

9 De invloed van de opbouw van een laminaat

9.1. Bijzondere stijfheidseffecten

Uit de formulering (8.16) van de wet van Hooke voor laminaten is af te lezen, dat er bij een willekeurige opbouw van het laminaat twee soorten koppeling ontstaan: enerzijds tussen de normaal- en schuifkrachten in het (midden)vlak, $\{N\}$, en vervormingen loodrecht op het vlak, $\{\kappa^0\}$, en anderzijds tussen buigende en wringende momenten, $\{M\}$, en vervormingen in het (midden)vlak van het laminaat, $\{\varepsilon^0\}$. Deze koppeling die wordt beheerst door de koppelmatrix $[B]$, komt bij isotrope platen niet voor. Twee voorbeelden ter illustratie.

- Een laminaat bestaat uit twee identieke u.d. lamellen, waarvan de vezelrichtingen een hoek, 2ϑ , met elkaar maken. Een strip uit dit laminaat met de lengterichting in de richting van de bissectrice van genoemde hoek wordt in zijn lengterichting getrokken; het laminaat is dan te coderen met $[\vartheta / -\vartheta]$. Als de matrix heel slap is in vergelijking met de vezels, zullen de vezels alleen in hun lengterichting een trekkracht ondervinden en kunnen de spanningen in de matrix worden verwaarloosd. De trekkrachten in de vezels kunnen worden ontbonden in een axiale component in de lengterichting van de strip en een tangentiële component (zie fig. 9.1). De axiale componenten zijn in evenwicht met de uitwendige belasting. De tangentiële componenten vormen een wringend moment. Als de uiteinden van de strip ongehinderd kunnen roteren, zal de strip torderen onder invloed van de trekkracht. Als de klemmerichting de strip verhindert te torderen, zal er een wringend moment op de klemmen worden uitgeoefend.

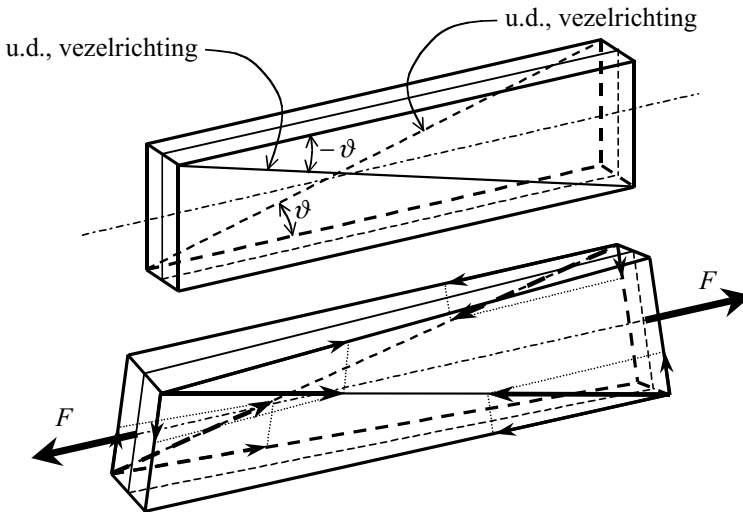


Fig. 9.1. Een strip uit een tweelamellig angle-ply laminaat $[\vartheta / -\vartheta]$ in bissectricerichting wordt in die richting getrokken en vertoont daardoor de neiging om te torderen om die as.

- a. Een ander laminaat bestaat uit twee identieke u.d. lamellen, waarvan de vezels loodrecht op elkaar staan. Ook hieruit wordt een strip gezaagd en getrokken. De lengterichting van deze strip valt samen met een van de vezelrichtingen: $[0/90]$. De lamel die in vezelrichting wordt belast is in de trekrichting veel stijver dan de lamel die dwars op de vezels wordt belast. Bij dezelfde rek in trekrichting zal er in de eerste lamel een veel hogere spanning worden opgeroepen dan in de andere lamel. Als nu de trekkracht in het middenvlak van het laminaat aangrijpt, zal er met dit spanningsverschil een buigend moment gepaard gaan dat een buigkromming veroorzaakt (zie fig. 9.2).

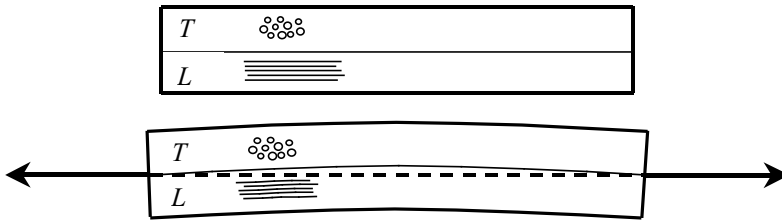


Fig. 9.2. Een tweelamellig cross-ply laminaat $[0/90]$ vertoont buiging bij trek in een van de vezelrichtingen.

Naast deze majeure koppel-effecten die worden veroorzaakt door koppelmatrix $[B]$, zijn er ook nog mineure koppel-effecten die eveneens niet bij een isotrope plaat optreden en worden veroorzaakt door het ongelijk nul zijn van A_{16} , A_{26} , D_{16} en D_{26} . Fig. 9.3 laat de verschillende effecten zien. Hierin zijn ze gerelateerd aan de laminaatcomplianties $[a, b; b^T, d] = [A, B; B, D]^{-1}$, omdat de bijzondere vervormingen die door één belastingscomponent worden veroorzaakt steeds worden bepaald door één compliantie, en wel grotendeels maar niet uitsluitend door één stijfheid.

De koppel-effecten maken het gedrag van een laminaat gecompliceerd. Voor de ontwerper én het ontwerp is het gewoonlijk handzamer, dat de *koppelmatrix nul* is. Uit (8.19) blijkt dat in dat geval geldt:

$$[B] = [0] \rightarrow [a] = [A]^{-1}; [b] = [0]; [d] = [D]^{-1}. \quad (9.1)$$

Deze *ontkoppeling* is destemeer gewenst om te voorkomen, dat er ten gevolge van thermische uitzetting of krimp naast vlakke deformatie ook nog buiging en/of torsie optreedt.

Beschouw de koppelstijfheden van een laminaat met *orthotrope lamellen*:

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2). \quad (8.14)$$

Neem twee identieke lamellen, geef deze dezelfde oriëntatie en leg ze in het laminaat aan weerskanten van het middenvlak op gelijke afstand van dat vlak. Zie fig. 9.4. De gereduceerde stijfheidsconstanten zijn dan gelijk en de weegfactoren in B_{ij} zijn even groot in absolute zin, maar tegengesteld van teken.

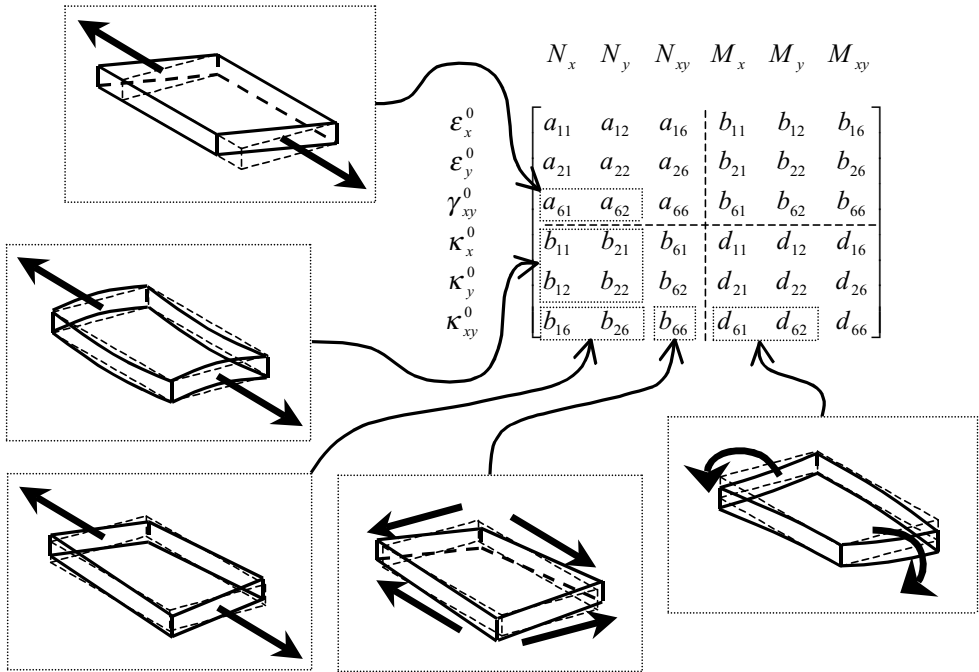


Fig. 9.3. Mogelijke koppel­effecten bij belasting van een laminaat: verwijzing naar de laminaatcomplianties die voor een bepaald effect verantwoordelijk zijn. De voorbeeld-laminaten hebben in het algemeen een verschillende opbouw.

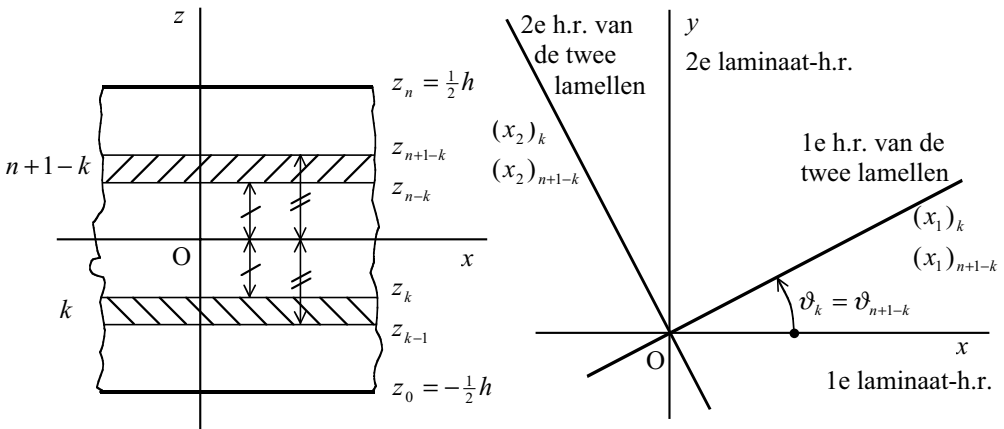


Fig. 9.4. Twee identieke orthotrope lamellen die symmetrisch ten opzichte van het middenvlak (xy -vlak) liggen (spiegelsymmetrie), waardoor hun bijdragen aan koppelmatrix $[B]$ tegen elkaar wegvallen.

