre componenten en veren die onderling draaibaar of verschuifbaar zijn. In het algemene geval heeft elk onderdeel van zo'n mechanisch systeem zes vrijheidsgraden; drie translaterichtingen en drie rotatierichtingen. Dan moet de stabiliteit in zes richtingen onderzocht worden, waarbij er rekening moet worden gehouden dat de stabiliteit in de verschillende richtingen niet onafhankelijk is. Aldus kan een complex probleem ontstaan. In dit hoofdstuk zal vooral de stabiliteit van systemen met één vrijheidsgraad (rotatie of translatie) worden onderzocht.

Stabiliteit is een uitgebreid fenomeen. Ook systemen die uitsluitend elastische vervormingen ondergaan, kunnen een instabiel gedrag vertonen. Een voorbeeld is het uitknikken van axiaal belaste staven of het uitknikken van op druk belaste schroefveren. Voor de theorie van dit soort elastische instabiliteiten wordt verwezen naar de mechanicaboeken.

Stabiliteit is een systeemeigenschap. Als een systeem is gegeven ligt het stabiele of instabiele gedrag vast. Alleen door systeemparameters te veranderen of door componenten toe te voegen is het gedrag van een systeem te beïnvloeden. Op deze wijze kunnen systemen gestabiliseerd worden. Zie daarvoor § 4.5. Ook kan aan systemen een indifferent gedrag worden gegeven, met de daarbij behorende energetische voordelen. Dat is besproken in § 4.6. In de werktuigbouwkunde verkrijgen de indifferente systemen onvoldoende aandacht.

Op enkele plaatsen in dit hoofdstuk is de invloed van droge wrijving besproken. De grondbeginselen van droge wrijving zijn verduidelijkt in een afzonderlijk hoofdstuk.

4.2. Theorie

4.2.1. Begrippen

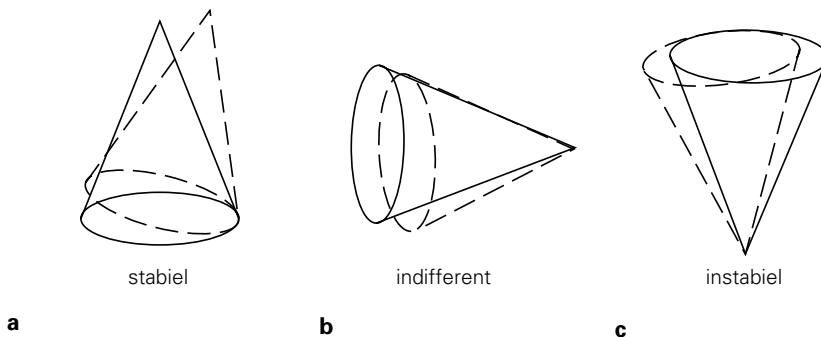
Voor de bestudering van de stabiliteit van een systeem wordt er steeds van uitgegaan dat het systeem in een toestand van evenwicht verkeert. Dit is een belangrijk uitgangspunt. Vanuit een evenwichtstoestand wordt aan het systeem een (kleine) verplaatsing toegevoerd. Het systeem wordt daarna losgelaten en aan zichzelf overgelaten. Het systeemgedrag in de tijd na het loslaten is maatgevend voor de stabiliteit van het

systeem.

Het gedrag van een systeem, na het loslaten vanuit een nabij een evenwichtstoestand gelegen positie, kan in drie categorieën worden verdeeld.

- Het systeem keert (eventueel na één of meerdere grote afwijkingen) terug in de evenwichtspositie of in een positie die daar vlak bij ligt. De terugkeer in de evenwichtspositie mag eventueel lang duren; het gaat slechts om de uiteindelijke rustsituatie. Deze systemen heten asymptotisch stabiel.
- Het systeem keert niet terug naar de oorspronkelijke evenwichtstoestand. De uitwijkingen worden steeds groter. Deze systemen zijn instabiel. De bijbehorende evenwichtstoestand wordt een labiel evenwicht genoemd.
- Het systeem keert niet terug naar de evenwichtspositie, maar behoudt de gegeven uitwijking. Deze systemen worden indifferent genoemd. De indifferente systemen zijn op te vatten als systemen die zich bevinden in het grensgebied tussen de instabiele en de stabiele systemen in.

De drie categorieën kunnen duidelijk worden gedemonstreerd aan de evenwichten van een kegel. Zie figuur 4.1.



Figuur 4.1. Met een kegel kunnen de verschillende vormen van stabiliteit worden uitgebeeld. Vanuit de gestippeld aangegeven uitwijking keert de kegel wel (a) of niet (b) terug naar het evenwicht van de uitgangspositie. In situatie b is de kegel een indifferent systeem. Elke nieuwe positie blijft behouden.

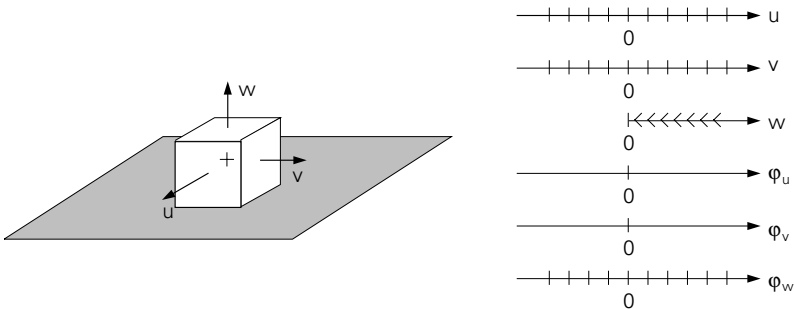
Een lichaam in de ruimte heeft in het algemene geval zes vrijheidsgraden. Translaties zijn mogelijk in drie onderling onafhankelijke richtingen en rotaties zijn mogelijk om drie onafhankelijke draaiingsassen. In het volgende zullen de optredende bewegingen worden aangegeven in een rechthoekig coördinatenstelsel. De translaties langs de coördinaatassen zullen worden aangegeven met u , v en w ; de rotaties om deze assen met respectievelijk φ_u , φ_v en φ_w .

4.2.2. Stabiliteitsbalken

Voor het aangeven van de stabiliteitssituatie bij verschillende uitwijkingen zijn stabiliteitsbalken in gebruik. Zij zullen in het volgende aan de hand van voorbeelden worden toegelicht.

Voorbeeld 4.1. In figuur 4.2 is een kubus getekend die vrij kan schuiven over een horizontaal vlak. De kubus blijft staan in elke verschoven positie waarin hij is achtergelaten. Voor verplaatsingen in de u - en v -richting is het evenwicht indifferent. Dat is op de stabiliteitsbalken van de verplaatsingen u en v door dwarsstrepen aangegeven. Ook voor rotaties om de w -as vertoont de kubus een indifferent gedrag; zie de φ_w -stabiliteitsbalk. Verticale verplaatsingen zijn alleen in positieve w -richting mogelijk. Voor verplaatsingen $+w$ is een verticale kracht nodig. Bij het loslaten vanuit een $+w$ positie zorgt de zwaartekracht voor een terugbrengen van de kubus naar het vlak. Dit is door de pijlen op de stabiliteitsbalk aangegeven.

De stabiliteitsbalken voor verdraaiingen φ_u en φ_v rondom respectievelijk de u -as en de v -as zijn nog niet benoemd. Deze stabiliteit is beschouwd in § 4.2.3.

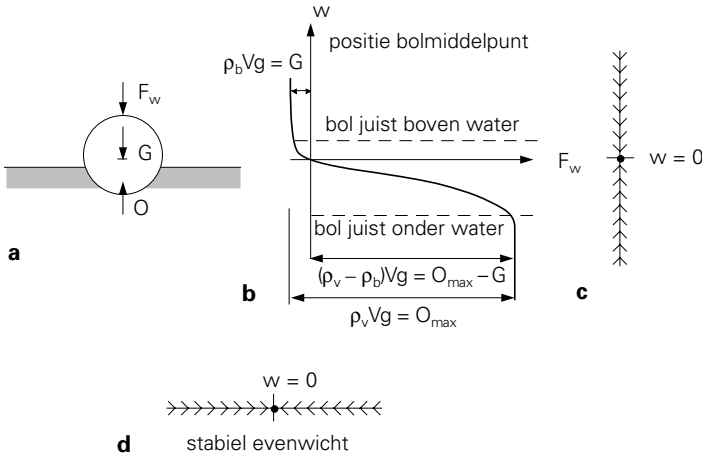


Figuur 4.2. Voor elk lichaam zijn in principe 6 stabiliteitsbalken benodigd. Een kubus die vrij kan schuiven over een plat vlak heeft indifferente evenwichten in de u , v en φ_w bewegingsrichtingen. Voor verticale verplaatsingen w is een halve stabiliteitsbalk getekend omdat deze alleen in positieve richting mogelijk zijn.

Voorbeeld 4.2. Een bol drijft in een vloeistof. Zie figuur 4.3.a. Op de bol werken twee krachten: de zwaartekracht G en de opwaartse kracht O . Voor verplaatsingen in de horizontale u - en v -richtingen, alsmede voor rotaties om de drie asrichtingen is het systeem indifferent. Voor verplaatsingen in de verticale w -richting is de bol in stabiel evenwicht. Bij een verplaatsing van de bol in de positieve w -richting (naar boven) neemt de opwaartse kracht $O(w)$ af. De omlaag gerichte zwaartekracht blijft gelijk. Zwaartekracht en vloeistof oefenen samen op de bol een omlaaggerichte kracht: $G - O(w)$ uit. Voor een verplaatsing w is dus een positieve (opwaartse gerichte) kracht $F_w = G - O(w)$ benodigd. Als bij het bereiken van $+w$ de bol wordt losgelaten resteert de omlaaggerichte kracht. Tengevolge van deze kracht beweegt de bol terug naar de uitgangspositie. Een soortgelijke redenering geldt voor verplaatsing in negatieve richting. Bij loslaten vanuit een $-w$ positie resteert een kracht die de opgedrongen uitwijkingen teniet doet.

Ter illustratie geeft figuur 4.3.b nog het verloop van de uitwendig op de bol uit te oefenen krachten F_w voor het verkrijgen van verplaatsing w . In de evenwichtsstand $w = 0$ is $F_w = 0$. Om de bol geheel uit het water te tillen is een opwaartse kracht $F_w = G = \rho_b g V$ nodig ($\rho_b =$ soortelijke massa bol, $g =$ versnelling zwaartekracht). Om de bol

geheel onder te dompelen is een neerwaartse gerichte kracht ter grootte $F_w = (\rho_v - \rho_b)gV$ benodigd. Figuur 4.3.c geeft de stabiliteitsbalk. Bij alle (positieve en negatieve) uitwijkingen w wordt op de bol een uitwijkingsverkleinende kracht uitgeoefend.