Stel dat deze lamellen het rangnummer k respectievelijk $n+1-k$ hebben. Dan geldt voor de gereduceerde stijfheidsconstanten en de grenscoördinaten:

$$(Q'_{ij})_k = (Q'_{ij})_{n+1-k};$$

$$z_{n-k} = -z_k; \quad z_{n+1-k} = -z_{k-1} \rightarrow z_{n+1-k}^2 - z_{n-k}^2 = -(z_k^2 - z_{k-1}^2).$$

De bijdragen van beide lamellen tot B_{ij} heffen elkaar op.

Als regel kan dus worden gesteld:

Indien het laminaat symmetrisch ten opzichte van het middenvlak wordt opgebouwd, dan is het laminaat geheel te verdelen in paren lamellen die elkaars spiegelbeeld zijn ten opzichte van het middenvlak en vallen zodoende alle bijdragen tot B_{ij} paarsgewijs weg: $[B] = [0]$ en dus ook $[b] = [0]$.

Voorbeelden: $[\vartheta / -\vartheta / -\vartheta / \vartheta] \equiv [\vartheta / -\vartheta]_s$, $[\vartheta_I / \vartheta_{II} / \vartheta_{II} / \vartheta_I]$, $[\vartheta / 0 / 90 / \vartheta]$.

De term $0/90$ in het laatste voorbeeld betekent: naar keuze 0° of 90° .

Omdat er is uitgegaan van orthotrope lamellen, is het middenvlak van zo'n lamel ook symmetrievlak. Het laminaat kan dus aan de symmetrische opbouw voldoen ook als het een oneven aantal lamellen heeft. Het middenvlak van de middelste lamel valt dan samen met het middenvlak van het laminaat.

Voorbeelden: $[\vartheta / -\vartheta / \vartheta]$, $[\vartheta_I / \vartheta_{II} / \vartheta_I]$.

N.B. Niet alle in de praktijk toegepaste lagen zijn orthotrop, bijvoorbeeld versterkt met een weefsel met een satijnbinding. Hierop wordt verderop nog nader ingegaan.

In de vlakstijfheidsmatrix $[A]$ van een laminaat valt op, dat in het algemeen de termen A_{16} en A_{26} ongelijk nul zijn, terwijl ze bij isotrope platen altijd nul zijn. Voor een symmetrisch laminaat volgt uit $A_{16} = A_{26} = 0$, dat ook $a_{16} = a_{26} = 0$.

Beschouw

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (8.13)$$

nader. De weegfactor $z_k - z_{k-1}$ is de lameldikte, is dus altijd positief.

Omdat $\cos \vartheta$ een even functie is, dat wil zeggen dat $\cos(-\vartheta) = \cos \vartheta$, en $\sin \vartheta$ een oneven functie, d.w.z. $\sin(-\vartheta) = -\sin \vartheta$, blijkt uit (8.9) dat voor *orthotrope lamellen* zowel Q'_{16} als Q'_{26} oneven is:

$$Q'_{16}(-\vartheta) = -Q'_{16}(\vartheta); \quad Q'_{26}(-\vartheta) = -Q'_{26}(\vartheta).$$

Ligt dus van een tweetal identieke orthotrope lamellen in het laminaat de een onder een oriëntatiehoek ϑ en de ander onder een oriëntatiehoek $-\vartheta$, dan vallen hun bijdragen tot A_{16} en A_{26} tegen elkaar weg. Zie fig. 9.5.

Indien een laminaat is opgebouwd uit paren identieke orthotrope lamellen, waarvan de oriëntaties elkaars spiegelbeeld zijn ten opzichte van de laminaat-hoofdrichtingen, dan is $A_{16} = A_{26} = 0$. Indien het laminaat tevens symmetrisch is, dan is $a_{16} = a_{26} = 0$ en gedraagt het laminaat zich in zijn vlak orthotrop.

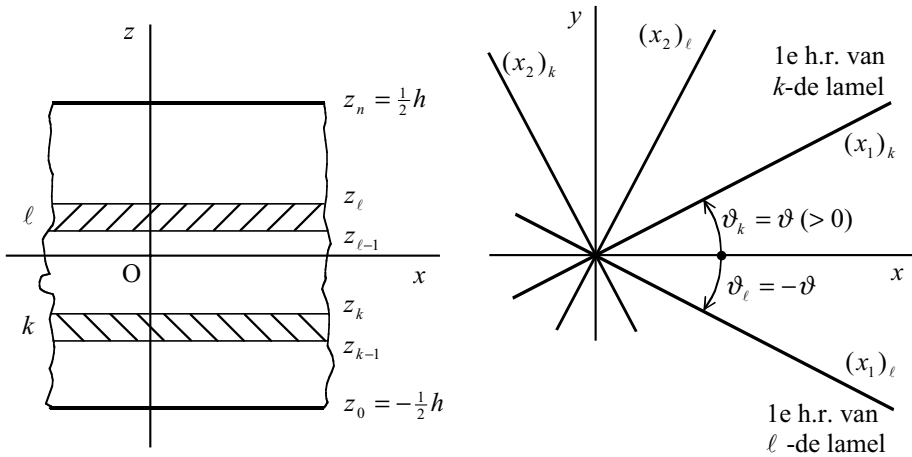


Fig. 9.5. Een paar identieke lamellen met in absolute grootte gelijke maar in zin tegengestelde oriëntatiehoek levert geen bijdrage aan de laminaatstijfheden A_{16} en A_{26} .

Voorbeelden:

Voor $[\vartheta / -\vartheta]$, $[\vartheta_I / -\vartheta_{II} / \vartheta_{II} / -\vartheta_I]$ is $A_{16} = A_{26} = 0$, maar $a_{16} \neq 0, a_{26} \neq 0$.

Voor $[\vartheta / -\vartheta]_s$, $[\vartheta_I / -\vartheta_{II} / \vartheta_{II} / -\vartheta_I]_s$ zijn $A_{16} = A_{26} = 0$ en $a_{16} = a_{26} = 0$.

Let wel: de orthotropie ten aanzien van $[A]$ of $[a]$ geldt ten opzichte van de laminaat-hoofdrichtingen! Bij transformatie in de vorm van rotatie in het vlak van het laminaat vult de rekstijfheidsmatrix $[A']$ respectievelijk rekcompliantiematrix $[a']$ zich geheel op.

Bij de buigstijfheden valt evenzo op, dat in het algemeen D_{16} en D_{26} ongelijk nul zijn, terwijl ze voor isotrope platen altijd nul zijn.

Beschouw:

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3). \tag{8.15}$$

De weegfactoren zijn steeds positief. Twee identieke orthotrope lamellen die aan weerskanten van het middenvlak op gelijke afstand ervan liggen, hebben dezelfde weegfactor. Stel dat deze lamellen het rangnummer k respectievelijk $n + 1 - k$ hebben.

Steeds is: $z_{n+1-k}^3 - z_{n-k}^3 = z_k^3 - z_{k-1}^3 > 0$.

Hebben ze nu een spiegelbeeldige ligging ten opzichte van de laminaat-hoofdrichtingen (fig. 9.6), bijvoorbeeld onder de hoeken ϑ en $-\vartheta$, dan vallen hun bijdragen tot

D_{16} en D_{26} tegen elkaar weg. Immers:

$$Q'_{16}(-\vartheta) = -Q'_{16}(\vartheta); \quad Q'_{26}(-\vartheta) = -Q'_{26}(\vartheta).$$

Deze twee lamellen liggen nu niet symmetrisch ten opzichte van elkaar, maar *antisymmetrisch*. Het hele laminaat kan op een dergelijke manier worden gestapeld.

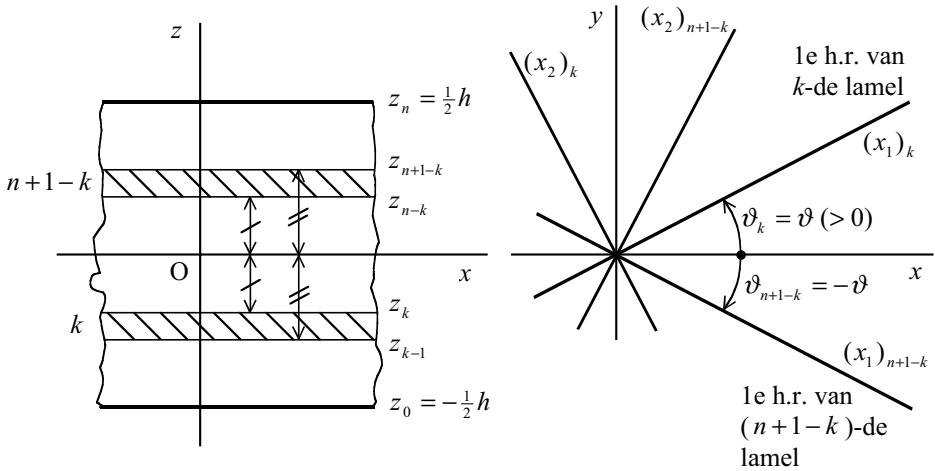


Fig. 9.6. Een paar identieke lamellen met in absolute grootte gelijke maar in zin tegengestelde oriëntatiehoek op gelijke afstand van het middenvlak levert geen bijdrage aan de laminaatbuigstijfheden D_{16} en D_{26} .

Indien een laminaat geheel is opgebouwd uit paren orthotrope lamellen die identiek zijn en antisymmetrisch liggen ten opzichte van het middenvlak van het laminaat, dan is $D_{16} = D_{26} = 0$.

Voorbeelden: $[\vartheta / -\vartheta]$, $[\vartheta_I / -\vartheta_{II} / \vartheta_{III} / -\vartheta_I]$.