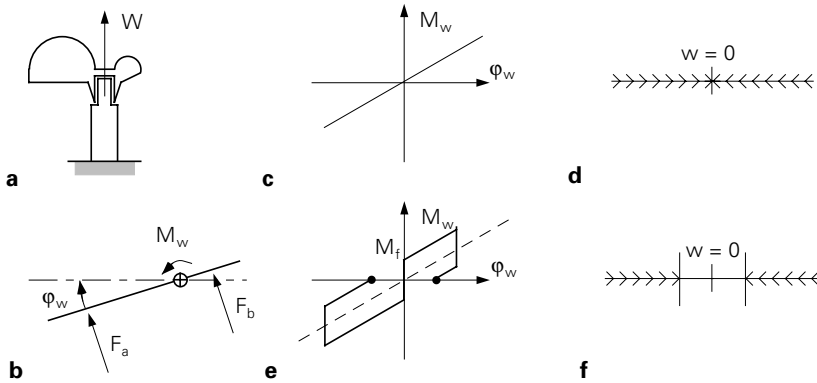
Figuur 4.3. De stabiliteit van een drijvende bol. Voor translaties in het horizontale vlak en voor rotaties om de drie coördinaatassen is de bol indifferent. De voor verticale verplaatsingen benodigde kracht is gegeven in b. Bij elke uitwijking ontstaat een evenwicht herstellende kracht. Het systeem is stabiel rond $w = 0$. Dat blijkt ook uit de in c getekende stabiliteitsbalk. In d is dezelfde stabiliteitsbalk op de gebruikelijke wijze getekend.

De bolvorm veroorzaakt de indifferente stabiliteit in vijf vrijheidsgraden. Voor vaartuigen is een indifferent gedrag gewenst voor de twee horizontale translaties en een rotatie om de verticale as; echter niet voor de verticale translaties en de rotaties om de langsas en dwarsas. In § 4.3.4 zal de invloed van de vormkeuze op de vaartuigstabiliteit worden verduidelijkt.

Voorbeeld 4.3. In figuur 4.4.a is een windvaan getekend. Er is slechts één vrijheidsgraad: de rotatie φ_w om een verticale as. Als de draaiingsas verticaal staat, heeft de zwaartekracht geen invloed op de rotatiehoek van de windvaan.

Zolang het niet waait blijft de vaan staan in de stand waarin hij is geplaatst. Als het waait ontstaan er contactkrachten die de vaan in de windrichting plaatst. Voor een uit de wind plaatsen over een hoek φ_w is een moment M_w nodig dat het verschilmoment veroorzaakt door de krachten F_a en F_v tegenwerkt. Als de vaan daarna wordt losgelaten doet dit verschilmoment de vaan terugdraaien naar de windrichting. Het systeem is stabiel. Zie de stabiliteitsbalk van figuur 4.4.d. De aanwezigheid van wrijving veroorzaakt afwijkingen van het besproken gedrag. Als er weinig wrijving is, bereikt de vaan niet precies de windrichting. Op het moment dat het verschilmoment M_w gelijk is aan het wrijvingsmoment, verdraait de vaan niet verder. Zie de stabiliteits-

balk van figuur 4.4.f. Bij zeer grote wrijvingsmomenten is het mogelijk dat de windkrachten de vaan niet meer kunnen laten draaien. Het systeem is dan indifferent geworden.



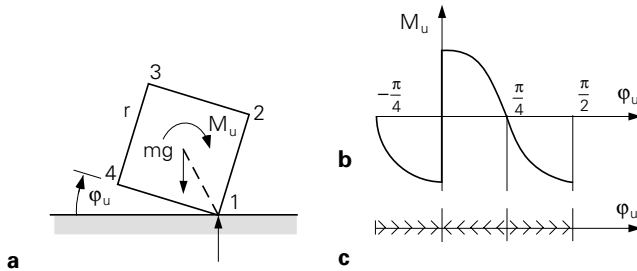
Figuur 4.4. De windvaan (a) heeft alleen een rotatiemogelijkheid om de w -as. Voor het uit de wind brengen van de vaan is een moment M_w nodig (b). Bij de afwezigheid van een wrijvingsmoment is het evenwicht stabiel (c). Zie ook de stabiliteitsbalk (d). Als een wrijvingsmoment aanwezig is wijzigt de M_w - ϕ_w -grafiek (e). Voordat de vaan beweegt vanuit de middenstand is tenminste een moment M_f nodig. Als daarna het moment tot nul afneemt, is nog een uitwijking ϕ_w aanwezig. De streeplijn presenteert de M_w - ϕ_w -karakteristiek zonder wrijving.

4.2.3. Stabiliteitsgebied

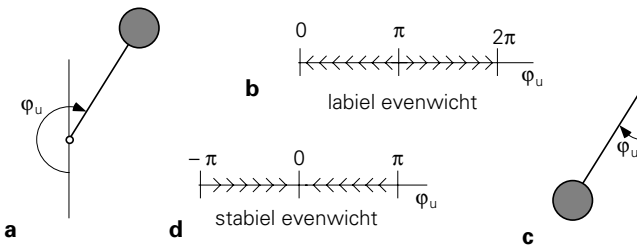
In het voorgaande is besproken wanneer een systeem stabiel kan worden genoemd. Veelal is stabiliteit slechts aanwezig in een beperkt gebied. Het is zinvol de grootte van het stabiliteitsgebied op te geven. Ter toelichting is hier de rotatie-stabiliteit van de kubus uit Voorbeeld 4.1 nader uitgewerkt.

In figuur 4.5.a is de kubus over een hoek ϕ_u gedraaid vanuit een evenwichtsituatie. Voor het bereiken van deze rotatiehoek ϕ_u is benodigd een moment $M_u = \frac{1}{2} mgr / \sqrt{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{4} - \phi_u)$. Voor kleine hoeken is M_u positief. Bij het loslaten vanuit een hoek ϕ_u keert de kubus terug in zijn uitgangspositie. Voor grotere hoeken is dit niet meer waar. Bij het loslaten vanuit hoeken $\phi_u = \frac{\pi}{4}$ is geen moment meer beschikbaar om de kubus terug te draaien; en bij $\phi_u > \frac{\pi}{4}$ kantelt de kubus naar een andere zijvlak. Figuur 4.5.b geeft de grootte van het benodigde moment als functie van ϕ_u . Figuur 4.5.c toont de stabiliteitsbalk. Daarin is het stabiliteitsgebied aangegeven.

In figuur 4.6 is nogmaals benadrukt dat de begrippen stabiel en labiel zijn gekoppeld aan een evenwichtsituatie. In figuur 4.6.a is een omgekeerde slinger getekend. Voor $\phi_u = \pi$ is er een evenwicht. Een analyse toont aan dat het een labiel evenwicht is. De omgekeerde slinger is instabiel; dat blijkt ook uit de stabiliteitsbalk van figuur 4.6.b. In figuur 4.6.c is een gewone slinger getekend. Er is evenwicht bij $\phi_u = 0$ als de slinger naar beneden hangt. Bij analyse blijkt dit evenwicht stabiel. Zie ook de stabiliteitsbalk van figuur 4.6.d. De twee stabiliteitsbalken bevatten beide het gebied $0 < \phi_u < \pi$. De



Figuur 4.5. De stabiliteit van een kubus die om een ribbe roteert. Voor rotatie is een moment M_u nodig (a). De M_u - φ_u -grafiek laat zien dat het evenwicht bij $\varphi_u = 0$ stabiel is. De stabiliteitsbalk (c) toont dat het stabiliteitsgebied is $-\frac{\pi}{4} < \varphi_u < \frac{\pi}{4}$. Zie ook figuur 4.9.



Figuur 4.6. De begrippen stabiel en instabiel zijn gekoppeld aan een evenwichtsituatie. Bij de omgekeerde slinger (a) is uitgegaan van het evenwicht bij $\varphi_u = \pi$. De stabiliteitsbalk (b) toont dat het systeem instabiel is rondom deze evenwichtstand. De gewone slinger (c) is stabiel rondom de evenwichtstand $\varphi_u = 0$ (d). In het gebied $0 < \varphi_u < \pi$ tonen de stabiliteitsbalken hetzelfde beeld. Echter alleen de gewone slinger is een stabiel systeem.

pijlen die de vrije beweging van de hefboom aangeven zijn gelijkgericht in beide balken. Uitgaande van de evenwichtstand van figuur 4.6.d betekenen de pijlen een stabiel systeem. Uitgaande van de evenwichtstand van figuur 4.6.b betekenen dezelfde pijlen een instabiel systeem.

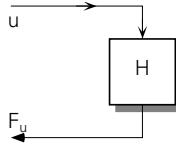
4.2.4. Stabiliteit en blokschema's

Voor een analyse van de stabiliteit van een systeem kunnen met voordeel blokschema's worden gebruikt.

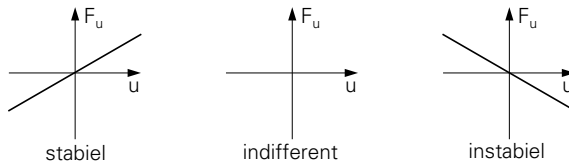
Een systeem is stabiel gedefinieerd als het na loslaten vanuit de nabije omgeving van een evenwichtstand in die evenwichtstand terugkeert. Voor die terugkeer is een naar de evenwichtstand toe gerichte kracht nodig. Indien het systeem die kracht bezit, moet een uitwendige kracht worden toegevoerd om een uitwijking vanuit de evenwichtstand mogelijk te maken. Dit is de kracht die in blokschema's is aangegeven.

In het blokschema van figuur 4.7 wordt aan het systeem met overbrengingsverhouding H een verplaatsing u toegevoerd. F_u is de kracht die op het systeem moet worden uitgeoefend om de verplaatsing u te bewerkstelligen. Voor evenwicht bij $u = 0$ is geëist

dat daarbij $F_u = 0$. Het systeem is stabiel in het punt $u = 0$ als in een gebied $-\Delta u < u < +\Delta u$ de op het systeem uitgeoefende kracht F_u hetzelfde teken heeft als de erbij horende verplaatsing u . Is dat niet het geval dan is het systeem instabiel. Voor het geval dat $F_u = 0$ in het gehele gebied, dan is het systeem indifferent. De ligging van de F_u - u -karakteristiek bepaalt de stabiliteit/instabiliteit van een systeem. Dit is aangegeven in figuur 4.8.



Figuur 4.7. Voor het bereiken van een verplaatsing u moet op het systeem met overbrengingsverhouding H een kracht F_u worden uitgeoefend. De eis dat moet worden uitgegaan van een evenwichtstand betekent $F_u = 0$ bij $u = 0$. Als bij een uitwijking u vanuit de evenwichtstand een kracht F_u in dezelfde richting op het systeem moet worden uitgeoefend, houdt dat in dat het systeem een inwendige kracht bezit die een teruggaande beweging verzorgt. Als dus u en F_u gelijkgericht zijn is het systeem stabiel.