Ook deze eigenschap geldt alleen ten opzichte van de laminaat-hoofdrichtingen. Maar bovendien is deze stapelwijze niet te combineren met een symmetrische opbouw om ontkoppeling ten aanzien van $[B]$ te bewerkstelligen! En dan volgt uit de inversie (8.19) dat in het algemeen ook niet wordt voldaan aan $d_{16} = d_{26} = 0$. Het belang van deze nulstelling is niet groot, zodat er in de praktijk weinig aandacht aan zal worden geschonken. Wel kan de grootte van D_{16} en D_{26} worden beperkt door vele dunne lamellen te gebruiken met in de stapelvolgorde een sterk variërende oriëntatie. Zo zijn de buigstijfheden D_{16} en D_{26} van het laminaat $[\vartheta / -\vartheta / \vartheta / -\vartheta]_s$ kleiner dan die van het even dikke laminaat $[\vartheta_2 / -\vartheta_2]_s$.

9.2. De verschuivingstelling

Om de invloed van de opbouw van het laminaat op het gedrag ervan te begrijpen, is het nuttig de consequenties van de verschuivingstelling voor deze situaties na te gaan. Deze theorie sluit aan bij de plaattheorie in 8.1 en de laminatentheorie in 8.2. Er wordt door verschuiving van het middenvlak van het laminaat in negatieve z-richting over een afstand a een nieuw assenstelsel $x^a y^a z^a$ verkregen (zie fig. 9.7):

$$x^a = x, \quad y^a = y, \quad z^a = z + a. \tag{9.2}$$

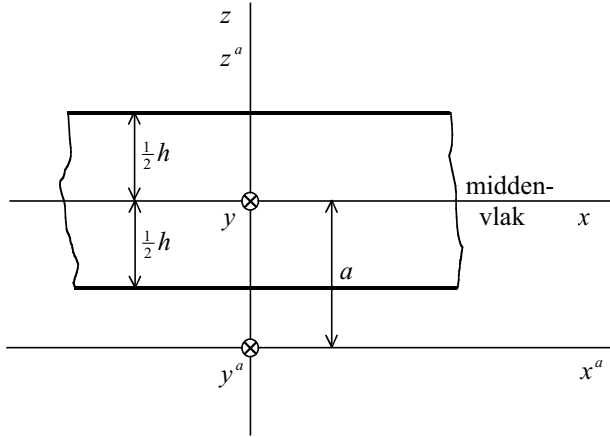


Fig. 9.7. De verschuivingstelling: de kracht- en momentresultanten worden in plaats van op het middenvlak van het laminaat betrokken op een vlak dat over een afstand a (>0) is verschoven in de negatieve z -richting.

De belastingscomponenten in (8.4) en (8.12) zijn betrokken op het xyz -stelsel met middenvlak als coördinatenvlak. Ze worden nu betrokken op het nieuwe stelsel, en ter herkenning voorzien van superscript a :

$$\{N^a\} = \int_{a-\frac{1}{2}h}^{a+\frac{1}{2}h} \{\sigma'\} dz^a = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \{\sigma'\} dz = \{N\};$$

$$\{M^a\} = \int_{a-\frac{1}{2}h}^{a+\frac{1}{2}h} \{\sigma'\} z^a dz^a = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \{\sigma'\} (z+a) dz = \{M\} + a\{N\}.$$

Het accent bij de spanningen herinnert er aan, dat de spanningen betrokken zijn op de hoofdrichtingen van het laminaat en niet op die van de afzonderlijke lamellen.

De vervormingen – rekken en krommingen – van het $x^a y^a$ -vlak worden eveneens met superscript a aangeduid. Voor de overige vervormingen geldt dan conform (8.10):

$$\{\varepsilon'\} = \{\varepsilon^a\} + z^a \{\kappa^a\}.$$

De bijbehorende spanningen volgen uit:

$$\{\sigma'\} = [Q']\{\varepsilon'\} = [Q']\{\varepsilon^a\} + z^a [Q']\{\kappa^a\} = [Q']\{\varepsilon^a\} + (z+a)[Q']\{\kappa^a\}.$$

Substitutie in de formules voor de kracht- en momentresultanten levert, samengevat:

$$\{N^a\} = [A^a]\{\varepsilon^a\} + [B^a]\{\kappa^a\}; \tag{9.3}$$

$$\{M^a\} = [B^a]\{\varepsilon^a\} + [D^a]\{\kappa^a\}.$$

Met:

$$A_{ij}^a = A_{ij};$$

$$B_{ij}^a = B_{ij} + a A_{ij}; \tag{9.4}$$

$$D_{ij}^a = D_{ij} + 2a B_{ij} + a^2 A_{ij}.$$

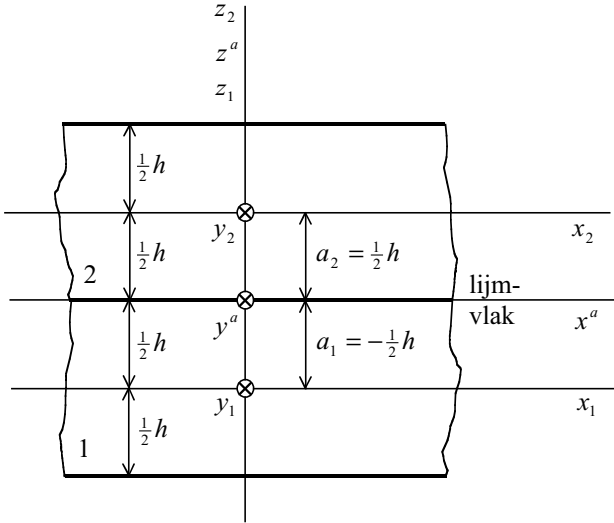


Fig. 9.8.
Toepassing van de
verschuivingstelling:
twee identieke
laminaten worden
met dezelfde oriëntatie
op elkaar gelijmd.

Ter illustratie het volgende voorbeeld. Een laminaat wordt vervaardigd door twee identieke laminaten met dezelfde oriëntatie op elkaar te lijmen. Zie fig. 9.8. Van het enkele laminaat zijn dikte h en stijfheidsmatrix $[A; B; B; D]$ gegeven. De stijfheidsmatrix van het dubbele laminaat wordt daaruit berekend door verschuiving naar het nieuwe middenvlak (het lijmvlak), en wel voor het ene laminaat (nr. 1) over $-\frac{1}{2}h$ en voor het andere (nr. 2) over $+\frac{1}{2}h$.

$$[A]_{dubbel} = [A^a]_1 + [A^a]_2 = 2[A];$$

$$[B]_{dubbel} = [B^a]_1 + [B^a]_2 = [B] - \frac{1}{2}h[A] + [B] + \frac{1}{2}h[A] = 2[B];$$

$$\begin{aligned} [D]_{dubbel} &= [D^a]_1 + [D^a]_2 = [D] - h[B] + \frac{1}{4}h^2[A] + [D] + h[B] + \frac{1}{4}h^2[A] = \\ &= 2[D] + \frac{1}{2}h^2[A]. \end{aligned}$$

Daaruit blijkt, dat, indien het enkele laminaat een koppelmatrix $[B]=0$ heeft, ditzelfde ook geldt voor het dubbele laminaat, ongeacht de wijze waarop $[B]=0$ voor het enkele laminaat tot stand is gekomen.

9.3. Bijzondere opbouw van laminaten

Een laminaat is opgebouwd uit n identieke orthotrope lamellen met dikte t (fig. 8.5).

$$z_k = -\frac{1}{2}h + kt = -\frac{1}{2}nt + kt, \quad k = 1(1)n. \quad (9.5)$$

Met rangnummer k is de positie van het middenvlak van de k -de lamel bepaald. De z -coördinaat van het middenvlak van de k -de lamel wordt symbolisch aangeduid met

$$z_{k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(z_k + z_{k-1}) = \frac{1}{2}(2k - n - 1)t \equiv p_k t,$$

waarin *positiefactor* p_k van de k -de lamel is gedefinieerd als

$$p_k = k - \frac{1}{2}(n+1) \rightarrow \sum_{k=1}^n p_k = 0. \quad (9.6)$$

De stapelvolgorde is niet van invloed op $[A]$, maar wel op $[B]$ en $[D]$. Uitwerking van de respectieve weegfactoren levert:

$$\frac{1}{2}(z_k^2 - z_{k-1}^2) = \frac{1}{2}(z_k + z_{k-1})(z_k - z_{k-1}) = p_k t^2;$$

$$\frac{1}{3}(z_k^3 - z_{k-1}^3) = \frac{1}{12}(1 + 12 p_k^2) t^3.$$

Dus voor een laminaat van identieke orthotrope lamellen – in de literatuur wel regelmatig (Eng. *regular*) genoemd – geldt:

$$A_{ij} = t \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k;$$

$$B_{ij} = t^2 \sum_{k=1}^n p_k (Q'_{ij})_k;$$

$$D_{ij} = \frac{1}{12} t^3 \sum_{k=1}^n (1 + 12 p_k^2) (Q'_{ij})_k. \quad (9.7)$$

Dit resultaat wordt hierna voor diverse configuraties gebruikt.

Angle-ply en cross-ply laminaten

Angle-ply laminaten zijn in hun eenvoudigste vorm laminaten van identieke orthotrope lamellen, waarvan een deel een oriëntatie ϑ heeft en de rest oriëntatie $-\vartheta$. Ze zijn dan ook regelmatig. Voor de gereduceerde stijfheidsconstanten van orthotrope lamellen in de laminaat-hoofdrichtingen geldt volgens (8.9):

$$Q'_{ij}(-\vartheta) = Q'_{ij}(\vartheta) \quad \text{voor} \quad ij = 11, 12, 22, 66;$$

$$Q'_{ij}(-\vartheta) = -Q'_{ij}(\vartheta) \quad \text{voor} \quad ij = 16, 26. \quad (9.8)$$

Indien *in beide richtingen een gelijk aantal lamellen ligt*, zal, zoals uit (9.7) blijkt:

$$A_{ij} = n t Q'_{ij}(\vartheta) \quad \text{voor} \quad ij = 11, 12, 22, 66;$$

$$A_{16} = A_{26} = 0. \quad (9.9)$$

Er is dan sprake van orthotropie ten aanzien van $[A]$.

Voorbeelden: $[\vartheta / -\vartheta]$, $[\vartheta_I / -\vartheta_{II} / \vartheta_{II} / -\vartheta_I]$, $[(\vartheta / -\vartheta)_{\frac{1}{2}n}]$.

Daarmee zijn de koppeleffecten nog niet voorkomen.

Als de orthotrope lamellen alleen in 0° - en 90° -richting liggen, wordt van een *cross-ply laminaat* gesproken. Daarvoor geldt altijd: $A_{16} = A_{26} = 0$ ten opzichte van 0° - en 90° -richting.

Orthotrope laminaatopbouw

Orthotropie veronderstelt een lineair elastisch gedrag dat symmetrie vertoont ten opzichte van drie onderling loodrechte vlakken.

Een regelmatig angle-ply laminaat met een gelijk aantal lamellen in beide richtingen vertoont dit wel ten aanzien van de vlakstijfheden $[A]$, maar niet automatisch ten aanzien van de koppelstijfheden $[B]$; symmetrische opbouw is daarvoor de eenvoudigste remedie. Want uit (9.7) volgt:

$$B_{ij} = t^2 Q'_{ij}(\vartheta) \sum_{k=1}^n p_k = 0 \quad \text{voor} \quad ij = 11, 12, 22, 66 ;$$

$$B_{ij} = t^2 Q'_{ij}(\vartheta) \left\{ \sum_{\vartheta} p_k - \sum_{-\vartheta} p_k \right\} \quad \text{voor} \quad ij = 16, 26 .$$

De laatste sommaties zijn respectievelijk over de lamellen met oriëntatie ϑ en de lamellen met oriëntatie $-\vartheta$. Om te bewerkstelligen dat ook $B_{16} = B_{26} = 0$, moet:

$$\sum_{\vartheta} p_k = \sum_{-\vartheta} p_k \rightarrow \sum_{\vartheta} k = \sum_{-\vartheta} k. \quad (9.10)$$

De laatste gelijkheid volgt uit (9.6), omdat de aantallen lamellen in beide richtingen aan elkaar gelijk zijn.

De som van de rangnummers van de lamellen met oriëntatie ϑ moet dus gelijk zijn aan die met oriëntatie $-\vartheta$. Daaraan wordt voldaan, als het laminaat *symmetrisch* (ten opzichte van het middenvlak) is opgebouwd. Dan geldt altijd: $B(0) = 0$.

Voorbeelden: $[\vartheta / -\vartheta]_s$, $[(\vartheta / -\vartheta)_{\frac{1}{4}n} / (-\vartheta / \vartheta)_{\frac{1}{4}n}] \equiv [(\vartheta / -\vartheta)_{\frac{1}{4}n}]_s$.

Maar er zijn ook andere volgordes mogelijk, die voldoen.

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} & [\vartheta / -\vartheta / -\vartheta / \vartheta / -\vartheta / \vartheta / \vartheta / -\vartheta] \\ k = & \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \\ \sum_{\vartheta} k = & \quad 1 \quad + \quad 4 \quad + \quad 6 + 7 \quad = 18 \\ \sum_{-\vartheta} k = & \quad 2 + 3 \quad + \quad 5 \quad + \quad 8 = 18 \end{aligned}$$

Een angle-ply laminaat met orthotropie ten aanzien van $[A]$ kan worden uitgebreid met orthotrope lamellen in 0° -richting en/of 90° -richting en toch blijven voldoen aan deze orthotropie, want voor die toegevoegde lamellen geldt:

$$Q'_{16}(0) = Q'_{26}(0) = 0; \quad Q'_{16}(90) = Q'_{26}(90) = 0.$$

De bijdragen tot A_{16} en A_{26} zijn dus nul.

Voorbeelden: $[0 / \vartheta / -\vartheta]$; $[\vartheta / 90 / -\vartheta]$.

Maar deze stapelingen zijn niet zo geschikt, omdat ze wel last hebben van koppel-effecten. Een symmetrische opbouw kan dat voorkomen.

Voorbeelden:

$$[\vartheta / -\vartheta / 0 / 90 / -\vartheta / \vartheta]; \quad [0 / \vartheta / -\vartheta / 90 / -\vartheta / \vartheta / 0]; \quad [\vartheta / -\vartheta / -\vartheta / 0 / 90 / \vartheta / 0 / 90]_s.$$

In het eerste voorbeeld is voor de kernlamel de keuze voor 0° - of 90° -richting vrij. In het tweede kunnen de 0° -lamellen alleen tegelijk door 90° -lamellen worden vervangen. De stijfheidseigenschappen en de dikte van de lamellen in 0° - en/of 90° -richting mogen zelfs verschillen van die van de angle plies. Ga dit na. En controleer tevens het derde voorbeeld.

Voor een *cross-ply laminaat* geldt altijd: $A_{16} = A_{26} = 0$, mits de laminaat-hoofdrichtingen samenvallen met de vezelrichtingen. Maar om de kopleffecten te vermijden, is ook hier een symmetrische opbouw de oplossing.

Voorbeelden: $[0/90/0]$; $[0/90]_s$.

In deze voorbeelden hoeven de lamellen in 0° -richting niet identiek te zijn aan die in 90° -richting. Ga dit na.

Voor een *cross-ply laminaat* met evenveel vezelmateriaal in beide vezelrichtingen, zoals bijvoorbeeld $[0/90]$ en $[0/90]_s$, zijn de vlakstijfheden, betrokken op de vezelrichtingen:

$$\frac{A_{11}}{h} = \frac{A_{22}}{h} = \frac{1}{2}(Q_{11} + Q_{22}); \quad \frac{A_{12}}{h} = Q_{12}; \quad \frac{A_{66}}{h} = Q_{66}; \quad A_{16} = A_{26} = 0.$$

Transformatie van A_{ij} verloopt op de zelfde wijze als die van Q_{ij} . Bij rotatie om de z -as over een hoek φ , dus in het xy -vlak, volgt voor de vlakstijfheid A'_{11} uit (3.14):

$$A'_{11} = \cos^4 \varphi A_{11} + \sin^4 \varphi A_{22} + 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi (A_{12} + 2A_{66}).$$

Met (a) uit par. 3.3:

$$\frac{A'_{11}}{h} = \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) + \frac{1}{8} \cos 4\varphi (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}).$$

Vlakstijfheid A'_{11} blijkt hier richtingsafhankelijk te zijn. In de praktijk is de stijfheid in bissectricerichting aanzienlijk kleiner dan die in de vezelrichtingen (zie ter illustratie fig. 9.9).

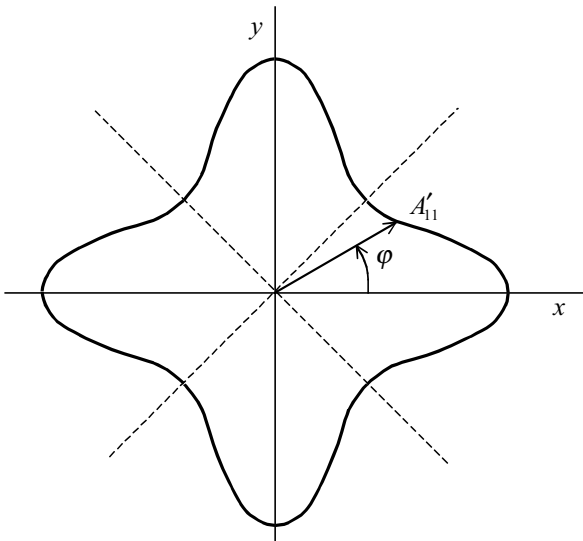


Fig. 9.9.
De vlakstijfheid A'_{11} van een *cross-ply laminaat* met evenveel vezelmateriaal in beide vezelrichtingen, radiaal uitgezet tegen de rotatiehoek φ .

Quasi-isotrope laminaatopbouw

Een laminaat kan zo worden opgebouwd, dat de stijfheidseigenschappen in zijn vlak richtingsonafhankelijk zijn. Het laminaat is dan quasi-isotroop ten aanzien van $[A]$, oftewel quasi-isotroop in zijn vlak. Er zijn, evenals bij isotroop materiaal, nog slechts 2 o.o. stijfheidsconstanten, en het verband tussen de vlakstijfheden A_{ij} is als volgt te formuleren (zie formule (a) in par. 3.1):

$$A_{11} = A_{22}; \quad A_{66} = \frac{1}{2}(A_{11} - A_{12}); \quad A_{16} = A_{26} = 0. \quad (9.11)$$

Bij transformatie in de vorm van rotatie in het (midden)vlak verandert dan de vlakstijfheidsmatrix $[A]$ niet, is zogenaamd invariant ten aanzien van deze transformatie.

Stel dat een laminaat is opgebouwd uit r (≥ 3) identieke orthotrope lamellen die alle een verschillende oriëntatie hebben en dat deze r richtingen oriëntatiehoeken (in radialen) hebben die voldoen aan:

$$\vartheta_m = m \frac{\pi}{r}; \quad m = 1, 2, \dots, r; \quad r \geq 3.$$

Dan kan worden aangetoond, dat

$$A_{ij} = \frac{h}{r} \sum_{m=1}^r (Q'_{ij})_m$$

voldoet aan (9.11), dus invariant is ten aanzien van rotatie in het (midden)vlak. Bij de bewijsvoering met behulp van de transformatieformules (3.24) wordt gebruikgemaakt van de goniometrische reeksen

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos rx = \frac{\sin(r + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}; \quad x \neq 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$$

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin rx = \frac{\sin(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2})x \sin \frac{1}{2}rx}{\sin \frac{1}{2}x}; \quad x \neq 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$$

Dit leidt tot:

$$\sum_{m=1}^r \cos 2m \frac{\pi}{r} = \sum_{m=1}^r \sin 2m \frac{\pi}{r} = 0; \quad \sum_{m=1}^r \cos 4m \frac{\pi}{r} = \sum_{m=1}^r \sin 4m \frac{\pi}{r} = 0; \quad r \geq 3.$$

Voorbeelden: $[0/60/-60]$, $[0/45/-45/90]$, $[0/36/72/108/144]$. Zie fig. 9.10.

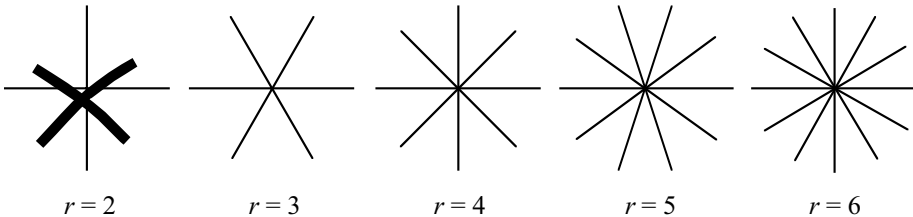


Fig. 9.10. Vlakke quasi-isotropie door een gelijk aantal identieke orthotrope lamellen in 3 of meer regelmatig verdeelde richtingen ($r \geq 3$). Dit geldt dus niet voor een cross-ply laminaat ($r = 2$); zie fig. 9.9.