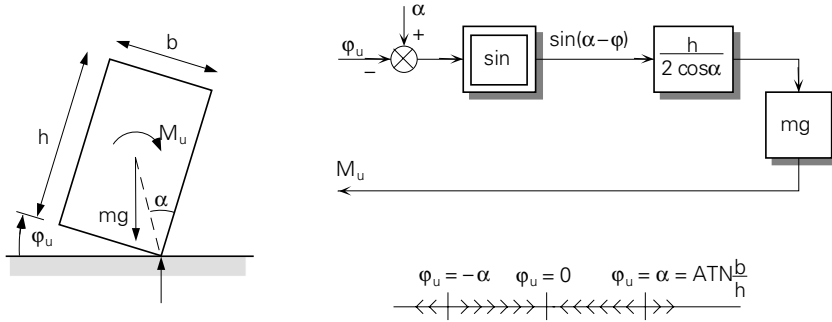


Figuur 4.8. Indien een systeem een uitwijking u (eventueel φ_u) wordt opgelegd, moet daarvoor een kracht F_u (moment M_u) op het systeem worden uitgeoefend. Indien u en F_u gelijkgericht zijn is het systeem stabiel; zijn ze tegengesteld gericht dan is het systeem instabiel; en bij $F_u = 0$ is het systeem indifferent.

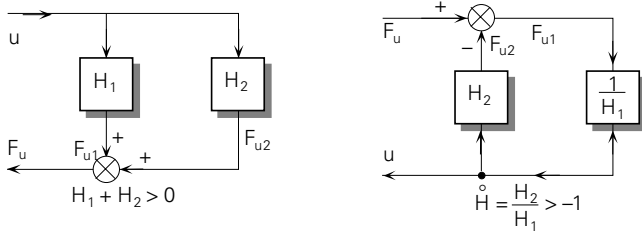
Bij toename van de waarden $-\Delta u$ en $+\Delta u$ kan de grootte van het stabiliteitsgebied worden nagegaan. De grootte en de ligging van het stabiliteitsgebied volgt uit de waarden van u waarvoor $F_u = 0$ wordt. Ter verduidelijking is in figuur 4.9 het blokschema van een kantelend blok gegeven. Ook in de stabiliteitsbalk is aangegeven dat het stabiliteitsgebied afhankelijk is van de afmetingen van het blok.

Figuur 4.7 geeft een zeer eenvoudig blokschema van een systeem. In figuur 4.10.a is het blokschema gegeven van een systeem dat twee signaalbanen parallel heeft. Nu geldt: $F_u = (H_1 + H_2) \cdot u$. Voor stabiliteit is het nodig dat de ingangskracht F_u en de verplaatsing u in dezelfde richting positief zijn. In een blokschema is deze stabiliteitsvoorwaarde als volgt te formuleren:

$$\begin{aligned} \text{Systeem stabiel als} & \quad H_1 + H_2 > 0 \\ \text{Systeem indifferent als} & \quad H_1 + H_2 = 0 \\ \text{Systeem instabiel als} & \quad H_1 + H_2 < 0 \end{aligned}$$



Figuur 4.9. Het blokschema van een kantelend blok. Voordat een hoekverdraaiing optreedt moet een moment $M_u = \frac{1}{2} mgh \cdot \sin(\alpha - \varphi_u) / \cos \alpha$ worden uitgeoefend in dezelfde richting als φ_u . Het systeem is stabiel. Het stabiliteitsgebied strekt zich uit tot $\sin(\alpha - \varphi_u) = 0$; dus tot $\alpha = \varphi_u$ of $-\alpha = -\varphi_u$. Daar $\alpha = \text{ATN}(b/h)$ is het stabiliteitsgebied afhankelijk van de blokafmetingen. Voor positieve φ_u -waarden kantelt het blok om een andere ribbe dan bij negatieve φ_u -waarden.



Figuur 4.10. De parallelschakeling van a is gelijkwaardig met de terugkoppeling van b. Toepassen van het stabiliteitscriterium leidt tot de bijgeschreven voorwaarden, die ook gelijkwaardig zijn. De uitdrukking $\dot{H} > -1$ sluit aan bij de stabiliteitsvoorwaarde voor dynamische systemen.

Bij stabiliteitsbeschouwingen wordt steeds uitgegaan van een verplaatsing. Daarop zijn alle criteria gebaseerd. Het blijft echter mogelijk een alternatief blokschema op te stellen met de ingangskracht F_u als onafhankelijke variabele. Het teruggekoppelde systeem van figuur 4.10.b is fysisch en mathematisch volkomen gelijkwaardig aan het parallel systeem van figuur 4.10.a. Voor het teruggekoppelde systeem geldt:

$$\frac{u}{F_u} = \frac{1/H_1}{1 + \dot{H}} \quad \text{met } \dot{H} = \frac{H_2}{H_1}$$

De stabiliteitsvoorwaarde ($u > 0$; $F_u > 0$) leidt nu tot de formulering:

$$\dot{H} > -1.$$

Deze korte en krachtige uitdrukking is gelijkwaardig met de bovenstaande formuleringen. Bij de stabiliteit van dynamische systemen wordt dezelfde uitdrukking gebruikt.

4.3. Stabiliteit van vaartuigen

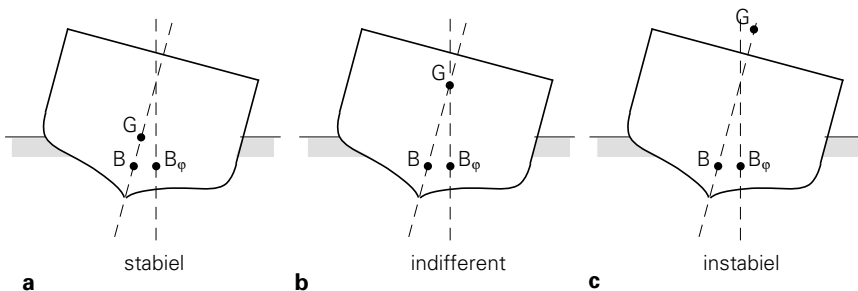
4.3.1. Inleiding

Op drijvende voorwerpen in rustig water werken in principe twee krachten: de zwaartekracht G en de opwaartse kracht O . Deze krachten zijn tegengesteld gericht. Bij drijvende voorwerpen hebben G en O dezelfde grootte. Voor evenwicht is het noodzakelijk dat de gewichtskracht en de opwaartse kracht dezelfde werklijn hebben. Voor stabiliteit moet nog aan meer voorwaarden worden voldaan.

Vaartuigen hebben doorgaans een symmetrische opbouw. Als het midscheepse vlak verticaal staat zal er evenwicht zijn. Bij vaartuigen is het absoluut noodzakelijk dat zij rotatie-stabiel zijn om twee horizontale assen. De stabiliteit rondom de langscheepse as is het meest kritisch. Hiervoor zijn de volgende beschouwingen opgesteld.

De gewichtskracht grijpt aan in het zwaartepunt. Bij vaartuigen is het gebruikelijk het zwaartepunt aan te duiden met de letter G . De opwaartse kracht grijpt aan in het zwaartepunt van de onderwatervorm. Dit punt wordt drukkingspunt genoemd en aangeduid met de letter B . Als een schip helt, verandert de onderwatervorm en daarmee de positie van het drukkingspunt. Bij een hellingshoek φ behoort een drukkingspunt B_φ .

De bouw en de belading van een schip bepalen de plaats van G . Die plaats verandert niet als het schip helt. De plaats van B_φ verandert wel met de hellingshoek. Bij elke hellingshoek van het schip zijn de gewichtskracht en de opwaartse kracht even groot, evenwijdig en tegengesteld gericht. De arm van dit krachtenkoppel wordt gegeven door de afstand van G tot de verticaal door B_φ . De positie van G ten opzichte van deze verticaal bepaalt daarmee de stabiliteit van een schip. Dat is toegelicht in figuur 4.11.

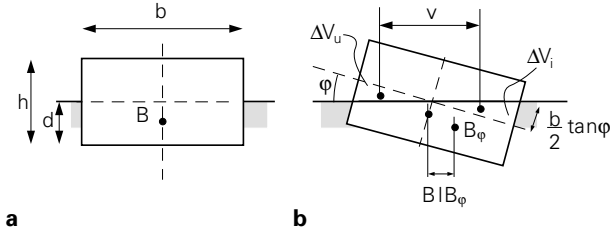


Figuur 4.11. Indien een schip helt, verplaatst het drukkingspunt B_φ . De onderlinge posities van het vaste punt G en B_φ bepalen de stabiliteit. In a treedt een terugstellend moment op; het systeem is stabiel. In c is het optredende moment helling vergroterend; het systeem is instabiel. Alleen indien G in een gebied van hellingshoeken op een verticale lijn door B_φ ligt, is het systeem indifferent (b).

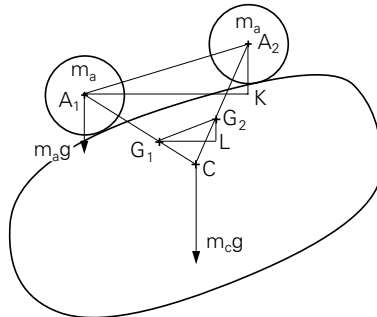
4.3.2. Drukkingspunt

In figuur 4.12.a is een vaartuig van zeer eenvoudige vorm getekend. Een rechthoekig ponton heeft een lengte ℓ , een breedte b en een hoogte h . Het ponton heeft een diep-

gang d . Het totale onderwatervolume bedraagt dus $V = \ell \cdot b \cdot d$. Dit onderwatervolume wordt aangeduid met de term waterverplaatsing. Het internationale symbool daarvoor is ∇ (naam symbool: nabla). Bij een rechthoekig ponton bevindt het drukkingspunt B zich midscheeps op een afstand $d/2$ van de onderzijde. G en B liggen boven elkaar. Er is evenwicht. In figuur 4.12.b is hetzelfde ponton getekend, een hoek φ gedraaid van uit de evenwichtstand. De opwaartse kracht grijpt nu aan in het punt B_φ ; het nieuwe drukkingspunt bij de hellingshoek φ .



Figuur 4.12. Bij hellen van een schip om de langsas wordt het onderwatervolume vergroot met de intreewig ΔV_i en verminderd met de uitreewig ΔV_u . De grootte van de wiggen ΔV , samen met hun horizontale zwaartepuntsafstand v , bepaalt de horizontale verschuiving BIB_φ .



Figuur 4.13. De verschuivingsstelling. De twee massa's m_a en m_c met zwaartepunt A_1 en C vormen samen de massa $(m_a + m_c)$. Het gezamenlijk zwaartepunt ligt in G_1 , zodanig dat $A_1G_1/G_1C = m_c/m_a$. Als de massa m_a verplaatst naar A_2 , ligt het nieuwe zwaartepunt G_2 zodanig dat $A_2G_2/G_2C = m_c/m_a$. Dit betekent $G_1G_2/A_1A_2 = m_a(m_a + m_c)$. Ook voor de horizontaal gemeten verschuivingen geldt dezelfde verhouding $G_1L/A_1K = m_a/(m_a + m_c)$.

De afstand van B tot de verticaal door B_φ (in het volgende aangeduid met BIB_φ) is eenvoudig te berekenen met behulp van de verschuivingsregel. De verschuivingsregel is in figuur 4.13 afgeleid voor gewichtskrachten, maar geldt uiteraard eveneens voor opwaartse krachten. Bij hellen van het ponton wordt het onderwatervolume vergroot met het volume van de intreewig ΔV_i en verminderd met het volume van de uitreewig ΔV_u . De opwaartse kracht blijft gelijk en dus geldt $\Delta V_i = \Delta V_u$. Het volume van de intree- en uitreewig is eenvoudig te berekenen:

$$\Delta V_i = \Delta V_u = \frac{1}{8} \ell b^2 \tan \varphi.$$

De horizontale afstand v tussen de zwaartepunten van de intree- en uittreewig is te berekenen:

$$v = \frac{2}{3} b \frac{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi}.$$

Voor $\varphi < \frac{\pi}{4}$ geldt met zeer goede benadering $v = \frac{2}{3} b$. Bij een hellingshoek φ verschuift het drukingspunt over een horizontale afstand:

$$\text{BlB}_\varphi = \frac{v \Delta V_i}{\nabla} = \frac{\frac{1}{12} \ell b^3 \tan \varphi}{\nabla}.$$

In deze betrekking is $\frac{1}{12} \ell b^3$ het kwadratisch oppervlaktemoment van de waterlijndoorsnede. Daarmee vereenvoudigt de formule tot:

$$\text{BlB}_\varphi = \frac{J_u}{\nabla} \tan \varphi$$

Deze formule is afgeleid voor een rechthoekig vaartuigprofiel en kleine rotatiehoeken. Bij andere profielvormen ontstaan meestal slechts kleine afwijkingen.

4.3.3. Stabiliteit

Een vaartuig is stabiel om zijn langsas als een moment nodig is om het vaartuig uit zijn verticale evenwichtsstand te brengen. Dat houdt in dat het koppel gevormd door de zwaartekracht mg en de opwaartse kracht O de uitwijking tegenwerkt. Bij een rotatie φ_u om het zwaartepunt G verplaatst het punt B een afstand $BG \sin \varphi_u$. Zie figuur 4.14. Een stabiel vaartuig ontstaat indien de onderwatervorm zodanig wijzigt dat de verplaatsing van het drukingspunt groter is dan $BG \sin \varphi_u$. In formule:

$$\text{BlB}_\varphi > BG \sin \varphi_u$$

Alleen dan verkrijgt het mg - O -koppel de juiste richting. Met behulp van de in § 4.3.2 afgeleide betrekking is deze uitdrukking om te zetten in een voorwaarde aan vaartuigparameters. Voor kleine hoeken ($\sin \varphi_u = \tan \varphi_u$) luidt dan het stabiliteitscriterium:

$$\frac{J_u}{\nabla} = BG$$

Hierin is:

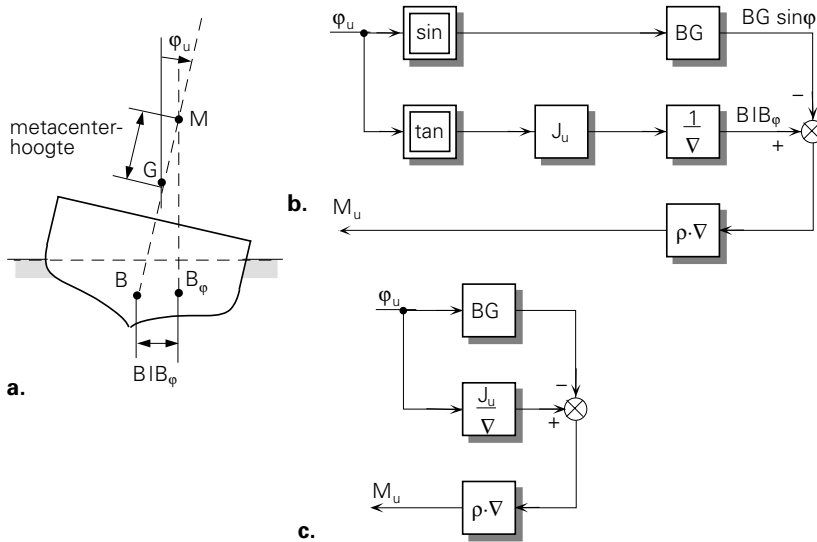
J_u – Kwadratisch oppervlaktemoment van de waterlijndoorsnede om langsas.

∇ – Waterverplaatsing.

BG – Afstand zwaartepunt tot drukkingspunt in verticale vaartuigpositie.

De stabiliteitsvoorwaarde volgt ook uit het blokschema voor rotaties om de u -as. Zie figuur 4.14. De eis dat een postief moment M_u ontstaat leidt direct tot de voorwaarde $BIB_\phi > BG \sin \varphi_u$. Daaruit volgt de bovengenoemde stabiliteitsvoorwaarde.

Nadrukkelijk wordt hier nog gesteld dat de gegeven stabiliteitsvoorwaarde is afgeleid voor kleine rotatiehoeken. De formule kan niet gebruikt worden bij grote rotatiehoeken. Er wordt alleen uitspraak gedaan over de stabiliteit van het evenwicht; niet over de grootte van het stabiliteitsgebied.

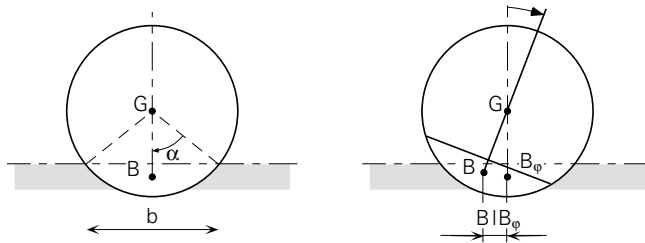


Figuur 4.14. In a is een om de langsas geroteerd vaartuig getekend. Uit het blokschema van de rotatie (b) volgt dat het vaartuig stabiel is als $M_u > 0$ dus als $BIB_\phi > BG \sin \varphi_u$. Voor kleine hoeken geldt $\sin \varphi_u = \tan \varphi_u$. Daarmee vereenvoudigt het blokschema tot c. Daaruit volgt direct de stabiliteitsvoorwaarde $J_u / \nabla > BG$. In a is ook de metacenterhoogte GM aangegeven.

Opmerking. Scheepsbouwkundigen duiden de stabiliteit van een schip aan met de metacenterhoogte. Deze is aangegeven in figuur 4.14. De verticaal door het drukkingspunt B_ϕ snijdt het midscheepse vlak in het punt M, metacenter genaamd. De afstand GM staat bekend als de metacenterhoogte. Een positieve waarde voor GM komt overeen met een positief moment M_u . Een positieve metacenterhoogte betekent dus een stabiel schip. Voor grote hellingshoeken φ_u is er nog wel een snijpunt tussen de werklijn van de opwaartse kracht en het midscheepse vlak. Dat snijpunt – vals metacenter genaamd – valt doorgaans niet samen met het ware metacenter, en kan niet gebruikt worden voor de berekening van de metacenterhoogte.

4.3.4. Invloed van de vorm

In de vorige paragraaf is de stabiliteitsvoorwaarde berekend uit de verschuiving van het drukkingspunt ten gevolge van de verandering van de onderwatervorm van het vaartuig. De vorm van het vaartuig beïnvloedt de stabiliteit. In deze paragraaf is deze invloed nader besproken.



Figuur 4.15. Dwarsdoorsnede van een drijvende cilinder met centraal zwaartepunt G . In a is uitgangspositie getekend. Bij rotatie (b) blijft het drukkingspunt juist onder het zwaartepunt. Het evenwicht is indifferent.

In figuur 4.15 is een drijvende cilinder (straal R en lengte ℓ) getekend. Het zwaartepunt G ligt op de centrale as. Door berekening of uit de handboeken volgen de waarden voor J_u – kwadratisch oppervlaktemoment van de waterlijndoorsnede om de langsas, BG en de waterverplaatsing ∇ .

$$J_u = \frac{1}{12} b^3 \ell \quad b - \text{waterlijnbreedte}$$

$$BG = \frac{1}{12} b^3 / A \quad A - \text{segmentoppervlak}$$

$$A = \frac{1}{2} R^2 (2\alpha - \sin 2\alpha) \quad \alpha - \text{middelpuntshoek}$$

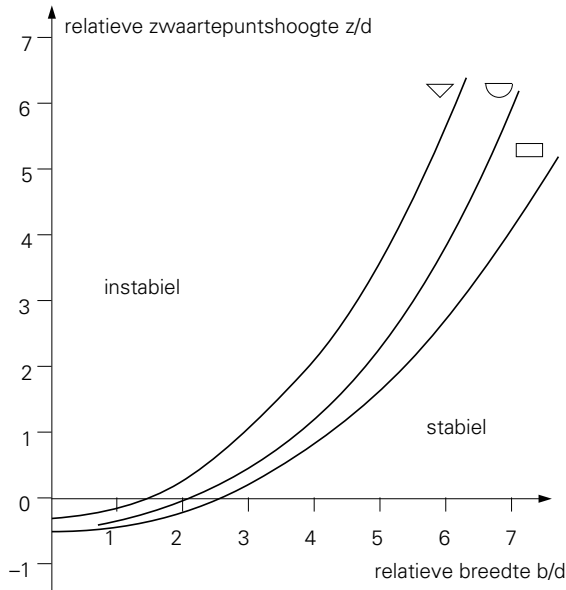
Met $b = 2R \sin \alpha$ en $\nabla = A \ell$ volgt hieruit de gelijkheid $J_u / \nabla = BG$. Dit komt geheel overeen met uit de praktijk bekend gedrag. Er is geen voorkeurspositie. Het evenwicht is indifferent. Daarbij moet worden bedacht dat dit indifferente evenwicht alleen aanwezig is bij cilinders met een centraal zwaartepunt.

Een vaartuig, waarvan de romp een deel van een cilinder is, heeft een eenvoudig te bepalen stabiliteitsgedrag. Het indifferente evenwicht van een drijvende cilinder met centraal zwaartepunt is de overgang tussen de stabiele en de instabiele vaartuigen met cilindervormige romp. De hoogte z die het zwaartepunt van het schip boven de waterlijn mag liggen is te berekenen uit de waterlijnbreedte b en de diepgang d . De relatieve zwaartepuntligging z/d is in figuur 4.16 uitgezet als functie van de b/d -verhouding. De lijn geeft de vaartuigen met een indifferent evenwicht aan. Het gebied onder de lijn geeft de stabiele vaartuigen aan.