Het meest eenvoudige voorbeeld van een laminaat met quasi-isotropie ten aanzien van $[A]$ bestaat uit 3 u.d. lamellen: $[0/60/-60]$.

Uit (8.9) volgt:

$$Q'_{11}(60) = Q'_{11}(-60) = \frac{1}{16} Q_{11} + \frac{9}{16} Q_{22} + \frac{3}{8} (Q_{12} + 2Q_{66});$$

$$Q'_{22}(60) = Q'_{22}(-60) = \frac{9}{16} Q_{11} + \frac{1}{16} Q_{22} + \frac{3}{8} (Q_{12} + 2Q_{66});$$

$$Q'_{12}(60) = Q'_{12}(-60) = \frac{3}{16} (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) + \frac{5}{8} Q_{12};$$

$$Q'_{66}(60) = Q'_{66}(-60) = \frac{3}{16} (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12}) + \frac{1}{4} Q_{66}.$$

Invulling in (9.7) levert:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{h}{3} \{ Q_{11} + Q'_{11}(60) + Q'_{11}(-60) \} = h \left\{ \frac{3}{8} Q_{11} + \frac{3}{8} Q_{22} + \frac{1}{4} Q_{12} + \frac{1}{2} Q_{66} \right\} = A_{22}; \\ A_{12} &= \frac{h}{3} \{ Q_{12} + Q'_{12}(60) + Q'_{12}(-60) \} = h \left\{ \frac{1}{8} Q_{11} + \frac{1}{8} Q_{22} + \frac{3}{4} Q_{12} - \frac{1}{2} Q_{66} \right\}; \\ A_{66} &= \frac{h}{3} \{ Q_{66} + Q'_{66}(60) + Q'_{66}(-60) \} = h \left\{ \frac{1}{8} Q_{11} + \frac{1}{8} Q_{22} - \frac{1}{4} Q_{12} + \frac{1}{2} Q_{66} \right\}. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Met (3.9) kan de quasi-isotrope vlakstijfheidsmatrix worden uitgedrukt in de technische constanten van het u.d. materiaal:

$$\begin{aligned} \frac{A_{11}}{h} &= \frac{A_{22}}{h} = \frac{3}{8} \frac{1}{1 - \mu_{LT}\mu_{TL}} \{ E_L + (1 + \frac{2}{3}\mu_{LT})E_T \} + \frac{1}{2} G_{LT}; \\ \frac{A_{12}}{h} &= \frac{1}{8} \frac{1}{1 - \mu_{LT}\mu_{TL}} \{ E_L + (1 + 6\mu_{LT})E_T \} - \frac{1}{2} G_{LT}; \\ \frac{A_{66}}{h} &= \frac{1}{8} \frac{1}{1 - \mu_{LT}\mu_{TL}} \{ E_L + (1 - 2\mu_{LT})E_T \} + \frac{1}{2} G_{LT}; \\ A_{16} &= A_{26} = 0. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Deze laminaat-vlakstijfheidsmatrix voldoet aan de condities (9.11), is invariant met betrekking tot rotatie in zijn vlak.

Dezelfde waarden worden ook verkregen voor alle andere stapelingen van dezelfde lamellen die quasi-isotropo ten aanzien van $[A]$ zijn!

Zoals gezegd, voor vlakke quasi-isotropie is de volgorde van de lamellen niet van invloed. Het is dan ook mogelijk een groep lamellen die voldoet, te combineren met een andere vlak quasi-isotrope groep. In de volgende voorbeelden worden de eerste twee voorbeelden met 3 respectievelijk 4 lamellen gecombineerd op verschillende manieren die de quasi-isotropie ten aanzien van $[A]$ niet verstoren.

Voorbeelden: $[0/60/-60/0/45/-45/90]$, $[0/60/45/-45/90/-60/0]$.

Er wordt dus voldaan aan *vlakke quasi-isotropie* als het laminaat is onder te verdelen in groepen van identieke orthotrope lamellen die voldoen aan de oriëntatieregels voor de oriëntatiehoeken in radialen:

$$\vartheta_m(g) = m \frac{\pi}{r_g} + \alpha_g; \quad m = 1, 2, \dots, r_g; \quad r_g \geq 3. \quad (9.14)$$

Met subscript g wordt de groep aangeduid. Door een willekeurige hoek α_g in de formule op te nemen wordt aangegeven, dat de onderlinge oriëntatie binnen de groep vastligt, maar de oriëntatie ten opzichte van de laminaat-hoofdrichtingen vrij is.

Van groep tot groep mogen de orthotrope lamellen verschillen qua aantal, stijfheidseigenschappen en dikte.

En verder kunnen de lamellen uit de groepen door elkaar, in een geheel willekeurige volgorde, worden gestapeld.

Daarmee is natuurlijk niet voldaan aan $[B] = 0$ en $D_{16} = D_{26} = 0$.

Het is in principe ook mogelijk te voldoen aan quasi-isotropie ten aanzien van de buigstijfheidsmatrix $[D]$. Analooq aan (9.11) moet dan worden voldaan aan de betrekkingen:

$$D_{11} = D_{22}; \quad D_{66} = \frac{1}{2}(D_{11} - D_{12}); \quad D_{16} = D_{26} = 0. \quad (9.15)$$

Maar omdat de daaruit voortvloeiende eisen in het algemeen conflicteren met belangrijker eisen, zoals symmetrische opbouw, wordt er in de praktijk geen aandacht aan besteed.

Quasi-homogene laminaten

Indien zowel aan quasi-isotropie ten aanzien van $[A]$ als ten aanzien van $[D]$ en verder aan de ont koppeling $[B] = 0$ wordt voldaan, is er sprake van quasi-homogeniteit. Het laminaat gedraagt zich dan qua stijfheid als zijnde isotroop. Er geldt voor zo een laminaat, als ware het een isotrope plaat:

$$D_{ij} = \frac{1}{12} h^2 A_{ij}. \quad (9.16)$$

Om een eenvoudig voorbeeld te vinden wordt uitgegaan van identieke orthotrope lamellen en wel van één groep van n lamellen (dat wil zeggen: slechts r richtingen die bij één groep behoren en n/r lamellen per richting). Met dit uitgangspunt wordt al voldaan aan quasi-isotropie ten aanzien van $[A]$.

Ontkoppeling, $[B] = 0$, kan volgens (9.7) en (9.10) worden verkregen door:

$$\sum_{\vartheta_1} p_k = \sum_{\vartheta_2} p_k = \dots = \sum_{\vartheta_r} p_k = 0.$$

En omdat aan quasi-isotropie ten aanzien van $[A]$ wordt voldaan, volgt verder uit (9.7), dat tevens aan quasi-isotropie ten aanzien van $[D]$ wordt voldaan als:

$$\sum_{\vartheta_1} (1 + 12 p_k^2) = \sum_{\vartheta_2} (1 + 12 p_k^2) = \dots = \sum_{\vartheta_r} (1 + 12 p_k^2).$$

Deze eisen kunnen met formule (9.6) worden omgezet in eisen, waaraan de rangnummers $k = 1(1)n$ moeten voldoen:

$$\begin{aligned} \sum_{\vartheta_1} k &= \sum_{\vartheta_2} k = \dots = \sum_{\vartheta_r} k = \frac{1}{2r} n(n+1); \\ \sum_{\vartheta_1} k^2 &= \sum_{\vartheta_2} k^2 = \dots = \sum_{\vartheta_r} k^2 = \frac{1}{6r} n(n+1)(2n+1). \end{aligned} \quad (9.17)$$

Voorbeeld: Een 18-lagen laminaat met 3 richtingen.

$$[0 / -60 / 60 / 60 / -60 / 0 / -60 / 60 / 0 / 0 / 60 / -60 / 60 / 0 / -60 / -60 / 0 / 60]$$

k :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	(0°)	1				36		81	100		196		289					
k^2 :	(60°)		9	16				64		121	169							324
	(-60°)	4			25	49				144		225	256					

$$\sum_0 k = \sum_{60} k = \sum_{-60} k = 57; \quad \sum_0 k^2 = \sum_{60} k^2 = \sum_{-60} k^2 = 703.$$

Nogmaals: de quasi-isotropie en quasi-homogeniteit betreffen alleen de stijfheids-eigenschappen en niet de sterkte-eigenschappen. En in de praktijk is het realiseren van een ideaal laminaat met identieke lamellen die nauwkeurig in voorgeschreven richtingen liggen, een utopie. Voor uitgebreidere aandacht aan de speciale opbouw van laminaten zij verwezen naar de literatuur, o.m. Bartholomew, P. Ply stacking sequences for laminated plates having in-plane and bending orthotropy. *Fibre Science and Technology* **10** (1977), 239-253.

9.4. De technische constanten van een ontkoppeld laminaat

Bij de definitie van effectieve technische constanten is uitgegaan van een statistisch homogeen materiaal en een (volume)gemiddelde spanningstoestand waarvan slechts één component ongelijk nul is. De toepassing van deze begrippen kan worden uitgebreid tot laminaten waarvan de koppelmatrix $[B] = 0$, bijvoorbeeld door een *symmetrische opbouw*. Indien een proefstuk dat uit een 'ontkoppeld' laminaat is gesneden, *in zijn vlak belast* wordt, blijft het in vervormde toestand vlak. Zodoende zijn de vervormingen uniform over de dikte verdeeld. Als niet aan die ont koppeling wordt voldaan, treedt er bij vlakke belasting ook buiging en/of wringing op, en is de vervorming niet uniform verdeeld over de dikte en evenmin de belastingstoestand over de dwarsdoorsnede. Het gebruik van technische constanten voor 'gekoppelde' laminaten kan alleen met de nodige omzichtigheid gebeuren. Hier blijft de behandeling beperkt tot ont koppelde laminaten.