Vaartuigen met een rechthoekige of een driehoekige rompvorm kunnen ook een indifferent gedrag bezitten. Berekening daarvan levert de twee andere lijnen van figuur 4.16. Bij eenzelfde breedte/diepgang-verhouding kan een grotere relatieve zwaartepuntshoogte worden verkregen bij een driehoekige rompvorm dan bij een cilinder-

vormige of rechthoekige dwarsdoorsnede. De driehoekige rompvorm levert de meest stabiele schepen, de rechthoekige de minst stabiele.

De grafieken van figuur 4.16 hebben alle een negatief deel. Dat deel geeft de vaartuigen aan, waarvan het zwaartepunt onder de waterlijn ligt. Voor $b/d < \sqrt{2}$ is dit voor het stabiele driehoekige profiel nodig. Het rechthoekige profiel moet al bij $b/d < \sqrt{6}$ een zwaartepunt onder de waterlijn bezitten. Een zwaartepunt dat meer dan de halve diepgang onder de waterlijn ligt ($z/d < -0,5$) levert altijd een stabiel vaartuig op.

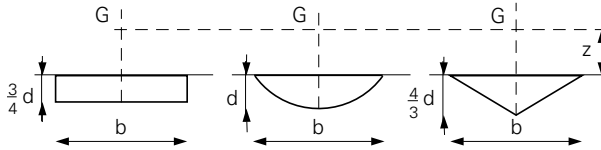


Figuur 4.16. De invloed van de vorm van een vaartuig op de stabiliteit. De lijnen geven de grens aan van stabiele en instabiele vaartuigen bij verschillende rompvormen. ∇ = driehoekige, \cup = cilindervormige en \square = rechthoekige dwarsdoorsnede. Bij eenzelfde b/d -verhouding levert een driehoekige dwarsdoorsnede het meest stabiele schip.

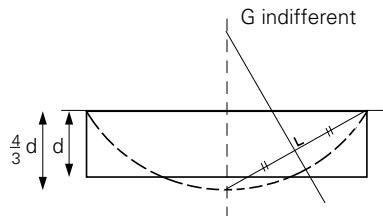
Met de karakteristieken van figuur 4.16 is het mogelijk de stabiliteit van verschillende rompvormen in elkaar om te rekenen. Zie figuur 4.17. De aangegeven onderwaterprofielen hebben alle dezelfde zwaartepuntshoogte boven de waterlijn. Bij de aangegeven verhoudingen zijn de drie profielen met zeer goede benadering in indifferent evenwicht.

Dit houdt in dat de stabiliteit van bijvoorbeeld een ponton eenvoudig is te bepalen. Bij eenzelfde waterlijnbreedte b is het overeenkomende cilindersegmentprofiel snel te bepalen; $d_{\text{cilinder}} = \frac{4}{3} d_{\text{rechthoek}}$. Van het cilindersegmentprofiel is de indifferente zwaartepuntsligging direct te vinden door een middelloodlijnconstructie. Zie figuur 4.18. Dat is dan ook de indifferente zwaartepuntsligging van het rechthoekige profiel.

Op overeenkomstige wijze is de maximale zwaartepuntsligging van een driehoekige profiel te vinden. Bij werken met de getallen $\frac{4}{3}$ en $\frac{3}{4}$ ontstaan zeer goede benaderingen van de theoretische waarden.



Figuur 4.17. Het cilindervormige vaartuigprofiel met waterlijnbreedte b en diepgang d is juist indifferent bij een zwaartepunt z boven de waterlijn. Bij eenzelfde waterlijnbreedte b zijn het rechthoekige en driehoekige profiel ook juist indifferent, indien de diepgang respectievelijk $3/4d$ en $4/3d$ bedraagt.



Figuur 4.18. Grafische bepaling van de hoogste zwaartepuntsligging van een ponton. Door de pontondiepgang met $4/3$ te vermenigvuldigen ontstaat de diepgang van een cilindervormig profiel met eenzelfde indifferente stabiliteit. Met behulp van een middenloodlijnconstructie is het indifferente zwaartepunt van het cilindervormig profiel en dus ook van het ponton te vinden.

4.4. Stabiliteit van voertuigen

Alvorens de stabiliteit van voertuigen te onderzoeken is het gewenst inzicht te hebben in het weggedrag van wielen. In het volgende zullen de contactkrachten wiel/wegdek worden geanalyseerd in drie verschillende gebruiksomstandigheden.

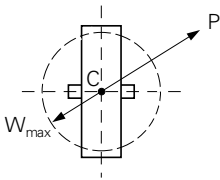
4.4.1. Het weggedrag van een geblokkeerd wiel

In figuur 4.19 is een geblokkeerd wiel van boven getekend. Het punt C geeft het centrum van het contactvlak wiel/wegdek aan. De bewegingsrichting van het contactvlak is dezelfde als die van het voertuig. De wrijvingskracht W is steeds tegengesteld gericht aan de bewegingsrichting van het voertuig en heeft een maximale grootte $W_{\max} = f \cdot N$, waarin N de kracht is waarmee het wiel tegen het wegdek wordt gedrukt. Bij een beweging van het voertuig langs de lijn CP in de richting van de pijl behoort de wrijvingsvector W .

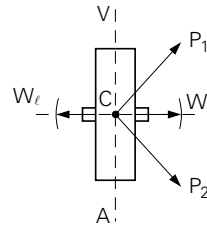
4.4.2. Het weggedrag van een vrij rollend wiel

Het weggedrag van een vrijrollend wiel is ook eenvoudig. Als de bewegingsrichting van het voertuig valt langs de lijn VCA is er geen wrijvingskracht in het contactvlak wiel/wegdek aanwezig. (De wrijvingskracht nodig voor het overwinnen van de wiel-lagerwrijving is verwaarloosd.) Zodra de bewegingsrichting niet meer precies samenvalt met de lijn VCA, heeft het wiel een zijdelingse slip en treedt de maximale

wrijvingskracht op. Indien de optredende beweging een rechtsgerichte component bezit (zoals bijvoorbeeld bij de voertuigrichtingen CP_1 of CP_2 in figuur 4.20) is een linksgerichte wrijvingskracht W_l aanwezig. Bij een linksgerichte snelheidscomponent van het voertuig treedt W_r op. De optredende wrijvingskracht is of W_l of W_r of $W = 0$. Bij een vrijrollend star wiel is er geen andere mogelijkheid.



Figuur 4.19. Een voertuig beweegt langs de lijn CP met een geblokkeerd wiel. De tekening geeft een bovenaanzicht van het wiel. Het eind van de wrijvingskrachtvector moet op de gestippelde cirkel liggen. In het contactvlak wiel/wegdek heerst een wrijvingskracht W_{max} die tegengesteld gericht is aan de bewegingsrichting.



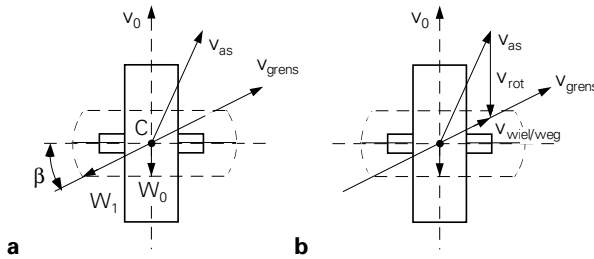
Figuur 4.20. Bovenkant van een vrijrollend wiel. De wrijvingskracht W in het contactvlak wiel/wegdek van een vrijrollend wiel heeft drie mogelijkheden. Is de bewegingsrichting van het voertuig langs de lijn CV dan is $W = 0$. Een rechtsgerichte snelheid van het voertuig (richting CP_1 of CP_2) veroorzaakt een wrijvingskracht W_l . Een linksgerichte voertuigsnelheid veroorzaakt een wrijvingskracht W_r . Zowel W_l , als W_r zijn maximale wrijvingskrachten.

4.4.3. Het weggedrag van een geremd rollend wiel

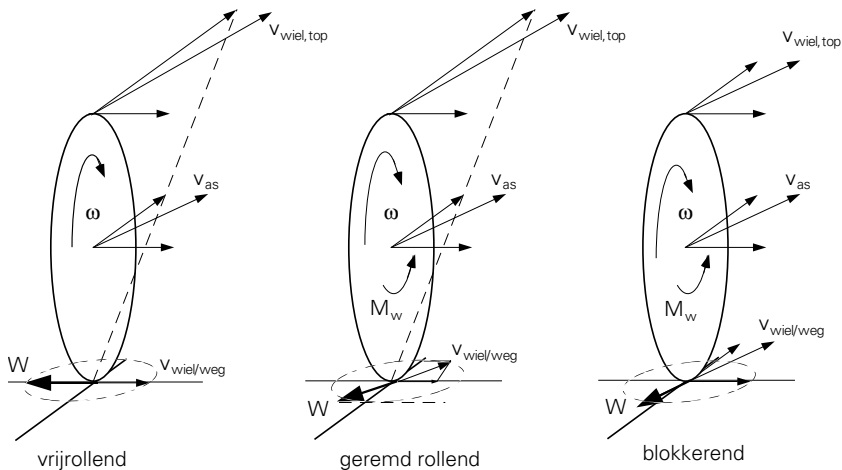
Dit is een complexe situatie. In figuur 4.21.a is een wiel getekend. Er wordt geremd met een moment M_w . Het momentenevenwicht van het wiel vereist dan dat in het contactvlak wiel/wegdek een wrijvingskracht $W_0 = M_w/R$ aanwezig is ($R =$ straal wiel). Als de wielas beweegt met een voorwaarts gerichte snelheid v_0 zal deze wrijvingskracht W_0 de beweging afremmen. Indien de beweging van de as een zijdelingse component verkrijgt, moet ook de wrijvingskracht een zijdelingse component hebben. De totale wrijvingskrachtvector heeft echter een maximale waarde W_{max} . De optredende wrijvingskracht is W_1 . Deze wrijvingskrachtvector W_1 wijzigt niet als de assnelheid verandert. Voor alle snelheden v_{as} die gericht zijn tussen v_0 en v_{grens} treedt de wrijvingskracht W_1 op. Pas als de hoek die v_{as} maakt met het wielvlak kleiner is dan β (v_{as} meer axiaal gericht dan v_{grens}), verandert de situatie. Dan wordt de tangentieel gerichte component van de wrijvingskracht kleiner dan W_0 . Het gevolg is dat het remmoment M_w overheerst en het wiel blokkeert.

De optredende wrijvingskracht beïnvloedt de wielrotatie. De snelheid van het contactvlak wiel/wegdek is steeds tegengesteld gericht aan de wrijvingsvector. De snelheid van het contactvlak is steeds gelijk aan de vectorische som van de assnelheid v_{as} en de wielrotatiesnelheid v_{rot} . Zie figuur 4.21.b. Naarmate de assnelheid meer overeenkomt met v_{grens} wordt v_{rot} kleiner. Als $v_{as} = v_{grens}$ is $v_{rot} = 0$; het wiel roteert niet.

Een verdere verduidelijking van het wielgedrag in de situaties vrijrollend, geremd rollend en blokkerend is gegeven in de ruimtelijke schets van figuur 4.22.



Figuur 4.21. Een voertuigwiel wordt afgeremd met een constant remkoppel M_w . Dat resulteert in een wrijvingskracht $W_0 = M_w/R$ in het contactvlak wiel/wegdek (a). De wrijvingskracht is tegengesteld gericht aan de beweging. Als de richting van de voertuigsnelheid afwijkt van de rotatievlak moet het contactvlak een zijdelingse slip opnemen. Er ontstaat de wrijvingskracht W_1 . Dat is het geval voor alle v_{as} tussen v_0 en v_{grens} . De contactvlaksnelheid $v_{wiel/wegdek}$ is tegengesteld gericht aan W_1 (b). Er geldt $v_{wiel/wegdek} = v_{as} + v_{rot}$. Als $v_{as} = v_{grens}$ draait het wiel niet.



Figuur 4.22. Wielgedrag bij remmen. Zolang het wiel vrij rolt, heeft het contactvlak wiel-weg geen tangentiële snelheidscomponent, dan is $v_{wiel,weg} = v_{as-axiaal}$. De wrijvingskracht W is axiaal gericht. Bij remmen moet de wrijvingskracht W een tangentiële component hebben. De axiale component is zo groot mogelijk. Het eindpunt van de wrijvingsvector moet op de in het grondvlak getekende streeplijn liggen. Omdat $v_{wiel,weg}$ tegengesteld gericht is aan W heeft het wiel rotatieslip. Bij het geblokkeerde wiel heerst overal dezelfde snelheid v_{as} . De wrijvingsvector is daaraan tegengesteld gericht. Het eindpunt ligt op de gestreepte cirkel. Alle snelheden zijn gegeven ten opzichte van het wegdek.

4.4.4. Stabiliteit van geremde voertuigen

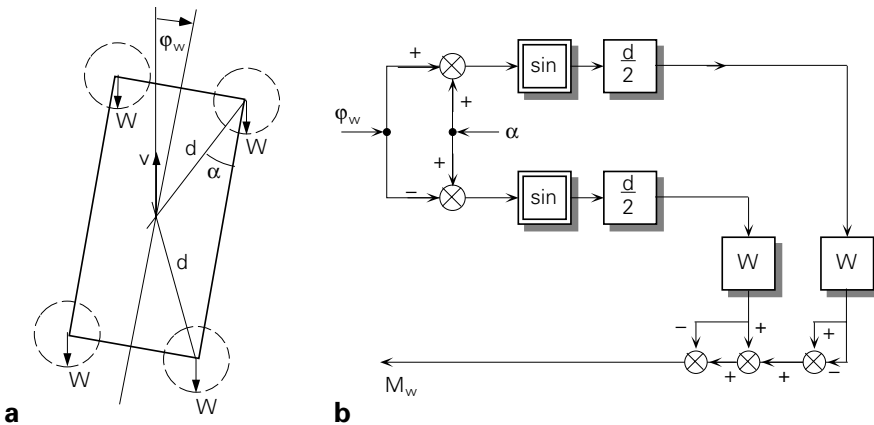
De stabiliteit van voertuigen is een bijzonder gecompliceerd fenomeen. In het volgende is alleen de rotatie-stabiliteit om een verticale w -as van ongelede vierwielige voertuigen geanalyseerd. Dit stabiliteitsonderzoek is in drie gebruikstoestanden onderzocht:

- A – alle wielen blokkeren
- B – de voorwielen blokkeren; de achterwielen niet
- C – de achterwielen blokkeren; de voorwielen niet

Er is aangenomen dat het voertuig zich remmend op een glad wegdek bevindt, terwijl het voertuig aan het begin van de remprocedure een snelheid v heeft. Verder is verondersteld dat het het zwaartepunt van het voertuig zich vlak boven het wegdek bevindt; bij remmen veranderen de wrijvingskrachten tussen wiel en wegdek niet. Dynamische effecten zijn niet meebeschouwd.

A. Alle wielen blokkeren

Dit geval is eenvoudig. Op alle wielen werkt in het contactvlak wiel/wegdek een wrijvingskracht W , tegengesteld aan de bewegingsrichting. Zie figuur 4.23.a. Deze krachten zijn twee aan twee samen te stellen. Bij elke ϕ_w ontstaat een in het zwaartepunt van het voertuig aangrijpende kracht ter grootte $4 \cdot W$. Het evenwicht is indifferent. Zie ook het blokschema van figuur 4.23.b, waaruit duidelijk blijkt dat het rotatiemoment $M_w = 0$.



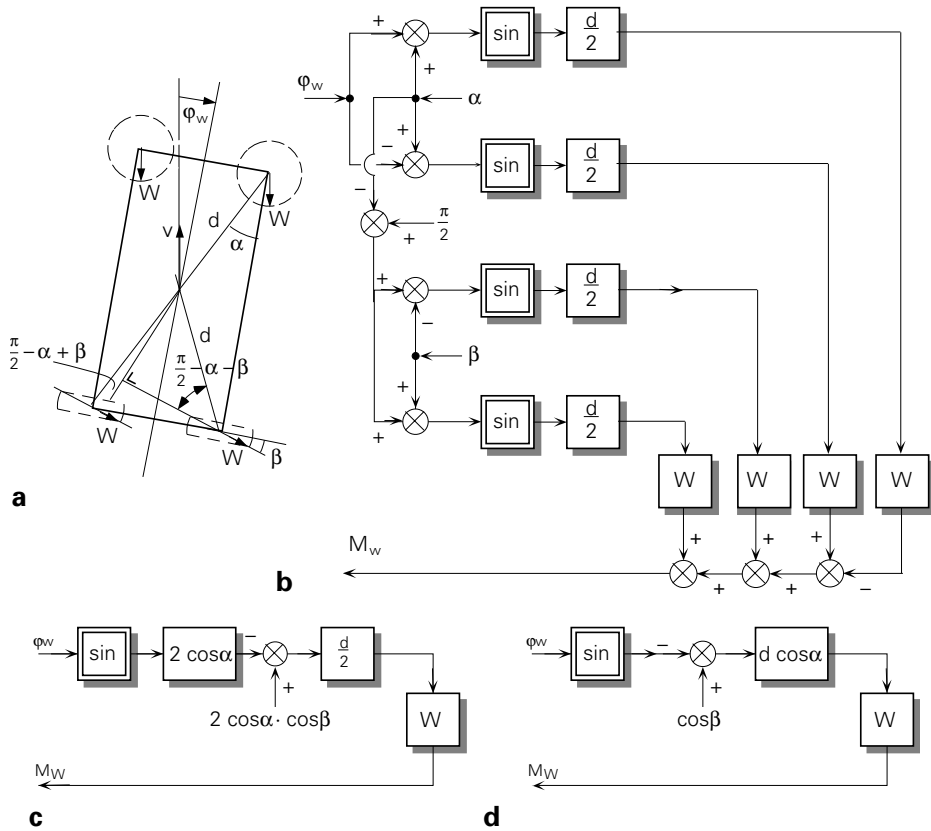
Figuur 4.23. Een voertuig beweegt met een snelheid v met geblokkeerde wielen over een wegdek. In elk wiel ontstaat een wrijvingskracht W . Het blokschema b geeft de momenten om het zwaartepunt die deze wrijvingskrachten veroorzaken. Het resulterend moment $M_w = 0$. Dat geldt voor elke rotatiehoek ϕ_w . Het systeem is indifferent. $d =$ diagonale wielafstand.

Door verschillen in de wrijvingscoëfficiënt kunnen verschillen in W ontstaan waardoor zwakke rotatiemomenten kunnen optreden. Zodra een rotatie optreedt, wijzigt de richting van de wrijvingskrachten, waardoor een tegenwerkend moment ontstaat. Een voertuig met geblokkeerde wielen zal zonder veel rotatie rechtlijnig voortbewegen.

B. De voorwielen blokkeren; de achterwielen niet

Indien de voorwielen blokkeren is de wielstand niet van belang. De wrijvingskracht is steeds tegengesteld gericht aan de bewegingsrichting. De wrijvingskracht op de achterwielen heeft een sterk richtend effect op de koers van het voertuig. Hier geldt de

situatie van § 4.4.3. Zodra de richting van de voertuigsnelheid niet meer precies loodrecht op de draaiingsas van de achterwielen staat, ontstaat een wrijvingskracht met een grote zijdelingse component die een rotatie tegenwerkt. Zie figuur 4.24. Er is een moment voor nodig om een rotatie te verkrijgen. Voor dit geval geldt het blokschema van figuur 4.24.b. Door samenvoegen van goniometrische termen en door verschuiven van het optelpunt is dit blokschema te vereenvoudigen tot dat van figuur 4.24.d. Hieruit blijkt dat voor de stabiliteit vereist is dat $\cos \beta > \sin \varphi_w$ of $\beta < \frac{\pi}{2} - \varphi_w$.

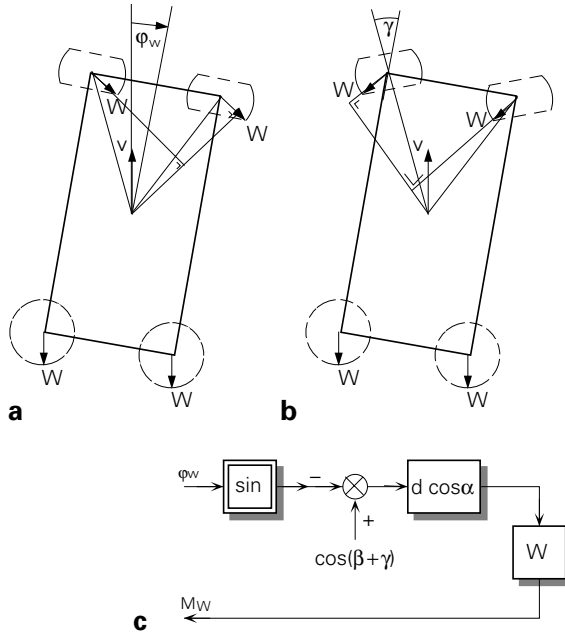


Figuur 4.24. Een voertuig beweegt met een snelheid v over een wegdek. Bij het remmen blokkeren de voorwielen. De achterwielen blijven echter draaien. Uit a blijkt dat reeds bij een zeer kleine uitwijking φ_w een corrigerend moment ontstaat ten gevolge van de wrijvingskrachten op de achterwielen. In b is het blokschema getekend. Dit blokschema is vereenvoudigd tot c en door verschuiven van het aftrekpunt tot d. Het systeem is stabiel als $M_w > 0$, dus als $\sin \varphi_w < \cos \beta$.