Door de krachtresultanten in een laminaat te delen door de laminaatdikte worden de globale of gemiddelde spanningen verkregen. Deze worden met een overstreping aangeduid. Bij vlakspanning, in de laminaat-hoofdrichtingen:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{N_x}{h}; \quad \bar{\sigma}_y = \frac{N_y}{h}; \quad \bar{\sigma}_{xy} = \frac{N_{xy}}{h}. \quad (a)$$

Indien van de belastingen alleen N_x ongelijk nul is, dan behoort daarbij een primaire rek ${}^{(x)}\epsilon_x^0$. Naar de oorzaak, N_x , wordt gerefereerd door het superscript x tussen haakjes vóór het reksymbool. Nu geldt:

$${}^{(x)}\epsilon_x^0 = a_{11} N_x = a_{11} \bar{\sigma}_x h \quad \rightarrow \quad E_x^0 = \frac{\bar{\sigma}_x}{{}^{(x)}\epsilon_x^0} = \frac{1}{a_{11} h}. \quad (b)$$

Hiermee is de elasticiteitsmodulus in het vlak van het laminaat in x -richting gedefinieerd en uitgedrukt in een laminaatcompliantie.

Voor de *technische constanten in het vlak* van het 'ontkoppelde' laminaat geldt zodoende:

$$E_x^0 = \frac{1}{a_{11} h}; \quad E_y^0 = \frac{1}{a_{22} h}; \quad \mu_{xy}^0 = -\frac{a_{21}}{a_{11}}; \quad G_{xy}^0 = \frac{1}{a_{66} h}. \quad (9.18)$$

Omdat vanwege de ont koppeling de vlakstijfheidsmatrix $[A]$ de inverse is van de vlakcompliantiematrix $[a]$, kunnen de technische constanten in het vlak op eenvoudige wijze in die vlakstijfheden worden uitgedrukt.

$$E_x^0 = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{h A_{22}}; \quad E_y^0 = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{h A_{11}}; \quad \mu_{xy}^0 = \frac{A_{12}}{A_{22}}; \quad G_{xy}^0 = \frac{A_{66}}{h}. \quad (9.19)$$

N.B. Deze technische constanten in het vlak kunnen *niet* worden gebruikt in formules voor buiging en/of wringing van homogene platen om het elastisch gedrag van het laminaat te voorspellen! Ga dit na.

Angle-ply laminaten

Ter illustratie wordt een angle-ply laminaat met oriëntaties $\pm\vartheta$ genomen dat aangevuld is met 0° - en 90° -lamellen op een zodanige wijze dat $[B] = 0$. Neem aan dat alle lamellen identiek zijn. Het aantal lamellen in 0° -richting is $n(0)$, enzovoort. Dan geldt voor de fracties:

$$f_0 = \frac{n(0)}{n}; \quad f_\vartheta = \frac{n(\vartheta)}{n}; \quad f_{-\vartheta} = \frac{n(-\vartheta)}{n}; \quad f_{90} = \frac{n(90)}{n};$$

waarin n het totale aantal lamellen is.

$$f_0 + f_\vartheta + f_{-\vartheta} + f_{90} = 1; \quad f_{-\vartheta} = f_\vartheta. \quad (c)$$

De vlakstijfheden zijn:

$$A_{ij} = h \left\{ f_0 Q_{ij} + f_\vartheta Q'_{ij}(\vartheta) + f_{-\vartheta} Q'_{ij}(-\vartheta) + f_{90} Q'_{ij}(90) \right\}.$$

Substitutie in (9.19) levert de technische constanten in de laminaat-hoofdrichtingen:

$$E_x^0 = f_0 Q_{11} + 2f_\vartheta Q'_{11}(\vartheta) + f_{90} Q_{22} - \frac{\left\{ (1-2f_\vartheta) Q_{12} + 2f_\vartheta Q'_{12}(\vartheta) \right\}^2}{f_0 Q_{22} + 2f_\vartheta Q'_{22}(\vartheta) + f_{90} Q_{11}};$$

$$E_y^0 = f_0 Q_{22} + 2f_\vartheta Q'_{22}(\vartheta) + f_{90} Q_{11} - \frac{\left\{ (1-2f_\vartheta) Q_{12} + 2f_\vartheta Q'_{12}(\vartheta) \right\}^2}{f_0 Q_{11} + 2f_\vartheta Q'_{11}(\vartheta) + f_{90} Q_{22}};$$

$$G_{xy}^0 = (1-2f_\vartheta) Q_{66} + 2f_\vartheta Q'_{66}(\vartheta);$$

$$\mu_{xy}^0 = \frac{(1-2f_\vartheta) Q_{12} + 2f_\vartheta Q'_{12}(\vartheta)}{f_0 Q_{22} + 2f_\vartheta Q'_{22}(\vartheta) + f_{90} Q_{11}}. \quad (9.20)$$

Voorbeeld: Als voorbeeld kan dienen het 8-lamellige laminaat $[0/30/-30/90]_s$, waaraan in 8.5 een sterkte-analyse is uitgevoerd. Bij globale lijnspanning σ in x -richting zijn de laminaatvervormingen:

$$\varepsilon_x^0 = a_{11}h\sigma = 0,0412\sigma; \varepsilon_y^0 = a_{21}h\sigma = -0,0111\sigma; \gamma_{xy}^0 = a_{61}h\sigma = 0.$$

Het laminaat blijft vlak.

De elasticiteitsmodulus van het laminaat in x -richting heeft de waarde

$$E_x^0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_x^0} = \frac{1}{0,0412} = 24,2 \text{ GN/m}^2.$$

Verder volgt uit deze lijnspanningstoestand de poissonverhouding

$$\mu_{xy}^0 = -\frac{\varepsilon_y^0}{\varepsilon_x^0} = \frac{0,0111}{0,0412} = 0,268.$$

Met de formules (9.20) kunnen deze resultaten worden gecheckt. Evenals de overige technische constanten

$$E_y^0 = 16,8 \text{ GN/m}^2; \quad G_{xy}^0 = 6,74 \text{ GN/m}^2.$$

Deze waarden zijn overigens met het eertijds in eigen beheer in DOS ontwikkelde pc laminatenprogramma PLAMOR berekend. Dit laminatenprogramma is geïntegreerd in het Windows-programma KOLIBRI van de faculteit Luchtvaart- en Ruimtevaart-techniek van de TU Delft.

Vlak quasi-isotrope laminaten

Indien het laminaat zodanig uit identieke u.d. lamellen is opgebouwd, dat het quasi-isotroop is ten aanzien van de vlakstijfheidsmatrix en ontkoppeld, dan kunnen de vlakstijfheden met (9.7) in de gereduceerde stijfheidsconstanten van de lamel worden uitgedrukt. Door resultaat (9.12) in te vullen in (9.19) worden de technische constanten van het quasi-isotrope laminaat – met overstreping onderscheiden – uitgedrukt in de lamelconstanten:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{(Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12})(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66})}{3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}} = \frac{2(U_1 + U_4)U_5}{U_1} = \\ &= \frac{U_1^2 - U_4^2}{U_1} = L_1 \frac{L_1 + 4L_2}{3L_1 + 4L_2}; \end{aligned}$$

$$\bar{G} = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}) = U_5 = \frac{1}{8}(L_1 + 4L_2);$$

$$\bar{\mu} = \frac{Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}}{3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}} = \frac{U_4}{U_1} = \frac{L_1 - 4L_2}{3L_1 + 4L_2} = \frac{\bar{E}}{2\bar{G}} - 1. \quad (9.21)$$

De technische constanten zijn met behulp van (3.15) en (3.22) tevens uitgedrukt in twee van de invarianten U_1, U_4, U_5, L_1, L_2 . Aan het onderlinge verband tussen de drie technische constanten zoals bij isotroop materiaal wordt hier ook voldaan.

Deze formules zijn geldig voor *alle laminaten uit identieke orthotrope lamellen die vlak quasi-isotroop zijn*. Ze kunnen dus ook, als benadering, worden gebruikt voor lamellen of laminaten die versterkt zijn met een *filamentmat* of een *gesneden-vezelmat*, mits de vezelverdeling in het vlak willekeurig (*at random*) is. In dat geval wordt

verondersteld, dat lamel of laminaat is samengesteld uit oneindig vele identieke u.d. laagjes met een infinitesimale dikte met een uniforme verdeling over alle richtingen in het vlak. Hetzelfde resultaat wordt dan ook verkregen door de vlakstijfheden in het laatst geschetste model door integratie te berekenen. Ter illustratie van deze werkwijze zal in de volgende paragraaf de thermische uitzettingscoëfficiënt van een dergelijk laminaat worden uitgerekend.

9.5. Thermische uitzetting van een vlak quasi-isotropo laminaat

Het laminaatmodel bestaat uit identieke orthotrope lamellen met een infinitesimale dikte en een uniforme oriëntatieverdeling. Gevraagd wordt de lineïke thermische uitzettingscoëfficiënt α_c (subscript c voor composietplaat) van het vlak quasi-isotropo laminaat in zijn vlak uit te drukken in de lineïke thermische uitzettingscoëfficiënten α_1 en α_2 in de hoofdrichtingen van zo'n lamel ($\alpha_6 = 0$).

Bij vlakspanning in de k -de lamel, veroorzaakt door een uitwendige belasting en een temperatuurverandering ΔT , geldt bij gegeven lineariteit in het algemeen, betrokken op de hoofdrichtingen van de lamel:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ & Q_{22} & 0 \\ & & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}_k ; \quad (8.21)$$

$$\text{kortweg: } \{\sigma\}_k = [Q]_k \{\varepsilon\}_k - [Q]_k \{\alpha\}_k \Delta T.$$

Genoemde rekken ε_i zijn de totale rekken. Transformatie in de vorm van rotatie naar de hoofdrichtingen van het laminaat verloopt volgens (3.11).

$$\begin{aligned} \{\sigma'\}_k &= [T]_k \{\sigma\}_k, & (3.11) \\ \text{met: } [T]_k &= \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, & \text{waarin: } c \equiv \cos \varphi, s \equiv \sin \varphi. \end{aligned}$$

De onderstreping is hier weggelaten. Transformatiematrix $[T]$ is hier niet cursief geschreven, om verwisseling met temperatuur T te voorkomen.