Bij licht remmen is β klein; naarmate sterker geremd wordt neemt β toe. De hoek β mag maximaal $\beta = \frac{\pi}{2} - \varphi_w$ worden. Dan zijn de wrijvingskrachten tegengesteld aan de snelheidsvector, en is de situatie overeenkomstig figuur 4.23. Zolang $\beta < \frac{\pi}{2} - \varphi_w$ is een geremd voertuig dat met geblokkeerde voorwielen voortschuift, een rotatie-stabiel systeem.

C. De achterwielen blokkeren; de voorwielen niet

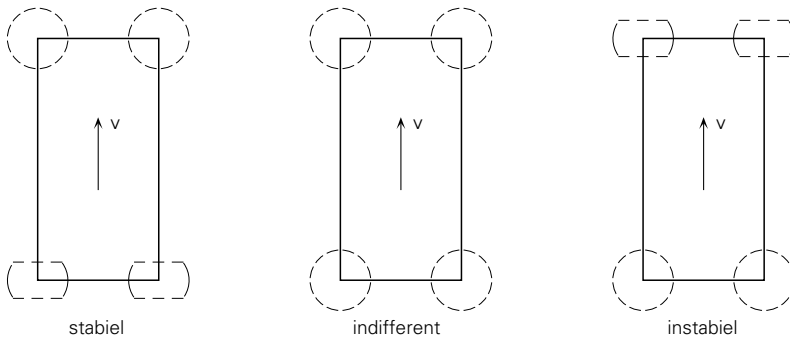
Bij een blokkeren van de achterwielen ontstaan op deze wielen wrijvingskrachten tegengesteld aan de bewegingsrichting. Met de voorwielen in de rechteuitstand ontstaan op de voorwielen wrijvingskrachten met een grote zijdelingse component (zie § 4.4.3). Deze wrijvingskrachten wekken een instabiliteit op. Een geremd voertuig dat met geblokkeerde achterwielen voortschuift, is rotatie-instabiel. Zie figuur 4.25.



Figuur 4.25. Een voertuig beweegt met een snelheid v over een wegdek. Bij het remmen blokkeren de achterwielen; de voorwielen blijven ronddraaien. In a staan de voorwielen in de rechteuitstand. De op de voorwielen werkende wrijvingskrachten vergroten een aanwezige uitwijking ϕ_w . Het systeem is instabiel. Door verdraaiing van de voorwielen (b) is een terugdraaiend moment te verkrijgen. Daarmee is de koers van het voertuig beheersbaar. Het voertuig blijft instabiel. In c is het vereenvoudigde blokschema getekend.

De instabiliteit is veroorzaakt door de werking van de voorwielen. Zoals uit de modelvorming van § 4.4.3 blijkt, is de optredende wrijvingskracht vooral afhankelijk van de hoek tussen de wielomtreknelheid en de voertuigsnelheid. Als deze hoek van teken verandert, doet de zijdelingse component van de wrijvingskracht dat ook. Door verdraaien van de voorwielen kan de hoek gewijzigd worden. Als de voorwielen worden verdraaid over een hoek γ die groter is dan de reeds opgetreden rotatiehoek ϕ_w van het voertuig, geven de wrijvingskrachten op de voorwielen een terugdraaiend moment. Daarmee is het voertuig beheersbaar, maar niet stabiel. De situatie is te vergelijken met het balanceren van een stok op een hand. De stok is met handbewegingen verticaal te houden, maar blijft instabiel. Bij een voertuig is de maximale verdraaiingshoek van de voorwielen ongeveer 45° . Een achterwielsslip waarbij het

voertuig minder dan 45° verdraaid is, kan nog gecorrigeerd worden door een stuurverdraaiing. Een voertuig dat reeds meer dan 45° is geslipt, is onbeheersbaar.



Figuur 4.26. Overzicht van de stabiliteit van voertuigen. De wielen zijn gekarakteriseerd door hun wrijvingsvectorfiguur; bij geremde wielen een cirkelsegment, bij blokkerende wielen een volledige cirkel. De pijl v duidt de bewegingsrichting aan. Blokkerende achterwielen veroorzaken een instabiel weggedrag.

4.5. Stabiliserende systemen

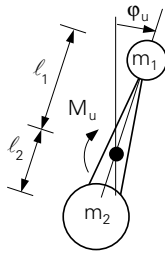
In verreweg de meeste gevallen is het de bedoeling dat systemen een stabiel werkgebied hebben. Indien het systeem in het werkgebied niet of onvoldoende stabiel is kunnen stabiliserende maatregelen worden genomen. Deze worden in deze § besproken.

4.5.1. Stabiliseren met massa

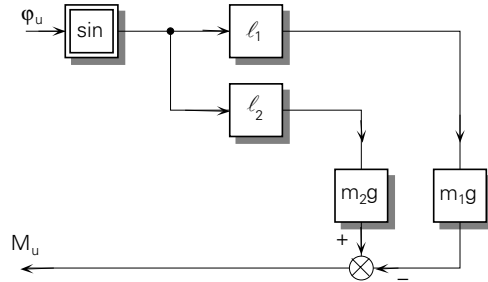
De omgekeerde slinger uit § 4.2.3 is instabiel in het punt $\varphi_u = 0$. Stabiliteit is eenvoudig te verkrijgen door het toevoegen van een massa. Zie figuur 4.27. Voor een stabiel gedrag moet $\ell_2 \cdot m_2 > \ell_1 \cdot m_1$ zijn. Daarmee wordt het systeem absoluut stabiel. Na alle uitwijkingen komt de slinger bij loslaten terug in de $\varphi_u = 0$ positie. Voor het geval dat $\ell_2 \cdot m_2 = \ell_1 \cdot m_1$ wordt een indifferent evenwicht verkregen. De stabiliteitsvoorwaarde blijkt uit het in figuur 4.27.b gegeven blokschema. Het blokschema is ook te presenteren als een tegengekoppeld systeem. Zie § 4.2.4. Dat levert met $\dot{H} > -1$ (let goed op de tekens) dezelfde voorwaarde.

4.5.2. Stabiliseren met veer

Veren kunnen op veel manieren aan de omgekeerde slinger worden toegevoegd waarbij in veel gevallen stabiliteit ontstaat. In figuur 4.28 is een symmetrisch opgestelde veer getekend. Bij voldoende veerlengte en kleine afstand ℓ_2 kan de veerkracht als verticaal worden beschouwd. Afhankelijk van voorspanning en veerstijfheid kunnen verschillende stabiliteitsgebieden worden verkregen. figuur 4.28.b geeft het blokschema van het systeem. Daaruit blijkt duidelijk de stabiliserende werking. De resultaten van een nauwkeurige analyse zijn gegeven in figuur 4.29.

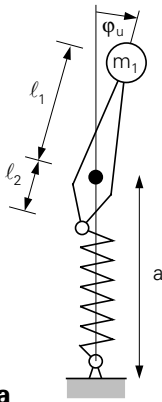


a

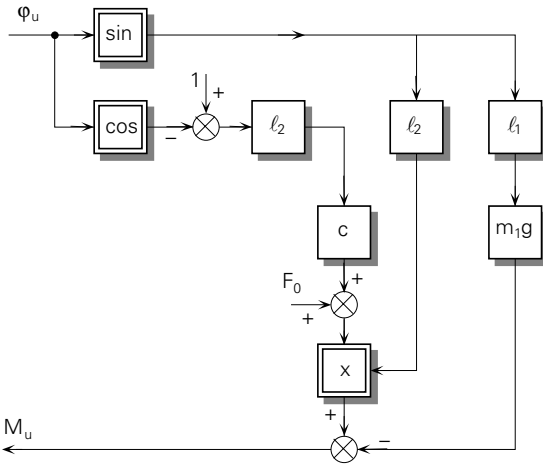


b

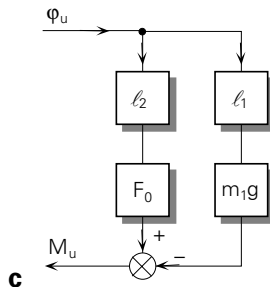
Figuur 4.27. Een omgekeerde slinger met massa m_1 is te stabiliseren door het toevoegen van een massa m_2 (a). Uit het blokschema blijkt dat daarmee een parallelbaan ontstaat. Voor stabiliteit moet $l_2 m_2 > l_1 m_1$.



a



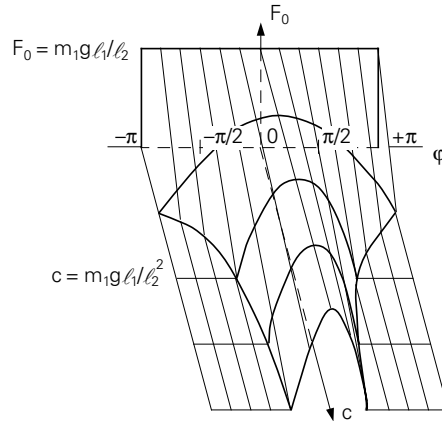
b



c

Figuur 4.28. Een omgekeerde slinger is met een veer te stabiliseren, bijvoorbeeld zoals aangegeven in a. Het bijbehorende blokschema geeft b. Voor kleine uitwijkingen kan het blokschema van c gebruikt worden. Als $F_0 > m_1 g l_1 / l_2$ is het systeem stabiel voor $\varphi_u = 0$.

Ter toelichting van figuur 4.29 het volgende. Bij de keuze van een veer worden de waarden van de voorspanning F_0 en de veerstijfheid c bepaald. Elk punt van het F_0 - c -



Figuur 4.29. De stabiliteit van de veergestabiliseerde omgekeerde slinger van figuur 4.27. Alleen de systemen met parameters boven het getekende vlak zijn stabiel. Voor absolute stabiliteit is nodig $F_0 > m_1 g l_1 / l_2$. Voor kleinere waarden van F_0 is het systeem beperkt stabiel.

vlak komt dus overeen met een gekozen veer. Langs de φ -as is aangegeven voor welke hoeken het systeem stabiel is. Een analyse leert dat het systeem instabiel is onder het getekende oppervlak en stabiel erboven. Voor bijvoorbeeld een voorspankracht $F_0 = 0$ en een veerstijfheid $c = m_1 g l_1 / l_2^2$ is het systeem instabiel voor de hoeken $-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}$. Daarbuiten is het systeem stabiel. Bij toenemende voorspankracht en toenemende veerstijfheid neemt het stabiliteitsgebied toe. Voor alle waarden van de veerstijfheid moet (bij positieve c -waarden) tenminste een voorspankracht $F_0 = m_1 g l_1 / l_2$ aanwezig zijn, om een geheel stabiel systeem te bereiken.