Met (3.11) en (8.21) kunnen nu de krachtresultanten uit (8.12) worden bepaald:

$$\{N\} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\sigma'\}_k dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [T]_k [Q]_k \{\varepsilon\}_k dz - \Delta T \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [T]_k [Q]_k \{\alpha\}_k dz.$$

De uitwendige belasting, $\{N\}$ en $\{M\}$, kan uiteraard 0 worden gesteld. Omdat het laminaat vlak quasi-isotropo is, zal de totale rek van het laminaat dan gelijk zijn aan de thermische uitzetting en in alle richtingen van het vlak dezelfde waarde hebben: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_c$.

Dan:

$$\alpha_c = \frac{\varepsilon_c}{\Delta T}. \quad (\text{a})$$

Hoekvervorming ten gevolge van de temperatuursprong treedt niet op: $\varepsilon_6 = 0$. In (8.21) zijn $\{\varepsilon\}_k = \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_c, \varepsilon_c, 0\}^T$ en $\{\alpha\}_k = \{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, 0\}^T$ niet afhankelijk van de plaats van de lamel in het laminaat. Het laminaat blijft vlak; de vervormingstoestand verandert niet over de dikte van een lamel, en evenmin $[T]_k$ respectievelijk $[Q]_k$, zodat het geheel buiten de integraal over de lamel kan worden geplaatst. Met als resultaat:

$$\{0\} = \sum_{k=1}^n [T]_k [Q]_k \{\varepsilon\} (z_k - z_{k-1}) - \Delta T \sum_{k=1}^n [T]_k [Q]_k \{\alpha\} (z_k - z_{k-1}).$$

Vanwege de uniform veronderstelde oriëntatieverdeling en de infinitesimale lameldikte ($z_k - z_{k-1}$) kan dit worden geformuleerd in de integraalvorm

$$\begin{aligned} \{0\} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^h [T][Q]\{\varepsilon\} d\varphi dz - \frac{\Delta T}{\pi} \int_0^\pi \int_0^h [T][Q]\{\alpha\} d\varphi dz = \\ &= \frac{h}{\pi} \int_0^\pi [T][Q]\{\varepsilon\} d\varphi - \frac{h\Delta T}{\pi} \int_0^\pi [T][Q]\{\alpha\} d\varphi. \end{aligned} \quad (\text{b})$$

De eerste integraal wordt uitgeschreven, rekening houdend met de orthotropie van de lamellen:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi [T][Q]\{\varepsilon\} d\varphi &= \int_0^\pi \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ & Q_{22} & 0 \\ & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_c \\ \varepsilon_c \\ 0 \end{Bmatrix} d\varphi = \\ &= \int_0^\pi \begin{bmatrix} c^2 Q_{11} + s^2 Q_{12} & c^2 Q_{12} + s^2 Q_{22} & 2cs Q_{66} \\ s^2 Q_{11} + c^2 Q_{12} & s^2 Q_{12} + c^2 Q_{22} & -2cs Q_{66} \\ -cs Q_{11} + cs Q_{12} & -cs Q_{12} + cs Q_{22} & (c^2 - s^2) Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_c \\ \varepsilon_c \\ 0 \end{Bmatrix} d\varphi. \end{aligned}$$

Hierin zijn alleen c en s van φ afhankelijk. De voorkomende integralen zijn:

$$\int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi = \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad \int_0^\pi \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 0.$$

Berekening van beide integralen uit (b) levert:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} Q_{11} + Q_{12} & Q_{12} + Q_{22} & 0 \\ Q_{11} + Q_{12} & Q_{12} + Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_c \\ \varepsilon_c \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T.$$

Uitwerking levert twee identieke vergelijkingen:

$$0 = (Q_{11} + 2Q_{12} + Q_{22})\varepsilon_c - \{(Q_{11} + Q_{12})\alpha_1 + (Q_{12} + Q_{22})\alpha_2\} \Delta T.$$

Dus:

$$\begin{aligned} \alpha_c &= \frac{(Q_{11} + Q_{12})\alpha_1 + (Q_{12} + Q_{22})\alpha_2}{Q_{11} + 2Q_{12} + Q_{22}} = \\ &= \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{Q_{11} - Q_{22}}{2(Q_{11} + 2Q_{12} + Q_{22})}(\alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned} \quad (9.22)$$

Controle: In geval van isotropie is $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \rightarrow \alpha_c = \alpha$.

In het geval van u.d. lamellen, met $\alpha_1 = \alpha_L$ en $\alpha_2 = \alpha_T$, wordt (9.22) m.b.v. (3.9):

$$\alpha_c = \frac{(1 + \mu_{TL})E_L\alpha_L + (1 + \mu_{LT})E_T\alpha_T}{(1 + \mu_{TL})E_L + (1 + \mu_{LT})E_T} \quad (9.23)$$

9.6. Interlaminare spanningen aan de vrije randen

In de laminatentheorie is er van uitgegaan, dat in elke lamel een vlakspanningstoestand heerst, dus dat, in het gebruikte coördinatenstelsel, $\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$. Indien er echter vrije randen zijn, treden er wel degelijk spanningen op tussen de lagen – *interlaminare spanningen* genoemd – die nabij de randen grote waarden kunnen aannemen. Het bestaan van deze interlaminare spanningen zal allereerst kwalitatief worden aangetoond aan de hand van enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1: Een symmetrisch cross-ply laminaat $[0/90]_s$ uit identieke u.d. lamellen. Uit dit laminaat wordt een strip in 0° -richting (x -richting) genomen en getrokken. Vanwege de symmetrische opbouw blijft de strip vlak. In een u.d. lamel is $\mu_{LT} > \mu_{TL}$ omdat $E_L > E_T$. De 0° -lamellen willen daarom meer contraheren dan de 90° -lamellen, maar ze worden gedwongen gezamenlijk in dezelfde mate te contraheren. Zie fig. 9.11. Het gevolg is dat er in dwarsrichting in de 0° -lamellen een trekspanning, $\sigma_y > 0$, ontstaat die de dwarscontractie tegenwerkt, en in de 90° -lamellen een drukspanning, $\sigma_y < 0$. Deze zijn met de laminatentheorie te berekenen. Maar deze spanningen

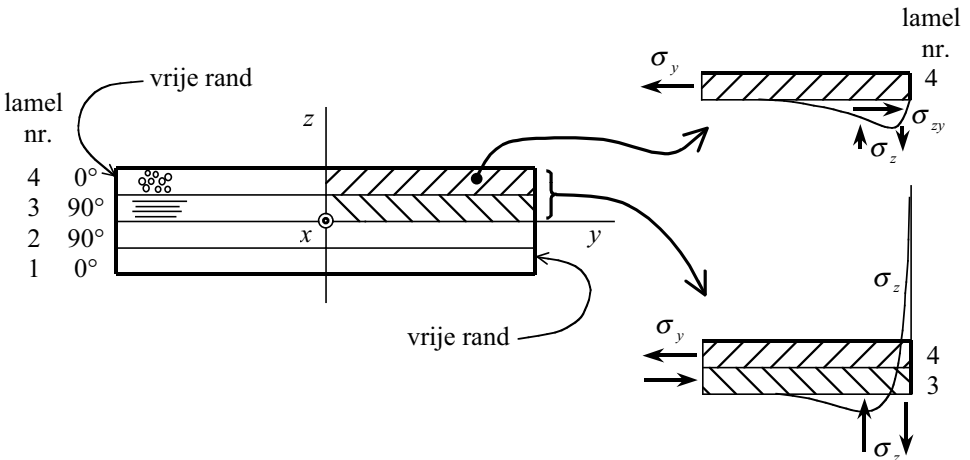


Fig. 9.11. Dwarsdoorsnede van een strip uit een vierlamellig cross-ply laminaat $[0/90]_s$ die wordt getrokken in x -richting (0°). Door verschil in dwarscontractiecoëfficiënt tussen de verschillend georiënteerde lamellen ontstaan er aan de vrije randen interlaminare spanningen: normaalspanning σ_z , en schuifspanning σ_{zy} loodrecht op de rand.

kunnen niet doorlopen tot aan de zijkanten, want de randen zijn vrij en spanningsloos. Dus moet er een *krachtuitwisseling* plaatsvinden tussen de lamellen met *dwarstrek* en die met *dwarsdruk*. Deze is slechts mogelijk door een *interlaminare schuifspanning loodrecht op de rand*, σ_{zy} ; zie het krachterevenwicht in *y*-richting van de rechter helft van de vierde lamel en het geschetste verloop van de schuifspanning.

Uit het momentenevenwicht van de zelfde lamelhelft kan worden geconcludeerd, dat er een interlaminare normaalkracht in *z*-richting moet werken (normaalspanning σ_z in fig. 9.11). Omdat er geen uitwendige kracht werkt in *z*-richting moet de *interlaminare normaalspanning* zowel positief als negatief zijn, namelijk qua krachten met zichzelf in evenwicht. Om het gewenste moment te verkrijgen zal de normaalspanning aan de vrije rand positief zijn en verder naar binnen negatief. Dit geldt ook voor de combinatie van de lamellen 3 en 4. Het verloop van de interlaminare normaalspanning tussen de lamellen 2 en 3 is schetsmatig weergegeven. Aan de rand kan de normaalspanning erg groot worden. In geval van trekspanning is er kans op *delaminatie* ten gevolge van trekbreuk in het matrixmateriaal van de lijmlaag tussen de lamellen. De interlaminare trek aan de rand zal tussen de tweede en de derde lamel groter zijn dan tussen de derde en de vierde lamel, want het moment waarmee evenwicht moet worden gemaakt, is het dubbele. Dus daar zal de delaminatie beginnen. Tussen de tweede en de derde lamel treedt er geen interlaminare schuifspanning loodrecht op de rand op: druk- en trekkracht in derde respectievelijk vierde lamel heffen elkaar op.

Bij omkering van de belastingsrichting – druk van de strip in *x*-richting – wordt de interlaminare trekspanning aan de rand een drukspanning en is het gevaar van delaminatie geweken. Hetzelfde resultaat kan ook bij trek van de strip worden verkregen, namelijk door een andere stapelvolgorde te kiezen: $[90/0]_s$. Maar bij wisselbelasting is dat geen oplossing.

In deze laminaatstrip worden interlaminare spanningen aan de vrije randen opgewekt door een mechanische belasting vanwege verschil in dwarscontractiecoëfficiënt tussen de lamellen. Soortgelijke randspanningen kunnen ook ontstaan door verschil in thermische uitzettingscoëfficiënt in dwarsrichting, bijvoorbeeld tijdens het afkoelen buiten de autoclaaf waarin het laminaat is vervaardigd. Of door een verschil in krimp in dwarsrichting ten gevolge van reactiekrimp van de hars tijdens het uitharden, zo er in dat stadium geen harsuitwisseling tussen de lamellen meer kan optreden.

Voorbeeld 2:

Een symmetrisch angle-ply laminaat $[\vartheta/-\vartheta]_s$ uit identieke u.d. lamellen.

Er wordt een strip uit het laminaat genomen in de 0° -richting en getrokken. Indien de lamellen afzonderlijk zouden kunnen reageren op een lijnspanning in de 0° -richting, dan zouden ze scheef willen trekken, omdat de vervormingsverhoudingen ρ'_{16} betrekken op de laminaat-hoofdrichtingen ongelijk nul zijn. En wel in het ene geval positief en in het andere geval negatief. De richting waarin de rotatie zich afspeelt, is af te leiden uit de vezelrichting: de diagonaalrichting waarin de vezels (bij benadering) liggen vertoont een veel grotere weerstand tegen rek dan de andere diagonaalrichting. Zie fig. 9.12.

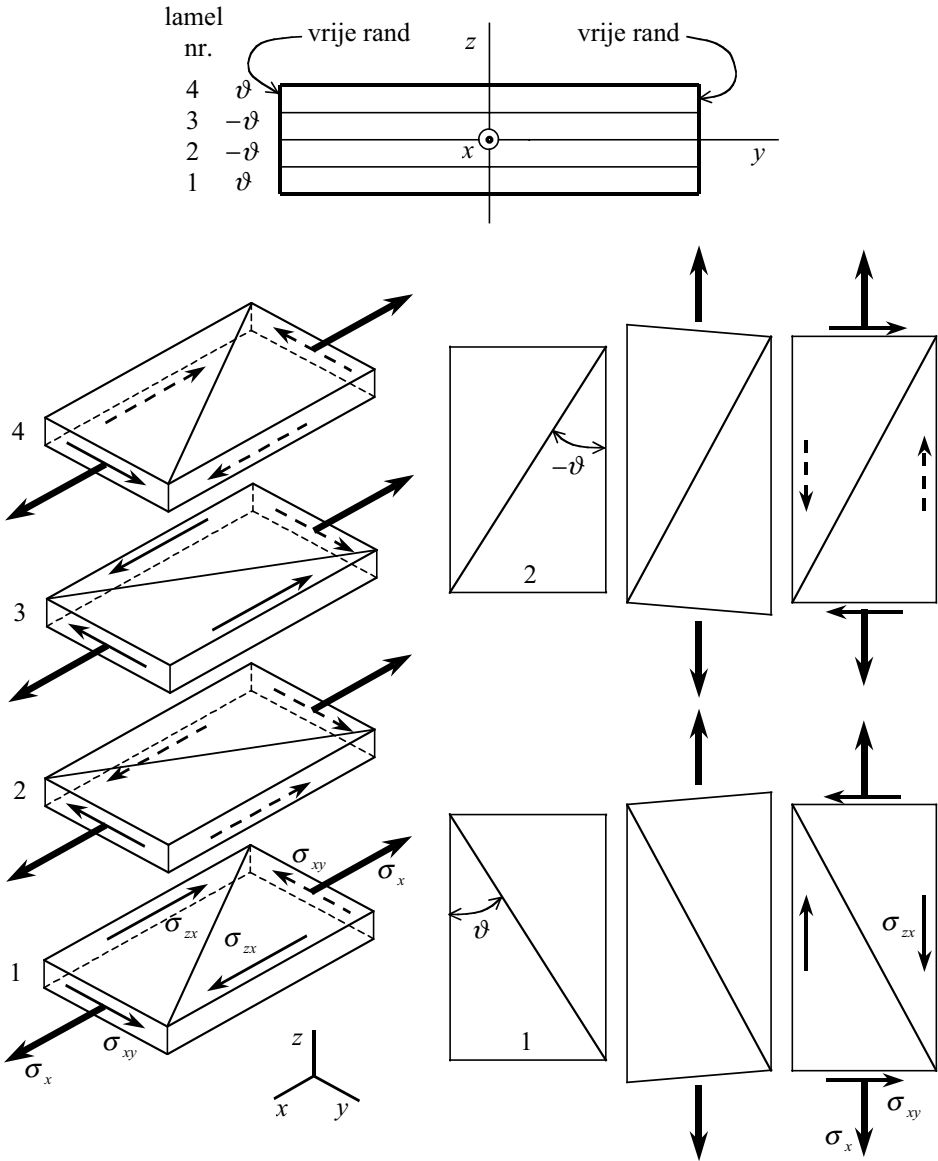


Fig. 9.12. Een strip uit een vierlamellig angle-ply laminaat $[\vartheta/-\vartheta]_s$ in x -richting (0°), wordt in die richting getrokken, waardoor er een interlaminaire schuifspanning σ_{zx} evenwijdig aan de vrije randen wordt opgewekt. Boven een dwarsdoorsnede met laminaatopbouw, links een exploded view en rechts de lamellen 1 en 2 die tegengesteld scheef willen trekken maar dat over en weer verhinderen.

Omdat het laminaat zich vanwege zijn opbouw orthotroop gedraagt, moeten de lamellen rechthoekig blijven. Om dat te bewerkstelligen werkt er in de dwarsdoorsneden van de lamellen een schuifspanning σ_{xy} . Deze schuifspanning moet naar de randen gaand afnemen tot nul. Per lamel moet er een momentenevenwicht om de z-as heersen. Daarvoor zorgt een *interlaminaire schuifspanning aan de rand* (σ_{zx} in fig. 9.12). Blijkens theoretische beschouwingen vertoont deze interlaminaire schuifspanning aan de rand een singulariteit, wordt daar oneindig groot. De werkelijkheid laat dergelijke oneindige spanningen niet toe. Maar het is een duidelijke indicatie, dat er lokaal heel hoge spanningen optreden.

Voor een diepergaande beschouwing van deze problematiek zij verwezen naar de literatuur. Volgens Christensen worden de gevonden waarden voor sommige interlaminaire spanningen groter naarmate de berekeningsmethode verfijnder wordt. Er kunnen aan de randen singulariteiten worden verondersteld, vergelijkbaar met de singulariteiten aan de tip van een scheur. Het heeft daarom niet zoveel praktisch nut te trachten een exacte oplossing te vinden. Benaderingen kunnen echter kwalitatief wel bruikbaar zijn om een indicatie te geven van de invloed van de opbouw van het laminaat op de interlaminaire spanningen aan de randen, aan de omtrek van gaten in het laminaat en dergelijke.

In het algemeen kunnen de bevindingen als volgt worden samengevat:

- De interlaminaire schuifspanning loodrecht op de rand nadert tot nul bij de rand.
- De interlaminaire normaalspanning neemt sterk toe in de buurt van de rand, en kan er positief zijn of negatief.
- De interlaminaire schuifspanning evenwijdig aan de rand neemt zeer sterk toe aan de rand.
- De interlaminaire spanningen zijn te beschouwen als een randeffect. Op een afstand van grofweg ten minste meerdere malen de lameldikte tot de laminaatdikte van de rand verwijderd, zijn die spanningen weggeëbd en is de laminatentheorie goed bruikbaar.
- Interlaminaire spanningen hebben enige invloed op de statische sterkte, maar een sterke invloed op de dynamische sterkte; een en ander afhankelijk van karakter en grootte.
- De opbouw (stapelvolgorde) van een laminaat kan zowel het karakter als de grootte van de interlaminaire spanningen beïnvloeden.

Bij zuivere buiging is er, ook bij afwezigheid van randen, sprake van interlaminaire spanningen. De daarvoor te gebruiken theorie gaat uit van een hogere orde verplaatsingsveld, volgens Christensen [12]. Voor een andere berekeningswijze, van Pagano, zie Jones [13].

9.7. Aanbevelingen voor de opbouw van een laminaat

Op grond van voorgaande beschouwingen kunnen aanbevelingen worden gedaan voor de opbouw van een laminaat.

1. *Symmetrische opbouw.*

Door het laminaat symmetrisch ten opzichte van het middenvlak op te bouwen wordt voorkomen dat er kopeffecten ten gevolge van $[B] \neq 0$ optreden. Deze kopeffecten uiten zich bij mechanische belasting in de zin van vervormingen uit het vlak bij belasting in het vlak en omgekeerd. Maar deze koppeling heeft ook zijn uitwerking bij temperatuurverandering, bijvoorbeeld het kromtrekken van een in vlakke toestand in een oven uitgehard laminaat bij afkoeling tot kamertemperatuur.

N.B. - Niet elk laminaat moet symmetrisch worden opgebouwd. Denk bijvoorbeeld aan een gekromde schaal of de cilindrische wand van een vat.

- Het is in principe ook mogelijk met een goedkope vlakke mal door een uitgekende asymmetrische laminaatopbouw een licht gekromde schaal te vervaardigen.

2. *Klein verschil in oriëntatie tussen opeenvolgende lamellen.*

Doel is om de verschillen tussen vervormingsverhoudingen en tussen thermische uitzettingscoëfficiënten van aangrenzende lamellen klein te houden, omdat door die verschillen spanningen kunnen worden opgeroepen.

3. *Weinig lamellen met dezelfde oriëntatie op elkaar.*

Indien er interlaminaire spanningen optreden, zijn deze bij dickere lamellen groter dan bij dünnere, omdat de opgewekte krachten groter zijn, terwijl de interactie zich afspeelt in hetzelfde interlaminaire vlak.

4. *Vlakke orthotropie.*

Door het laminaat vlak orthotroop te ontwerpen, met $A_{16} = A_{26} = 0$, blijft het gedrag inzichtelijker.

5. *Bij voorkeur geen randen.*

Randen roepen interlaminaire spanningen op die tot delaminatie kunnen leiden. Ontwerp daarom geïntegreerde constructies, met zo weinig mogelijk onderdelen. Vezelversterkte kunststoffen lenen zich bij uitstek daartoe.

6. *Bij randen: interlaminaire spanningen zo klein mogelijk.*

Vermijd vooral interlaminaire trekspanningen door een juiste keuze van de stapelvolgorde. Zijn deze niet te vermijden, versterk dan de rand met een omranding.