Het getekende oppervlak is de grens tussen de stabiele en de instabiele systemen. Het oppervlak bevat de indifferente systemen. Als bijvoorbeeld bij een veerstijfheid $c = m_1 g l_1 / l_2^2$, de voorspankracht F_0 zou veranderen volgens de functie $F_0 = (m_1 g l_1 / l_2) \cos \varphi$, zou de in de figuur getekende grenskromme worden doorlopen. Daarbij zou het systeem tussen de hoeken $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ en $+\frac{\pi}{2}$ steeds in een toestand van indifferent evenwicht verkeren. Systemen met een veranderende voorspankracht zijn echter niet eenvoudig te maken en daarom zelden voorkomend. Een bijzondere situatie treedt op voor $c = 0$ en $F_0 = m_1 g l_1 / l_2$. Bij deze waarden heeft het grensoppervlak een horizontale lijn evenwijdig met de φ -as. Dan is dus een systeem gevormd dat bij constant blijvende systeemp parameters voor alle hoeken φ een indifferent evenwicht bezit. Voor die waarden van c en F_0 is een indifferent systeem ontstaan. Dat was ook te verwachten. De richting van de veerkracht is verticaal verondersteld. Dan is een constante voorspankracht en een veerstijfheid $c = 0$, hetzelfde als het aanbrengen van een tegenwicht (§ 4.5.1).

De bovenstaande stabiliteitsgrens is afgeleid voor een verticale veer; dus voor $a/l_2 \rightarrow \infty$. Voor kleine waarden van a/l_2 ontstaan slechts geringe afwijkingen in de afleiding. Pas voor $a/l_2 < 5$ worden de afwijkingen groter dan 2%. Kleine waarden

voor all_2 geven constructieve problemen voor de plaatsing van de veer. Tussenschakeling van een hefboom of een omloopschijf is dan nodig.

Op de gegeven wijze is een omgekeerde slinger te stabiliseren. Spoorbomen en masten worden doorgaans met een massa gestabiliseerd, maar kunnen ook met een veer gestabiliseerd worden. Tekentafels werden vroeger altijd met een massa gestabiliseerd; tegenwoordig bijna steeds met een veer. Zowel met een veer als met een contragewicht is een indifferent systeem bereikbaar.

4.5.3. Stabiliseren met wrijving

Bij de aanwezigheid van wrijving wijzigt een systeem in de richting van een indifferent systeem. Dat bleek reeds bij de windvaan, besproken in voorbeeld 4.2. Indien veel wrijving aanwezig is kan de vaan nog wel verستeld worden; maar blijft hij wel staan in de richting waarin hij is achtergelaten. In het systeem is wel een terugstelkracht aanwezig, maar die is onvoldoende groot om het systeem tegen de wrijvingskracht in te kunnen terugstellen. Dat is dus een voorbeeld van een stabiel systeem dat door wrijving een indifferent gedrag krijgt.

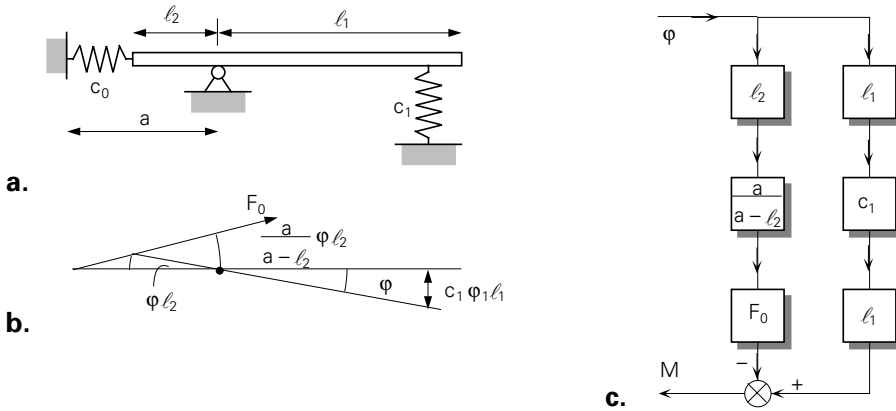
Instabiele systemen worden door wrijving gestabiliseerd, ook zij tenderen naar een indifferent gedrag. Een lichaam dat op een hellend vlak rust, is zonder wrijving een instabiel systeem. Bij voldoende wrijving wordt het systeem indifferent. Dat geldt ook voor de omgekeerde slinger en vele andere mechanische instabiele systemen. Verstelbare ornamenten en apparaten behouden veelal hun ingestelde positie dankzij wrijving in de verstelpunten. Bij een aantal uitvoeringen is wrijving aangebracht als aanvulling op een gebrekkige veercompensatie. Stabilisatie door wrijving is een eenvoudige en goedkope manier. Om die reden wordt het (te) veel toegepast.

4.6. Indifferente systemen

In § 4.5.1. is de zwaartekrachtwerking van een massa gestabiliseerd door een andere massa. In § 4.5.2 is hetzelfde geschied door een veer. Afgeleid is dat de veer dan aan voorwaarden moet voldoen. Zowel aan de voorspanning als aan de veerstijfheid zijn minimum eisen gesteld voor het bereiken van stabiliteit. De minimum eisen zijn steeds de overgang tussen de stabiele en de instabiele systemen. Daar bevinden zich de indifferente systemen.

Een indifferent systeem heeft een bijzondere betekenis. Dat komt goed naar voren bij de stabilisering van een omgekeerde slinger. Als de stabilisatie is uitgevoerd door een massa, vindt energieuitwisseling plaats tussen de massa van de omgekeerde slinger en de stabiliteitsmassa. Bij elke uitwijking van de slinger gaat potentiële energie van de slinger over in potentiële energie van de stabiliteits-massa. Bij het terugkeren in de nulpositie gebeurt het omgekeerde. De energie-uitwisseling is perfect als geen kracht nodig is om een uitwijking te bewerkstelligen. Als geen kracht nodig is voor het verkrijgen van een uitwijking, neemt het systeem geen ingangsenegie op. Dat wil zeggen: het systeem is indifferent.

Ook bij stabilisatie van een omgekeerde slinger met een veer treedt energie-uitwisseling op. De potentiële energie die de slinger massa bij uitwijken afstaat wordt in de veer opgeslagen in de vorm van elastische energie. Bij terugkeer in de nulpositie wordt elastische energie van de veer gebruikt om de slinger massa omhoog te brengen. Energie-uitwisseling kan ook tussen twee veren geschieden. Eén veer ontspant en geeft elastische energie af. Die energie wordt toegevoerd aan een andere veer die daarmee wordt gespannen. Dit is toegelicht aan de hand van figuur 4.30.

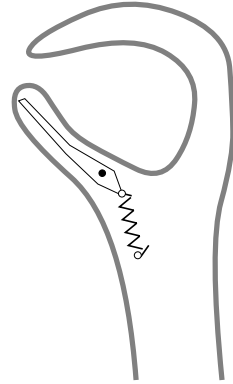


Figuur 4.30. Een hefboom is belast met een axiale veer c_0 en met een tangentiële veer c_1 . De axiale veer heeft een kleine veerstijfheid en levert een constante kracht F_0 . De tangentiële veer levert in de nulpositie geen kracht. In b zijn de optredende veerkrachten getekend. Uit het blokschema van c is de voorwaarde voor indifferentie af te leiden.

De hefboom van figuur 4.30.a is axiaal belast met de kracht van een drukveer. Die veer is voorgespannen met een kracht F_0 . De stijfheid van de veer is klein verondersteld, zodat de kracht F_0 constant mag worden verondersteld. Indien de kracht F_0 precies door het draaipunt van de hefboom gaat, wordt geen draaiend moment op de hefboom uitgeoefend. Deze stand van de hefboom wordt als nulpositie beschouwd. Bij een kleine uitwijking φ vanuit de nulpositie oefent de axiale veer een moment M_{φ_2} op de hefboom uit ter grootte: $M_{\varphi_2} = F_0 \varphi a l_2 / (a - l_2)$. Op de hefboom kan ook een tangentiële gerichte kracht van de veer met veerstijfheid c_1 werken. Als de hefboom in de nulpositie staat is de tangentiële veer juist ongespannen. Bij een hoekverdraaiing φ van de hefboom wordt de tangentiële veer een afstand φl_1 ingedrukt en oefent dan een moment $M_{\varphi_1} = c_1 \varphi l_1^2$ op de hefboom uit. De momenten M_{φ_1} en M_{φ_2} zijn tegengesteld gericht. Als $M_{\varphi_1} = M_{\varphi_2}$, dus als $l_1 c_1 = l_2 F_0 a / (a - l_2)$ ontstaat een indifferent systeem. Dat is verduidelijkt in figuur 4.30.c.

Het indifferent maken van een systeem is bijvoorbeeld toe te passen bij de vingers van kunsthanden. De beweging van de vingers (vooral van de duim) wordt hinderlijk belast door de elastische krachten van de cosmetische handschoen. Voor het bewegen van de vingers is dan ongewenst veel energie benodigd. Dat is te voorkomen door het

toevoegen van een extra veer. Zie figuur 4.31. Bij een goed ontwerp ontstaat een indifferent systeem. Er is dan geen bedieningsenergie benodigd. Bij het openen van de hand ontspant de extra toegevoegde veer. De daarbij vrijkomende veerenergie wordt gebruikt voor het overwinnen van de elastische krachten van de handschoen. Bij het sluiten van de hand worden in de handschoen opgeslagen elastische krachten gebruikt om de toegevoegde veer weer te spannen.



Figuur 4.31. De duimbeweging van een kunsthand worden tegengewerkt door de veerwerking van de cosmetische handschoen. Het toevoegen van een extra veer maakt het systeem indifferent. Voor het bewegen van de duim is dan geen energie benodigd.

4.7. Overzicht

Een lichaam in de ruimte heeft in principe zes vrijheidsgraden: drie translaties en drie rotaties. Voor totale stabiliteit moet aan de stabiliteitsvoorwaarde voor elke vrijheidsgraad worden voldaan.

Een lichaam kan stabiel en instabiel zijn opgesteld,

maar ook indifferent. De indifferente systemen zijn op te vatten als het grensgeval tussen de stabiele en instabiele systemen in.

Bij het onderzoek naar de stabiliteit is de verplaatsing als onafhankelijk ingangssignaal te kiezen. Indien aan een systeem een uitwijking (translatie of rotatie) wordt toegevoerd, en als daarvoor op het systeem een kracht of moment in dezelfde richting moet worden uitgeoefend, dan is dat systeem stabiel. Als deze uit te oefenen kracht of moment negatief is, (een verdere uitwijking van het systeem moet worden tegengewerkt) dan is het systeem instabiel. Is geen kracht of moment nodig dan is het systeem indifferent.

Veel aandacht is gegeven aan de stabiliteit van vaartuigen en voertuigen. Van beide bleek de statische stabiliteit al zeer complex. Hier bleek ook dat de stabiliteiten van de verschillende vrijheidsgraden elkaar beïnvloeden.

In de paragrafen 4.5 en 4.6 zijn mogelijke beïnvloedingen van de stabiliteit nader onderzocht. De extra mogelijkheden zijn belicht die ontstaan wanneer een systeem indifferent gemaakt wordt.